

Mathematisches Seminar
der
Christian-Albrechts-Universität
zu Kiel

Nichtauflösbare $J(T)$ -Komponenten

Diplomarbeit

vorgelegt von
Benjamin Doerr
im April 1998

Betreuer: Prof. Dr. Bernd Stellmacher

1 Einleitung

In dieser Arbeit zeigen wir, wie eine bestimmte Klasse von Untergruppen, sogenannte $J(T)$ -Komponenten, zur Untersuchung der Struktur einer endlichen Gruppe eingesetzt werden können. Gemäß dem Ansatz, daß ein großer Teil der Information über eine Gruppe bereits in ihrer lokalen Struktur enthalten ist, begnügen wir uns damit, Informationen über diese Untergruppen zu finden.

Wir orientieren uns dabei an [KS, Kapitel 12], wo folgendes Resultat erzielt wird:

Satz: *Sei G eine endliche Gruppe der lokalen Charakteristik 2 mit $O_2(G) = 1$. Gelte*

(\mathcal{N}) *Jede 2-lokale Untergruppe von G ist auflösbar und*

(\mathcal{Z}) *$C_G(\Omega_1(Z(S))) \leq N_G(S)$ für $S \in \text{Syl}_2(G)$.*

Dann existiert eine stark eingebettete Untergruppe von G , oder es existieren zwei maximale 2-lokale Untergruppen L_1 und L_2 von $O^2(G)$ mit $L_1 \simeq L_2 \simeq S_4$ und $L_1 \cap L_2 \in \text{Syl}_2 L_1$.

Beachte, daß die Gruppen mit einer stark eingebetteten Untergruppe von Bender bestimmt wurden (siehe [Be]). Der Satz bestimmt die untersuchte Klasse von Gruppen also bis auf eine eingehendere Analyse der erzielten lokalen Information.

Aufgrund der Voraussetzung (\mathcal{N}) sind alle dabei auftretenden $J(T)$ -Komponenten auflösbar. Wir möchten nun zeigen, daß auch nichtauflösbare $J(T)$ -Komponenten in ähnlich guter Weise einsetzbar sind. Ferner sind die meisten unserer Argumente nicht davon abhängig, daß die spezielle Primzahl 2 betrachtet wird. Daher fixieren wir eine Primzahl p und ersetzen die Voraussetzung (\mathcal{N}) durch die schwächere Bedingung

(\mathcal{C}) *für alle Elemente t der Ordnung p ist $C_G(t)$ auflösbar.*

Im dritten und vierten Kapitel gelingt es uns, die Struktur gewisser $J(T)$ -Komponenten zu beschreiben: Modulo dem größten p -Normalteiler sind sie isomorph zur 2-dimensionalen speziellen linearen Gruppe über einem Körper der Mächtigkeit p^n für ein $n \in \mathbf{N}$.

Mit diesem Wissen untersuchen wir die p -lokale Struktur der betrachteten Gruppe. Für den Fall $p = 2$ zeigen wir als direkte Verallgemeinerung von oben

Satz: *Sei G eine endliche Gruppe der lokalen Charakteristik 2 mit $O_2(G) = 1$. Gelte (\mathcal{C}) und (\mathcal{Z}).*

Dann existiert eine stark eingebettete Untergruppe von G , oder es existieren zwei maximale 2-lokale Untergruppen L_1 und L_2 von $O^2(G)$, die isomorph sind zum natürlichen semidirekten Produkt einer $SL_2(2^n)$ enthaltenden Untergruppe der $\Gamma L_2(2^n)$ auf einer elementarabelschen Gruppe der Ordnung 2^{2n} . Es gilt $|L_1 \cap L_2|_2 = |L_1|_2 = |L_2|_2 = 2^{3n}$, im Fall $n \geq 2$ sogar $\text{Syl}_2(L_1) \subseteq \text{Syl}_2(H)$.

Für $p \neq 2$ gelten ähnliche Aussagen. Die Ergebnisse lassen sich jedoch nicht ganz so einfach formulieren, so daß ihre Darstellung den Rahmen dieser Einleitung sprengen würde. Der interessierte Leser sei auf Kapitel 6 verwiesen.

Im Fall $p = 2$ können wir auf die Ergebnisse zurückgreifen, die in [KS] mit Hilfe der Signalisatorfunktorthorie gewonnen wurden, und erhalten

Satz: *Sei G eine Gruppe gerader Ordnung mit $O_2(G) = 1 = O_{2'}(G)$, in der (C) und (Z) gelten. Sei $S \in \text{Syl}_2(G)$, $Z := \Omega_1(Z(S))$, $H := O^2(G)$ und $R := H \cap S$. Dann gilt einer der folgenden Fälle:*

- (i) H besitzt eine stark eingebettete Untergruppe.
- (ii) $Z \simeq Z_2$, $Z \leq R$, und Z ist schwach abgeschlossen in R bezüglich H .
- (iii) $\Omega_1(R) = Z \simeq Z_2 \times Z_2$.
- (iv) H hat lokale Charakteristik 2, und es existieren zwei maximale 2-lokale Untergruppen L_1, L_2 von H , die isomorph sind zum natürlichen semidirekten Produkt einer $SL_2(2^n)$ enthaltenden Untergruppe der $\Gamma L_2(2^n)$ auf einer elementarabelschen Gruppe der Ordnung 2^{2n} . Es gilt $|L_1 \cap L_2|_2 = |L_1|_2 = |L_2|_2 = 2^{3n}$, im Fall $n \geq 2$ sogar $\text{Syl}_2(L_1) \subseteq \text{Syl}_2(H)$.

Für die Fälle (i) bis (iii) liegen bereits starke Sätze vor (eine ausführliche Darstellung findet sich ebenfalls in [KS]). Wir haben das Problem also wieder reduziert auf die Analyse der lokalen Information von Fall (iv).

Prof. Stellmacher möchte ich ganz herzlich danken für die interessante Aufgabenstellung und die gute Betreuung. Es war faszinierend zu sehen, wie er für alle meine Fragen und Probleme in Sekundenschnelle eine Lösung fand.

2 Hilfssätze und Zitate

In diesem Kapitel stellen wir einige Aussagen zusammen, die wir später benötigen werden. Teils sind es Zitate, teils technische Lemmata, die wir lieber außerhalb des eigentlichen Beweises zeigen.

2.1 Satz (Glauberman): *Sei G eine endliche Gruppe mit $O_p(G) = 1$, die treu auf einer abelschen p -Gruppe V operiert, so daß $C_V(G) = 1$ gilt. Sei M eine maximale Untergruppe von G und $1 \neq A \leq M$ mit $p^n := |A| \geq |V : C_V(A)|$, $[V, A, A] = 1$ und $G = \langle A, A^g \rangle$ für alle $g \in G \setminus M$.*

Dann ist G isomorph zu $SL_2(p^n)$ und V ist natürlicher Modul zu G (d.h. $V \simeq GF(p^n)^2$ und G operiert als $SL_2(p^n)$ auf V).

Beweis: [G]. ■

2.2 Hilfssatz: *Sei H eine endliche Gruppe und A eine p -Untergruppe von H . Sei $h \in H$ derart, daß $X := \langle A, A^h \rangle$ keine p -Gruppe und minimal (bezüglich Inklusion) mit dieser Eigenschaft ist. Sei $T_0 \in \text{Syl}_p(X)$ mit $A \leq T_0$. Dann gilt*

- (i) $M := N_X(\langle A^y | y \in H, A^y \leq T_0 \rangle)$ ist eine maximale Untergruppe von X .
- (ii) Für $x \in X \setminus M$ ist $\langle A, A^x \rangle = X$.
- (iii) Ist $N \trianglelefteq X$, so gilt $X = AN$, falls $N \not\leq M$, und N ist p -abgeschlossen, falls $N \leq M$.

Beweis: Für eine Untergruppe U von H setze $\mathcal{X}(U) := \{A^y | y \in H, A^y \leq U\}$ und $X(U) := \langle \mathcal{X}(U) \rangle$. Dann ist $M = N_X(X(T_0))$.

Da $A \not\leq O_p(X)$ ist $M < X$. Sei $M \leq X_0 < X$. Sei $x \in X_0$ und $B \in \mathcal{X}(T_0)$. Dann ist $\langle B, B^x \rangle \leq X_0$ wegen der Minimalität von X eine p -Gruppe, also $\langle B^{X_0} \rangle \leq O_p(X_0)$ nach dem Satz von Baer und somit $\langle X(T_0)^{X_0} \rangle \leq X(O_p(X_0)) \leq X(T_0)$, d.h. $X_0 = M$. Dies zeigt (i) und $\mathcal{X}(M) = \mathcal{X}(T_0)$, da $T_0 \in \text{Syl}_p(M)$.

Sei $x \in X \setminus M$. Angenommen, $\langle A, A^x \rangle \neq X$. Dann ist $\langle A, A^x \rangle$ eine p -Gruppe, liegt also in einer p -Sylowgruppe T_0^g , $g \in X$. Die Voraussetzungen sind invariant unter Konjugation mit Elementen aus H , daher kann $M^g \neq M$ angenommen werden (anstatt $M^x \neq M^g$).

Beachte $A \leq X(M \cap M^g) \leq X(M) \cap X(M^g) \leq T_0 \cap T_0^g$. Sei o. B. d. A. g derart, daß die Ordnung von $X(M \cap M^g)$ maximal ist. Sei $T_1 := N_{T_0}(X(M \cap M^g))$.

Ist $X(T_1) = X(M \cap M^g)$, so ist $X(M \cap M^g) \trianglelefteq N_{T_0}(T_1)$, also $N_{T_0}(T_1) = T_1 = T_0$, also $X(M \cap M^g) = X(T_0)$ und $X(M \cap M^g) = X(T_0^g)$, also $M = M^g$ im Widerspruch zu oben.

Also ist $X(T_1) > X(M \cap M^g)$ und es existiert $A_1 \in \mathcal{X}(T_1) \setminus \mathcal{X}(M^g)$. Analog findet man ein $A_2 \in \mathcal{X}(N_{T_0^g}(X(M \cap M^g))) \setminus \mathcal{X}(M)$. Ist $Y := \langle A_1, A_2 \rangle$ keine p -Gruppe, so folgt $X = Y$ und $A \leq X(M \cap M^g) \leq O_p(X)$ im Widerspruch zur Konstruktion von X . Also ist Y eine p -Gruppe und es existiert ein $h \in X$ mit $YX(M \cap M^g) \leq T_0^h$. Wegen $X(M \cap M^g) < X(YX(M \cap M^g)) \leq M \cap M^h$ ist $M = M^h$. Analog folgt $M^h = M^g$, also der Widerspruch $M = M^g$. Dies ist (ii).

Sei $N \trianglelefteq X$. Ist $N \not\leq M$, so folgt $X = AN$ aus (ii). Sei also $N \leq M$. Dann ist $X = N_X(T_0 \cap N)N$, also $N_X(T_0 \cap N) \not\leq M$, also $T_0 \cap N$ normal in $\langle A, N_X(T_0 \cap N) \rangle = X$. ■

2.3 „General Nonsense“: Im Beweis von 2.2 (ii) tritt folgendes Prinzip auf:

Sei G nilpotent, $X : L(G) \rightarrow L(G)$ und \preceq eine Ordnungsrelation auf $X(L(G))$ derart, daß X monoton und G -charakteristisch ist, d.h. für $U \leq V \leq G$ gilt $X(U) \preceq X(V)$ und $N_G(U) \leq N_G(X(U))$. Dann gilt $X(U) \prec X(N_G(X(U)))$ oder $X(U) = X(G)$ für alle $U \leq G$.

Beweis: Sei $U \leq G$ mit $X(U) = X(N_G(X(U)))$. Dann ist $N_G(N_G(X(U))) \leq N_G(X(U))$, da X charakteristisch, also $N_G(X(U)) = G$ und damit $X(U) = X(G)$. ■

In 2.2 wird dieses mit der Untergruppenrelation als \preceq durchgeführt, in 6.2 geschieht dies mit $X = J$ und der Thompson-Ordnung als \preceq . $(X, \preceq) = (\text{id}_{L(G)}, \leq)$ zeigt, daß dieser Sachverhalt eine natürliche Verallgemeinerung der bekannten Aussage über nilpotente Gruppen ist.

Operation von $\text{Aut}(SL_2(q))$

Wir benötigen einige Aussagen darüber, wie ein semidirektes Produkt von Automorphismen der $SL_2(q)$ mit der $SL_2(q)$ auf dem natürlichen Modul operiert.

Sei K ein Körper, $|K| = p^n =: q$, $G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in K, ad - bc = 1 \right\}$, $\tau \in \text{Aut}(G) \setminus \text{Inn}(G)$ und $\langle \tau \rangle G$ operiere auf $V := K \times K$ derart, daß G durch Rechtsmultiplikation auf V operiert.

2.4 Lemma: Dann existieren $\sigma \in \text{Aut} K$ und $\nu \in K^* (:= K \setminus \{0\})$, so daß τ unter G konjugiert ist zu

$$\tau_{\nu, \sigma} : G \rightarrow G; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a\sigma & \nu^{-1}(b\sigma) \\ \nu(c\sigma) & d\sigma \end{pmatrix}.$$

Beweis: Nach [Hua] existieren $P \in GL_2(q)$ und $\sigma \in \text{Aut} K$ mit $\tau : G \rightarrow G; A \mapsto P^{-1}A^\sigma P$. Wegen $GL_2(q) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \nu \in K^* \right\} G$ folgt die Behauptung. ■

2.5 Lemma: Sei $\tau = \tau_{\nu, \sigma}$ wie in Lemma 2.4. Dann existiert ein $\lambda \in K$ so, daß τ auf V die Abbildung $(x, y) \mapsto \lambda(\nu(x\sigma), y\sigma)$ induziert.

Beweis: Es gilt $\langle (0, 1) \rangle_{K\tau} = C_V \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \tau = C_V \left(\begin{pmatrix} 1 & \nu^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \langle (0, 1) \rangle_K$. Sei $\lambda \in K$ mit $(0, 1)\tau = \lambda(0, 1)$. Sei $\mu \in K$. Dann gilt

$$(0, \mu)\tau = \left((0, 1) \begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \right) \tau = \lambda(0, 1) \begin{pmatrix} \mu^{-1}\sigma & 0 \\ 0 & \mu\sigma \end{pmatrix} = \lambda(0, \mu\sigma).$$

Mit $(\mu, 0)\tau = \left((0, \mu) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \tau = \lambda(0, \mu\sigma) \begin{pmatrix} 0 & -\nu^{-1} \\ \nu & 0 \end{pmatrix} = \lambda(\nu(\mu\sigma), 0)$ folgt die Behauptung. ■

2.6 Lemma: Sei die Ordnung von τ durch p teilbar. Dann zentriert τ keinen eindimensionalen Teilraum von V .

Beweis: Wegen Lemma 2.4 können wir annehmen, daß $\tau = \tau_{\nu, \sigma}$ (wie dort definiert) ist. Da $|GL_2(q) : G|$ nicht durch p teilbar ist, gilt $\sigma \neq 1$.

Kenntnis von $\text{Aut } K$ liefert ein $i \in \{1, \dots, o(\sigma) - 1\}$ mit $\sigma : K \rightarrow K; k \mapsto k^{|\overline{K}|^{\frac{i}{o(\sigma)}}}$. Die Abbildung $K^* \rightarrow K^*; k \mapsto k^{-1}(k\sigma)$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit $\text{Fix}(\sigma) \setminus \{0\}$ als Kern. Für $k \in K^*$ gibt es daher höchstens $|\text{Fix}(\sigma)| = {}^{o(\sigma)}\sqrt{|\overline{K}|}$ Lösungen der Gleichung $k(x\sigma) = x$ in K (Hauptsatz der Galoistheorie). Die Behauptung folgt damit aus Lemma 2.5. ■

2.7 Lemma: *Ist $o(\tau) = p$, so zentralisiert τ keine p -Sylowgruppe von G .*

Beweis: Angenommen, es existiert $T \in \text{Syl}_p(G)$ mit $[\tau, T] = 1$. Dann wird auch $N_G(T)/C_G(T)$ von τ zentralisiert. Im Fall $p = 2$ ist $C_G(T) = T$, sonst $|C_G(T) : T| = 2$. Da τ teilerfremd auf $N_G(T) : T$ operiert, folgt $\tau \in C(N_G(T)/T)$ auch für $p \neq 2$. $N_G(T)/T$ ist transitiv auf $C_V(T)^\#$ und τ hat nichttriviale Fixpunkte in $C_V(T)$, also $[C_V(T), \tau] = 1$ im Widerspruch zu Lemma 2.6. ■

2.8 Lemma: *Ist $o(\tau) = 2 \neq p$, so zentralisiert τ keine p -Sylowgruppe von G .*

Beweis: Nach 2.4 ist τ konjugiert zu $\tau_{\mu, \text{id}}$ für ein $\mu \in K^*$. $C_G(\tau_{\mu, \text{id}})$ enthält keine p -Sylowgruppe von G . ■

2.9 Hilfssatz: *Sei $p = 2$ und $S \in \text{Syl}_p(G)$. Sei $S \leq U \leq G$. Dann existiert ein Transversal von U in G , (d. h. eine Menge $T \subseteq G$ mit $TU = G$ und $|T||U| = |G|$), das keine Elemente gerader Ordnung enthält.*

Beweis: Es genügt, die Behauptung für $U = S$ zu zeigen, da jedes Transversal von S eines von U als Teilmenge enthält. Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann existiert ein $g \in G$, so daß die Nebenklasse Sg nur Elemente gerader Ordnung enthält. Wegen $G \simeq SL_2(2^n)$ sind dies alles Involutionen, und wegen $(sg)(tg) = (sg)(tg)^{-1} = st = ts = (tg)(sg)$ für alle $s, t \in S$ kommutieren sie paarweise. Damit ist $\langle Sg \rangle$ eine elementarabelsche 2-Untergruppe von G mit echt größerer Ordnung als S , ein Widerspruch. ■

Quadratische Operation

Ein wichtiges Werkzeug der Untersuchung wird quadratische Operation sein. Wir stellen hier das Notwendige zusammen:

Sei V eine elementarabelsche p -Gruppe, auf der eine Gruppe G operiert. Wir nennen diese Operation quadratisch, wenn

$$[V, G, G] = 1$$

gilt. Dann ist auch $\overline{G} := G/C_G(V)$ eine elementarabelsche p -Gruppe ([KS, 9.1.1]).

Sei $A \leq G$. Eine wichtige „Kennzahl“ ist

$$t_V(A) := |A||C_V(A)|.$$

Setze

$$\mathcal{A}_V(G) := \{A \leq G \mid \forall B \leq A : t_V(B) \leq t_V(A) \quad \text{und} \quad \overline{A} \text{ ist abelsche } p\text{-Gruppe}\}.$$

Eine einfache Rechnung ([KS, 9.2.9]) zeigt $\mathcal{A}(G) \subseteq \mathcal{A}_V(G)$, falls $V \trianglelefteq G$ und G durch Konjugation auf V operiert. Ferner gilt

2.10 Bemerkung: Sei $N \trianglelefteq G, N \leq C_V(G)$ und $\tilde{G} := G/N$. Dann ist $\mathcal{A}_V(\tilde{G}) = \mathcal{A}_V(\tilde{G})$.

Beweis: Sei $B \leq A \in \mathcal{A}_V(G)$. Dann gilt

$$t_V(\tilde{B}) = |\tilde{B}||C_V(\tilde{B})| = \frac{|B(A \cap N)||C_V(B(A \cap N))|}{|A \cap N|} \leq \frac{|A||C_V(A)|}{|A \cap N|} = |\tilde{A}||C_V(\tilde{A})| = t_V(\tilde{A}).$$

Sei umgekehrt $A \leq G$ mit $\tilde{A} \in \mathcal{A}_V(\tilde{G})$ und $B \leq AN$. Dann gilt

$$t_V(B) = |B||C_V(B)| \leq |BN||C_V(BN)| = t_V(\tilde{B})|N| \leq t_V(\tilde{A})|N| = t_V(AN),$$

also $AN \in \mathcal{A}_V(G)$. ■

Der folgende Satz ist als „Timmesfeld Replacement Theorem“ bekannt (siehe [KS, 9.2.3 und 9.2.10]):

2.11 Satz: Die Gruppe G operiere auf der elementarabelschen p -Gruppe V . Sei $A \in \mathcal{A}_V(G)$ und $U \leq V$. Dann gilt

$$C_A([U, A]) \in \mathcal{A}_V(G) \quad \text{und} \quad C_V(C_A([U, A])) = [U, A]C_V(A).$$

Gilt $[V, A] \neq 1$, so auch $[V, C_A([U, A])] \neq 1$.

Ist $V \trianglelefteq G$, $A \in \mathcal{A}(G)$ und $A_0 := C_A([V, A])[V, A]$, so gilt

- (i) $A_0 \in \mathcal{A}(G)$.
- (ii) A_0 operiert quadratisch auf V .
- (iii) Ist $[V, A] \neq 1$, so auch $[V, A_0] \neq 1$.
- (iv) $|A/C_A([V, A])| = |C_V(A_0)/C_V(A)|$.

2.12 Lemma: Sei $G \neq 1$ eine Gruppe mit $C_G(O_{p'}(G)) \leq O_{p'}(G)$, die treu auf der elementarabelschen p -Gruppe V operiert. Sei $A \in \mathcal{A}_V(G)$. Dann gilt

- (i) $|A| = |V/C_V(A)|$.
- (ii) Es existieren $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}_V(G)$ mit $A = A_1 \times \dots \times A_k$ und $|A_i| = p$ für $i \in \{1, \dots, k\}$.

Beweis: [KS, 9.3.2] — beachte, daß die im ganzen Abschnitt gültige Voraussetzung \mathcal{S}_3 hier noch nicht benötigt wird. ■

Hieraus läßt sich die folgende Aussage herleiten, die Kern der Charakterisierung der p -separablen, nicht Thompson-faktorierbaren Gruppen ist:

2.13 Satz (Glauberman): Sei $G \neq 1$ eine endliche Gruppe, die treu auf der elementarabelschen p -Gruppe V operiert. Es gelte $C_G(O_{p'}(G)) \leq O_{p'}(G)$ und $G = \langle \mathcal{A}_V(G) \rangle$. Dann existieren $E_1, \dots, E_r \leq G$, so daß gilt

- (i) $p \in \{2, 3\}$.

(ii) $G = E_1 \times \dots \times E_r$ und $V = C_V(G) \times [V, E_1] \times \dots \times [V, E_r]$.

(iii) $|[V, E_i]| = p^2$ und $E_i = SL([V, E_i])$ für $i \in \{1, \dots, r\}$.

Beweis: [KS, 9.3.7]. ■

2.14 Lemma: Sei G auflösbar und V ein elementarabelscher p -Normalteiler von G mit $O_p(G/C_G(V)) = 1$. Dann gilt $[\Omega_1(Z(J(C_G(V))))], J(G)] \leq V$.

Beweis: [KS, 9.3.9]. ■

2.15 Satz (Aschbacher–Timmesfeld): Die Gruppe G mit $O_p(G) = 1$ operiere treu auf der elementarabelschen p -Gruppe V . Dann normalisieren die Elemente von $\mathcal{A}_V(G)$ die Komponenten von G .

Beweis: [PGV] ■

Lokale Charakteristik

Eine Gruppe G habe **Charakteristik** p , falls $C_G(O_p(G)) \leq O_p(G)$ gilt. G habe **lokale Charakteristik** p , falls alle p -**lokalen Untergruppen** (d. h. Gruppen der Gestalt $N_G(Q)$ für eine p -Gruppe $Q \neq 1$) von G Charakteristik p besitzen.

2.16 Bemerkung: G habe Charakteristik p . Sei $N \trianglelefteq G$. Dann hat N Charakteristik p . Insbesondere haben die Zentralisatoren nichttrivialer p -Gruppen Charakteristik p , falls G lokale Charakteristik p besitzt.

2.17 Lemma: Sei V ein elementarabelscher p -Normalteiler von G mit $V = \langle C_V(S) \mid S \in \text{Syl}_p(G) \rangle$. Dann ist $O_p(G/C_G(V)) = 1$. Die Voraussetzungen sind insbesondere erfüllt, wenn G Charakteristik p besitzt und $V = \langle \Omega_1(Z(S)) \mid S \in \text{Syl}_p(G) \rangle$ ist.

Beweis: [KS, 9.2.6 und 9.2.7]. ■

Schließlich rechnet schnell nach:

2.18 Hilfssatz: Sei $n \in \mathbf{N}$ und $D \subseteq S_n$ eine Konjugiertenklasse von Involutionen mit

$$(*) \quad \forall d, e \in D : o(de) \in \{1, 2, 3\}.$$

Dann ist $D = (12)^{S_n}$ oder $n = 4$ und $D = (12)(34)^{S_4}$ oder $n = 6$ und $D = (12)(34)(56)^{S_6}$.

Beweis: Bekanntermaßen sind zwei Elemente der S_n genau dann konjugiert, wenn sie denselben Zykeltyp besitzen.

Sei $D \neq (12)^{S_n}$. Dann existiert $m \in \mathbf{N}_{\geq 2}$ mit $x := \prod_{i=1}^m (2i-1 \ 2i) \in D$. Es gilt $2m = n$, da andernfalls $y = \prod_{i=1}^m (2i \ 2i+1) \in D$ ist und $xy = (1 \ 3 \ \dots \ 2m+1 \ 2m \ 2m-2 \ \dots \ 2)$ Ordnung $2m+1$ hat. Auch $z := (1 \ 2m) \prod_{i=1}^{m-1} (2i \ 2i+1)$ liegt in D , und $xz = (1 \ 3 \ \dots \ 2m-1)(2m \ 2m-2 \ \dots \ 2)$ hat Ordnung m . Wegen (*) ist $n = 4$ oder $n = 6$ und D wie behauptet. ■

2.19 Bemerkung: (Z) ist gleichwertig zu $N_G(Z) \subseteq N_G(S)$.

Beweis: Gelte (Z) . Dann liefert das Frattini–Argument $N_G(Z) = N_G(S)C_G(Z) \subseteq N_G(S)$. ■

3 Eine zentrale Situation

Generalvoraussetzung: Von nun an sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl. Sei $O_p(G) = 1$, $1 \neq S \in \text{Syl}_p(G)$ und $Z := \Omega_1(Z(S))$. Es gelte

(C) für alle Elemente t der Ordnung p ist $C_G(t)$ auflösbar und

(Z) $C_G(\Omega_1(Z(S))) \leq N_G(S)$ für $S \in \text{Syl}_p(G)$.

3.1 Situation: Die folgende Situation spielt im späteren Teil der Arbeit eine zentrale Rolle:

$$\begin{aligned} L &\leq G \\ T := S \cap L &\in \text{Syl}_p(L) \\ J := J(T) &\not\leq O_p(L) \\ Z &\leq O_p(L) \\ V &:= \langle Z^L \rangle \quad (\leq \Omega_1(Z(O_p(L)))) \\ C &:= C_L(V) \\ \bar{L} &:= L/C. \end{aligned}$$

Konvention: Im folgenden arbeiten wir überwiegend in der Faktorgruppe $\bar{L} := L/C_L(V)$. Untergruppen von \bar{L} bezeichnen wir durchgehend mit Querstrich-Buchstaben (bspw. \bar{X}). Soweit keine Mißverständnisse zu befürchten sind, soll dann mit X das volle Urbild von \bar{X} in L bezeichnet sein.

3.2 Bemerkung: Sei $L \leq G$, $T = S \cap L \in \text{Syl}_p(L)$ und $J(T) \not\leq O_p(L)$. Hat G lokale Charakteristik p und ist L eine p -lokale Untergruppe von G , so erfüllt (L, T) die Situation 3.1.

Beweis: Sei $L = N_G(Q)$ für eine nichttriviale p -Gruppe Q . Dann ist $C_G(O_p(L)) \leq C_G(Q) \leq N_G(Q) = L$, also $C_G(O_p(L)) = C_L(O_p(L)) \leq O_p(L)$. $C_G(O_p(L)) \leq O_p(L)$ liefert $Z \leq O_p(L)$. ■

Die Analyse von Situation 3.1 in folgenden Satz liefert zwei unterschiedliche Fälle, abhängig davon, ob $J(L)$ auflösbar ist oder nicht. Der eine Fall wird im nächsten Kapitel nichtauflösbare $J(T)$ -Komponenten liefern, aus dem anderen gewinnen wir im darauffolgenden Kapitel auflösbare $J(T)$ -Komponenten.

3.3 Satz: In der Situation 3.1 gilt entweder

(i) $\bar{J}(\bar{L})$ ist auflösbar und wie in 2.13 beschrieben, oder

(ii) $\bar{J}(\bar{L})$ ist nicht auflösbar, und es existiert genau ein $\bar{K} \in \text{Comp}(\bar{L})$ mit $[\bar{K}, \bar{J}] \neq 1$. Es gilt $\bar{J}(\bar{L}) = [\bar{K}, \bar{J}] = \bar{K} \simeq SL_2(p^n)$ und V natürlicher Modul zu \bar{K} . Für alle $B \in \mathcal{A}(T) \setminus \mathcal{A}(O_p(L))$ gilt $\bar{B} \in \text{Syl}_p(\bar{K})$. Ferner ist $\mathcal{A}(O_p(L)) \subseteq \mathcal{A}(T)$, $V = \Omega_1(Z(O_p(L))) = \Omega_1(Z(J(O_p(L))))$ und $|V : \Omega_1(Z(J(T)))| = p^n$.

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall, daß für alle $\bar{K} \in \text{Comp}(\bar{L})$ gilt $[\bar{K}, \bar{J}] = 1$.

\bar{J} operiert treu auf $F^*(\bar{L})$, da $C_{\bar{J}}(F^*(\bar{L})) \leq O_p(Z(F^*(\bar{L}))) = 1$, also auch auf $F(\bar{L})$. Insbesondere gilt für $1 \neq \bar{A} \in \bar{\mathcal{A}}(\bar{T})$, $\bar{H} := \bar{A}F(\bar{L})$ schon $C_{\bar{H}}(O_{p'}(\bar{H})) = C_{\bar{H}}(F(\bar{L})) \leq F(\bar{L}) = O_{p'}(\bar{H})$. Also folgt aus 2.12, daß \bar{A} von Elementen erzeugt wird, die Transvektionen auf V induzieren. Also ist $\bar{J}(\bar{L})$ von Transvektionen erzeugt; bezeichne mit \mathcal{T} die Menge aller x mit $\bar{x} \in \bar{J}(\bar{L})$, die eine Transvektion auf V induzieren.

Sei $1 = V_0 < V_1 < \dots < V_r = V$ eine $\overline{J(L)}$ -invariante Kette, so daß V_i/V_{i+1} ein irreduzibler $\overline{J(L)}$ -Modul ist für $i \in \{1, \dots, r\}$. Für $t \in \mathcal{T}$ existiert höchstens ein $i \in \{1, \dots, r\}$ mit $[V_i/V_{i+1}, t] \neq 1$, also genau eines, denn für $D := \bigcap_{i \in \{1, \dots, r\}} C_{J(L)}(V_i/V_{i+1})$ gilt $\overline{D} \leq O_p(\overline{J(L)}) = 1$, also $D \leq C$. Setze $E_i := \langle t \in \mathcal{T} \mid [V_i/V_{i+1}, t] \neq 1 \rangle, i \in \{1, \dots, r\}$. Für $i, j \in \{1, \dots, r\}, i \neq j$ gilt $E_i \cap E_j \leq D \leq C$, $\overline{E}_i \trianglelefteq \overline{J(L)}$ und $\overline{J(L)} = \langle \overline{E}_i \mid i \in \{1, \dots, r\} \rangle$, also $\overline{J(L)} = \overline{E}_1 \times \dots \times \overline{E}_r$. Nach Voraussetzung ist $\text{Comp}(\overline{J(L)}) = \emptyset$, also folgt mit [L1, L2] $\overline{E}_i \simeq SL_2(2)$ oder $\overline{E}_i \simeq SL_2(3)$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$. Damit ist $\overline{J(L)}$ auflösbar und die Behauptung folgt aus 2.13.

Also können wir annehmen, daß $\overline{K} \in \text{Comp}(\overline{L})$ existiert mit $[\overline{J}, \overline{K}] \neq 1$. Nach Satz 2.15 normalisiert \overline{J} die Komponente \overline{K} . Damit gilt $[\overline{K}, \overline{J}] \leq Z(\overline{K})$ oder $[\overline{K}, \overline{J}] = \overline{K}$. Im ersten Fall folgt $[\overline{J}, \overline{K}, \overline{K}] = 1$ und mit dem 3-Untergruppen-Lemma $[\overline{K}, \overline{J}] = [\overline{K}, \overline{K}, \overline{J}] = 1$. Daher gilt

$$(1) \quad [\overline{K}, \overline{J}] = \overline{K}.$$

Setze $\overline{H} := \overline{K}\overline{J}$, $U := \langle Z^H \rangle$ und $\tilde{H} := \overline{H}/C_{\overline{H}}(U)$. Nach Definition von U und 2.17 ist

$$(2) \quad O_p(\tilde{H}) = 1.$$

Setze

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 &:= \{ \tilde{A} \leq \tilde{H} \mid \tilde{A} \neq 1 = [U, \tilde{A}, \tilde{A}] \}, \\ \mathcal{M}_1 &:= \{ \tilde{A} \in \mathcal{M}_0 \mid \forall \tilde{B} \in \mathcal{M}_0 : t_U(\tilde{A}) \geq t_U(\tilde{B}) \} \quad \text{und} \\ \mathcal{M}_2 &:= \{ \tilde{A} \in \mathcal{M}_1 \mid \forall \tilde{B} \in \mathcal{M}_1 : |\tilde{A}| \leq |\tilde{B}| \}. \end{aligned}$$

Für die Definition von $t_U(\tilde{A})$ siehe Kapitel 2. $J(T)$ operiert nichttrivial auf U (sonst wäre auch $H = \langle J(T)^H \rangle$ trivial auf U im Widerspruch zu (C)), also existiert ein $A \in \mathcal{A}(T)$ mit $[U, A] \neq 1$. Nach Ergebnissen von Timmesfeld (2.11) operiert $C_A([U, A])$ nichttrivial (und offenbar quadratisch) auf U . Also $\mathcal{M}_0 \neq \emptyset$, und damit auch $\mathcal{M}_1 \neq \emptyset$ und

$$(3) \quad \mathcal{M}_2 \neq \emptyset.$$

Ferner gilt wegen $C_A([U, A])[U, A] \in \mathcal{A}(T) \subseteq \mathcal{A}_U(T)$

$$(4) \quad \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{A}_U(\tilde{H}).$$

Sei $\tilde{A} \in \mathcal{M}_2$. Wegen $O_p(\tilde{H}) = 1$ existieren \tilde{h}, \tilde{X} und \tilde{M} entsprechend Hilfssatz 2.2. Nach Konjugation in \tilde{H} kann $\tilde{A} \leq \tilde{T} \cap \tilde{X} \in \text{Syl}_p(\tilde{X})$ angenommen werden. Es gilt

$$(5) \quad Z \leq C_U(O_p(\tilde{X})) =: W.$$

Sei $\tilde{N} := C_{\tilde{X}}(W)$ und $\check{X} := \tilde{X}/\tilde{N}$. Sei $|\check{A}| = p^n$.

(i) Dann ist $\tilde{N} \leq \tilde{M}$, und damit $\check{A} \neq 1$: Andernfalls ist $\tilde{X} = \tilde{A}\tilde{N}$, also $X \leq \langle T, C_X(W) \rangle \leq C_L(Z) \leq N_G(T)$ p -abgeschlossen, ein Widerspruch zu $\tilde{X} = \langle \tilde{A}, \tilde{A}^h \rangle$.

(ii) Es ist $O_p(\check{X}) = 1$: Sei \tilde{Y} das volle Urbild von $O_p(\check{X})$ in \tilde{X} . Dann ist $\tilde{Y} \leq (\tilde{T} \cap \tilde{X})N \leq \tilde{M}$. Nach Hilfssatz 2.2 ist \tilde{Y} p -abgeschlossen. Wegen $O_p(\tilde{X}) \leq \tilde{N}$ ist $O_p(\check{X}) = 1$.

(iii) Setze $\widehat{W} := W/C_W(O^p(\check{X}))$. Dann ist $C_{\widehat{W}}(O^p(\check{X})) = 1$: Sei $R \leq W$ mit $\widehat{R} = C_{\widehat{W}}(O^p(\check{X}))$. Dann ist $[R, O^p(\check{X}), O^p(\check{X})] = 1$, also $[R, O^p(\check{X})] = 1$ und damit $\widehat{R} = 1$.

(iv) Es gilt $|\check{A}| \geq |\widehat{W}/C_{\widehat{W}}(\check{A})|$: Da $\check{A} \in \mathcal{M}_1$ ist $|\check{A}|C_U(\check{A}) = t_U(\check{A}) \geq t_U(\check{A} \cap \check{N}) = |\check{A} \cap \check{N}|C_U(\check{A} \cap \check{N})$, also $|\check{A}| \geq |C_U(\check{A} \cap \check{N})/C_U(\check{A})| \geq |C_W(\check{A} \cap \check{N})/C_W(\check{A})| = |W/C_W(\check{A})| \geq |\widehat{W}/C_{\widehat{W}}(\check{A})|$.

(v) \check{X} operiert treu auf \widehat{W} : Sei $\check{x} \in C_{\check{X}}(\widehat{W})$ ein p' -Element. Dann ist $[\widehat{W}, \check{x}] = 1$ und $[C_W(O^p(\check{X})), \check{x}] = 1$, also $[W, \check{x}] = 1$, d. h. $\check{x} = 1$. Damit ist $C_{\check{X}}(\widehat{W}) \leq O_p(\check{X}) = 1$.

Mit (i) bis (v) sowie Hilfssatz 2.2 erfüllen \check{X} und \widehat{W} die Voraussetzungen von Satz 2.1. Also ist

$$(6) \quad \check{X} \simeq SL_2(p^n).$$

Ist $p^n \notin \{2, 3\}$, so ist \check{X} nicht auflösbar, also $C_W(O^p(\check{X})) = 1$. Andernfalls ist $O^p(\check{X}) = O_{p'}(\check{X})$, also $W = C_W(O^p(\check{X})) \times [W, O^p(\check{X})]$. In beiden Fällen existiert mit W bzw. $[W, O^p(\check{X})]$ ein \check{X} -Teilmodul von U , der natürlicher Modul zu \check{X} ist.

Sei $W_0 \leq U$ dieser natürliche \check{X} -Modul. Es gilt $|C_{W_0}(\check{A} \cap \check{N})| = |W_0| = p^{2n}$ und $|C_{W_0}(\check{A})| = p^n$. Damit ist $t_U(\check{A} \cap \check{N}) = |\check{A} \cap \check{N}|C_U(\check{A} \cap \check{N}) \geq p^{-n}|\check{A}|p^n|C_U(\check{A})| = t_U(\check{A})$. Wäre $\check{A} \cap \check{N} \neq 1$, so wäre $\check{A} \cap \check{N} \in \mathcal{M}_1$ und $|\check{A} \cap \check{N}| < |\check{A}|$ im Widerspruch zu $\check{A} \in \mathcal{M}_2$.

\check{N} ist nach Hilfssatz 2.2 p -abgeschlossen, also ist

$$(7) \quad C_{\check{A}}(W) = \check{A} \cap \check{N} = \check{A} \cap O_p(\check{X}) = 1.$$

Der nichtauflösbare Fall

In diesem Abschnitt sei \check{X} nicht auflösbar, also ist $p^n \notin \{2, 3\}$ und W der natürliche Modul zu \check{X} .

Es gilt $|\check{A}| = |W/C_W(\check{A})| \leq |U/C_U(\check{A})| \leq |\check{A}|$, da $\check{A} \in \mathcal{A}_U(\check{H})$. Damit ist $|U : C_U(\check{A})| = p^n$. Da \check{X} nicht auflösbar, ist $C_U(\check{A}) \cap C_U(\check{A}^h) = 1$ und somit $|U| = p^{2n}$, d. h.

$$(8) \quad U = W \text{ ist natürlicher Modul zu } \check{X} \simeq SL_2(p^n).$$

Sei $\tilde{T}_0 \in \text{Syl}_p(\check{H})$ mit $\check{A} \leq \tilde{T}_0$. Wir wollen zeigen, daß dann kein weiteres Konjugiertes von \check{A} unter \tilde{T}_0 liegt.

Angenommen, es existiert $\tilde{g} \in \check{H}$ mit $\check{A} \neq \check{A}^{\tilde{g}} \leq \tilde{T}_0$. Ist $\check{A} \not\leq \tilde{T}_0$, so sei o. B. d. A. $\tilde{g} \in N_{\tilde{T}_0}(N_{\tilde{T}_0}(\check{A}))$. Damit ist $[\check{A}, \check{A}^{\tilde{g}}] \leq \check{A} \cap \check{A}^{\tilde{g}}$. Analog erreicht man dies im Fall $\check{A}^{\tilde{g}} \not\leq \tilde{T}_0$, also kann $[\check{A}, \check{A}^{\tilde{g}}] \leq \check{A} \cap \check{A}^{\tilde{g}}$ angenommen werden.

Sei $v \in C_U(\check{A}^{\tilde{g}})$. Angenommen, $v \notin C_U(\check{A})$. Dann ist $C_U(\check{A}) = [v, \check{A}] \leq [C_U(\check{A}^{\tilde{g}}), \check{A}] \leq C_U(\check{A}^{\tilde{g}})$, also folgt aus Mächtigkeitsgründen der Widerspruch $C_U(\check{A}) = C_U(\check{A}^{\tilde{g}})$.

Damit operiert $\check{A} \check{A}^{\tilde{g}}$ quadratisch auf U , und aus $\check{A} \in \mathcal{M}_1$ folgt $|\check{A} \check{A}^{\tilde{g}}| \leq |\check{A}|$, also der Widerspruch $\check{A}^{\tilde{g}} = \check{A}$. Somit gilt

$$(9) \quad \text{Jede Sylowgruppe von } \check{H} \text{ enthält nur ein Konjugiertes von } \check{A}.$$

Da \tilde{X} nicht auflösbar, ist $\tilde{X} \leq O^p(\tilde{H}) = \tilde{K}$. Angenommen, es existiert $\tilde{g} \in \tilde{H}$ mit $\tilde{B} := \tilde{A}^{\tilde{g}} \not\leq \tilde{X}$. Es ist $U = \bigcup_{x \in \tilde{X}} C_U(\tilde{A}^x)$, also existiert ein $\tilde{x} \in \tilde{X}$ mit $C_U(\tilde{A}^{\tilde{x}}) \cap C_U(\tilde{B}) \neq 1$. Nach (9) ist $\tilde{X}_0 := \langle \tilde{A}^{\tilde{x}}, \tilde{B} \rangle$ keine p -Gruppe, also existiert nach Hilfssatz 2.2 und analog zu (6) ein $\tilde{X}_1 \leq \tilde{X}_0$ mit $\tilde{X}_1 \simeq SL_2(p^n)$, das transitiv auf U operiert. Ein Widerspruch, da $C_U(\tilde{X}_1) \geq C_U(\tilde{A}^{\tilde{x}}) \cap C_U(\tilde{B}) \neq 1$.

Also ist $1 \neq \tilde{X} = \langle \tilde{A}^{\tilde{H}} \rangle \trianglelefteq \tilde{K}$, also

$$(10) \quad \tilde{X} = \tilde{K}.$$

Da \tilde{K} von \tilde{J} normalisiert wird, ist $C_{\tilde{J}}(\tilde{K}) \leq O_p(\tilde{H}) = 1$, also \tilde{J} treu auf \tilde{K} .

Angenommen, es ist $\tilde{J} \not\leq \tilde{K}$. Sei $B \in \mathcal{A}(T) \setminus \mathcal{A}(K)$ und $x \in B$ mit $\tilde{x} \notin \tilde{K}$. Die p -Sylowgruppen von $\text{Out } \tilde{K}$ sind zyklisch, also gilt $|\tilde{B}\tilde{K} : \tilde{K}| = p$. Nach Lemma 2.6 ist $|C_U(\tilde{B})| \leq |C_U(\tilde{x})| \leq p^{2n-2}$. $C_H(U)$ ist p -abgeschlossen nach (Z), also gilt

$$(*) \quad |\tilde{B}\tilde{K} : \tilde{K}| |\tilde{B} \cap \tilde{K}| |(B \cap O_p(H)) : U| |C_U(\tilde{B})| = |B| \geq |(B \cap O_p(H))U| = |(B \cap O_p(H)) : U| |U|,$$

und damit $\tilde{B} \cap \tilde{K} \neq 1$. $C_U(\tilde{B} \cap \tilde{K})$ ist ein eindimensionaler $GF(p^n)$ -Teilraum von U , mit Lemma 2.6 ist $|C_U(\tilde{B})| \leq p^{n-1}$ und aus (*) folgt $\tilde{B} \cap \tilde{K} \in \text{Syl}_p(\tilde{K})$ im Widerspruch zu Lemma 2.7. Also ist $\tilde{J} \leq \tilde{K}$.

Sei $B \in \mathcal{A}(T) \setminus \mathcal{A}(O_p(H))$. Dann gilt in (*) Gleichheit, es folgt $\mathcal{A}(O_p(H)) \subseteq \mathcal{A}(T)$ und $\tilde{B} \in \text{Syl}_p(\tilde{K})$. Aus ersterem folgt $\Omega_1(Z(J(T))) \leq \Omega_1(Z(J(O_p(H))))$, aus (*) folgt $|\Omega_1(Z(J(O_p(H)))) : \Omega_1(Z(J(O_p(H)))) \cap B| = p^n$. Sei $l \in H$ mit $X := \langle B, B^l \rangle$ nicht auflösbar. Dann ist $|\Omega_1(Z(J(O_p(H)))) : C_{\Omega_1(Z(J(O_p(H))))}(X)| \leq p^{2n}$, also $\Omega_1(Z(J(O_p(H)))) = U$ wegen (C). Aus $V \leq \Omega_1(Z(O_p(H))) \leq \Omega_1(Z(J(O_p(H))))$ folgt $U = V$, also insbesondere $\bar{J} \leq \bar{K}$ und V ist natürlicher Modul zu \bar{K} . Sei \bar{K}_1 eine weitere Komponente von \bar{L} mit $[\bar{J}, \bar{K}] \neq 1$. Dann ist ebenfalls $\bar{J} \in \text{Syl}_p(\bar{K}_1)$ und $\bar{K}_1 \simeq SL_2(p^n)$, also $\bar{K}_1 = \bar{K}$.

Es gilt $\bar{K} = [\bar{K}, \bar{J}] \leq \langle \bar{J}^{\bar{K}} \rangle \leq \overline{J(L)}$, aus $\bar{J} \leq K$ folgt $\bar{K} = \overline{J(L)}$. Dies zeigt die Behauptung im nichtauflösbaren Fall.

Der Transvektionen-Fall

In diesem Abschnitt ist $p^n \in \{2, 3\}$, d.h. $|\tilde{A}| = |U/C_U(\tilde{A})| = p$. Also induziert $\tilde{A} = \langle \tilde{a} \rangle$ eine Transvektion auf U . Setze $\tilde{Y} := \langle \tilde{A}^{\tilde{H}} \rangle$. Dann gilt

$$(11) \quad \tilde{K} \leq \tilde{Y} :$$

Andernfalls ist $\tilde{Y} \cap \tilde{K} \leq Z(\tilde{K})$, also $[\tilde{Y}, \tilde{K}, \tilde{K}] = 1$ und $\tilde{K}' = \tilde{K}$ zentralisiert \tilde{Y} . Dies kann nicht sein, $\tilde{A} \leq \tilde{Y}$, $O^p(\tilde{H}) = \tilde{K}$ und $[\tilde{A}, O_{p'}(\tilde{X})] \neq 1$ gelten.

Sei $W \leq U$ ein minimaler \tilde{Y} -Modul. Wegen (C) und (11) operiert \tilde{Y} nichttrivial auf W . Daher ist $1 \neq \tilde{Y}_0 := \langle \tilde{a}^h | [W, \tilde{a}^h] \neq 1 \rangle \trianglelefteq \tilde{Y}$. Sei $\tilde{N} := C_{\tilde{Y}}(W)$. $\tilde{N} \cap \tilde{Y}_0$ zentralisiert U/W und W , also ist $\tilde{N} \cap \tilde{Y}_0 \leq O_p(\tilde{Y}) \leq O_p(\tilde{H}) = 1$. Also ist $\tilde{Y} = \tilde{Y}_0 \times \tilde{N}$, und wegen (C) ist

$$(12) \quad \tilde{K} \leq \tilde{Y}_0 \text{ und } m := \dim W \geq 2.$$

Wir betrachten \tilde{Y}_0 als Untergruppe von $SL(W)$. O. B. d. A. können wir $\tilde{a} \in \tilde{Y}_0$ und $\tilde{S}_0 := S \cap \tilde{Y}_0 \in \text{Syl}_p(\tilde{Y}_0)$ annehmen. Aus $O_p(\tilde{Y}_0) = 1$ und [L1, L2] folgt, daß einer der folgenden Fälle gilt:

- (i) $\tilde{Y}_0 = SL(W)$,
- (ii) $\tilde{Y}_0 = Sp(W)$ und $m \geq 4$,
- (iii) $\tilde{Y}_0 = SO^{-1}(W)$, $m \geq 4$ und $p = 2$,
- (iv) $\tilde{Y}_0 = SO^{+1}(W)$, $m \geq 6$ und $p = 2$,
- (v) $\tilde{Y}_0 \simeq S_{m+1}, S_{m+2}$, $m \geq 4$, $p = 2$ und $\tilde{Y}_0 \leq Sp(W)$.

Wir zeigen, daß alle diese Fälle zu einem Widerspruch führen.

Sei zuerst $\tilde{Y}_0 = SL(W)$ angenommen. Ist $m \geq 4$, so existiert eine zu $SL_{m-1}(p)$ isomorphe Untergruppe von \tilde{Y}_0 , die einen eindimensionalen Teilraum von W zentralisiert. Wegen (C) ist $m = 3$ (der Fall $m = 2$ tritt nicht auf, da \tilde{Y}_0 nicht auflösbar ist und $p^n \in \{2, 3\}$).

Dann existiert eine Basis von W , bezüglich der \tilde{a} die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat und es gibt Elemente $\tilde{b}, \tilde{c} \in \tilde{Y}_0$ mit Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

respektive. \tilde{b} und \tilde{c} sind in \tilde{Y}_0 zu \tilde{a} konjugiert. Es ist $\tilde{Y} := \langle \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \rangle$ nicht auflösbar und $|U| = |U : C_U(\tilde{Y})| \leq 3$. Also ist $W = U$.

Wegen $Z \leq U$ ist Z entweder ein Punkt oder eine Gerade der zu U gehörigen projektiven Ebene. Die Punkt- und Geradenstabilisatoren in der $L_3(p)$ enthalten eine zu $L_2(p)$ isomorphe Untergruppe, also ist $N_{\tilde{Y}}(Z)$ nicht p -abgeschlossen im Widerspruch zu (Z).

Sei $\tilde{Y}_0 = Sp(W)$. Ist $m \geq 6$, so existiert in \tilde{Y}_0 eine zu $Sp_{m-2}(2)$ isomorphe Untergruppe, die eine hyperbolische Ebene in W zentralisiert. Widerspruch zu (C). Sei also $m = 4$. Ist $p = 2$, so ist $\tilde{Y}_0 \simeq S_6$, diesen Fall behandeln wir gesondert.

Sei also $\tilde{Y}_0 \simeq Sp_4(3)$ und sei \tilde{z} die zentrale Involution. Dann ist $U = [U, \tilde{z}] \times C_U(\tilde{z})$. Es gilt $W \leq [U, \tilde{z}]$. \tilde{Y}_0 zentralisiert $[U, \tilde{z}]/W$, also ist $[U, \tilde{z}] = [U, \tilde{z}, \tilde{z}] \leq W$. Damit ist $C_U(\tilde{z})$ isomorph zu U/W als \tilde{Y}_0 -Modul, also ist $C_U(\tilde{z}) \leq C_U(\tilde{Y}_0) = 1$ wegen (C), d.h. $U = W$.

Bezeichne mit (\cdot, \cdot) die zu U gehörige symplektische Bilinearform. Dann existieren $v_1, v_2, v_3, v_4 \in U$ derart, daß $U = \langle v_1, v_2 \rangle \perp \langle v_3, v_4 \rangle$ ist mit $(v_1, v_2) = (v_3, v_4) = 1$ und $\tilde{S}_0 = \{\sigma \in \tilde{Y}_0 \mid \exists a, b, c, d \in GF(3) : v_1\sigma = v_1, v_2\sigma = dv_1 + v_2 + (b-ac)v_3 - av_4, v_3\sigma = av_1 + v_3, v_4\sigma = bv_1 + cv_3 + v_4\}$. Es gilt $C_U(\tilde{S}_0) = \langle v_1 \rangle$, also $Z = \langle v_1 \rangle$. Damit ist $C_G(Z)$ nicht 3-abgeschlossen, da $SL(\langle v_3, v_4 \rangle) \leq C_{\tilde{Y}_0}(Z)$.

Sei also in den verbleibenden Fällen $p = 2$. Sei $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ und $\tilde{Y}_0 = SO^\varepsilon(W)$. Ist $m \geq 6$ und $v \in W$ ein nichtsingulärer Vektor, dann operiert $(\tilde{Y}_0)_{\langle v \rangle}$ als $Sp_{m-2}(2)$ auf $v^\perp / \langle v \rangle$ (vgl. [A, 22.5]), ein Widerspruch zu (C). Ist $m = 4$, so $\tilde{Y}_0 \simeq SO_4^-(2) \simeq S_5$, diesen Fall betrachten wir in den nächsten Absätzen.

Sei $i \in \{1, 2\}$ und $\tilde{Y}_0 \simeq S_{m+i}$. Sei $\sigma : \tilde{Y}_0 \rightarrow S_{m+i}$ Isomorphismus.

Wir bestimmen zunächst den Zykeltyp von $\tilde{a}\sigma$: S_{m+i} ist transitiv auf der Menge aller Permutationen vom Zykeltyp von $\tilde{a}\sigma$, also sind die Urbilder dieser Permutationen Transvektionen. Das Produkt zweier solcher Transvektionen hat Ordnung 1, 2 oder 3. Nach Hilfssatz 2.18 hat $\tilde{a}\sigma$ den Zykeltyp von (12) oder es ist $m+i=6$ und $\tilde{a}\sigma$ hat den Typ von (12)(34)(56). Im zweiten Fall existiert ein Automorphismus der S_6 , der die Involutionen vom zweiten Typ auf die vom Typ von (12) abbildet. Also können wir annehmen, daß $\tilde{a}\sigma$ den Zykeltyp von (12) besitzt.

$\tilde{Y}_1 := \langle (i \ i+1)\sigma^{-1} \mid i \in \{1, \dots, 4\} \rangle$ ist eine zu S_5 isomorphe Untergruppe von \tilde{Y}_0 mit $|W/C_W(\tilde{Y}_1)| \leq 2^4$, wegen (C) ist $W = U$ und $m = 4$.

Im Fall $i = 1$ ist $\tilde{Y}_0 \simeq S_5$. In \tilde{Y}_0 existiert eine Transvektion τ mit $\tilde{Y}_0 = \langle \tau, \tilde{S}_0 \rangle$. Daher ist $C_U(\tilde{S}_0)$ eindimensional, d.h. $C_U(\tilde{S}_0) = Z$. Sei \tilde{Q} die eindeutig bestimmte, zu S_4 isomorphe Untergruppe von \tilde{Y}_0 mit $\tilde{S}_0 \leq \tilde{Q}$. \tilde{Q} wird von drei Transvektionen erzeugt, also ist $C_U(\tilde{Q})$ eindimensional und damit $\tilde{Q} \leq C_{\tilde{Y}_0}(Z)$ im Widerspruch zu (Z).

Sei daher $i = 2$. Wegen $\dim U = 4$ gibt es höchstens 35 Konjugierte von Z in U (dies im Fall $\dim Z = 2$). Damit ist $N_{\tilde{Y}_0}(Z) > N_{\tilde{Y}_0}(\tilde{S}_0)$ und daher $N_G(Z)$ nicht 2-abgeschlossen (statt dem Abzählargument wäre natürlich auch ein Argument analog zum vorigen Absatz möglich gewesen). ■

4 Nichtauflösbare $J(T)$ -Komponenten

In diesem Kapitel führen wir den Begriff der nichtauflösbaren $J(T)$ -Komponente ein, und zeigen, wie man aus dem nichtauflösbaren Fall in Satz 3.3 solche gewinnt. Wir werden auch sehen, daß gewisse nichtauflösbare $J(T)$ -Komponenten wieder zu Situation 3.1 führen, was ihre Struktur stark einschränkt.

Sei $T \leq G$ eine p -Gruppe.

4.1 Definition: Sei $\mathcal{K}_n(T)$ die Menge aller Untergruppen K von G mit

- (i) $K \trianglelefteq [K, J(T)]$,
- (ii) $\exists T_0 \in \text{Syl}_p(\langle K, J(T) \rangle) : J(T_0) = J(T)$,
- (iii) $K = O^p(K)$,
- (iv) $K/O_p(K)$ ist quasiainfach und
- (v) $O_p(K) \not\leq Z(K)$.

Ein solches K heiße nichtauflösbare $J(T)$ -Komponente von G , setze $W_K := \Omega_1(Z(O_p(K)))$.

4.2 Bemerkung: Sei $K \in \mathcal{K}_n(T)$ und $L := \langle K, J(T) \rangle$. Dann gilt

- (i) $O_p(K) \neq 1$,
- (ii) K operiert nichttrivial auf allen K -invarianten p -Untergruppen von G , insbesondere ist $Z(K) \cap O_p(K) = 1$,
- (iii) $L = J(L)$, insbesondere operiert $J(T)$ nichttrivial auf allen p -Normalteilern von L ,
- (iv) $K = [K, J(T)]$, d.h. K ist normal in L ,
- (v) $K = O^p(L)$.
- (vi) Sei $Q \leq G$ mit $KJ(T) \leq N_G(Q)$ und $Q \leq N_G(J(T))$. Dann gilt $Q \leq N_G(K)$.

Beweis: (i) folgt aus Def. 4.1 (v), (ii) ist eine triviale Konsequenz aus (C) und (v) folgt aus (iv).

Zu (iii): Wegen 4.1 (i) bzw. (ii) gilt $K \leq [K, J(T)] \leq [K, J(L)] \leq J(L)$ und $J(T) \leq J(L)$. Wird ein p -Normalteiler $N \trianglelefteq L$ von $J(T)$ zentralisiert, so auch von $\langle J(T)^L \rangle = L$ im Widerspruch zu (ii).

Zu (iv): Sei $T_0 \in \text{Syl}_p(L)$. Setze $V = \langle (\Omega_1(Z(T_0)) \cap O_p(L))^L \rangle$. Wegen $K \trianglelefteq L$ ist $1 \neq O_p(K) \leq O_p(L)$, also $V \neq 1$. Mit $\bar{L} := L/C_L(V)$. Nach 2.17 ist $O_p(\bar{L}) = 1$, wegen $O_p(K) \leq O_p(K_0) \leq C_L(V)$ ist \bar{K} Komponente von \bar{L} . Nach 2.15 ist $\bar{K} \trianglelefteq \bar{L}$, also $KC_L(V) \trianglelefteq L$. Wegen (C) und $K \trianglelefteq L$ ist $K = (KC_L(V))^{(\infty)} \trianglelefteq L$.

Sei $x \in Q$. Dann gilt nach (iv)

$$K^x = [K^x, J(T)^x] \leq [QK, J(T)] \leq KJ(T).$$

Wegen 4.1 (iii) ist $K = O^p(KJ(T))$, und daraus folgt die Behauptung. ■

4.3 Satz: *Gelte die Situation 3.1 und sei $J(L)$ nicht auflösbar. Setze $K = J(L)C$. Dann ist $X := K^{(\infty)}$ die einzige nichtauflösbare $J(T)$ -Komponente unter L und $X/O_p(X) \simeq SL_2(p^n)$ operiert auf $W_X = V = \langle Z^L \rangle$ als natürlichem Modul. Ferner ist $\Omega_1(Z(J(T))) \leq V$ und $|V : \Omega_1(Z(J(T)))| = p^n$.*

Beweis: Es gilt $K = XC$, nach Satz 3.3 operiert $X/(X \cap C) \simeq SL_2(p^n)$ natürlich auf V . Wegen $S \cap X \in \text{Syl}_p(X)$ ist $X = \langle (S \cap X)^X \rangle$. Aus (Z) und der p -Abgeschlossenheit von C folgt $[C, S \cap X] \leq C \cap S \cap X \leq O_p(X)$, also $[C, X] \leq O_p(X)$. Sei $\tilde{L} := L/O_p(X)$. Dann ist $\tilde{X} \cap \tilde{C} \leq Z(\tilde{X}) \cap \tilde{X}'$. Ist $p^n \notin \{2^2, 3^2\}$, so hat der Schurische Multiplikator von $SL_2(p^n)$ die Ordnung 1 [H, V.25.5], also ist $\tilde{X} \cap \tilde{C} = 1$. Andernfalls hat der Schurische Multiplikator die Ordnung p , und es ist ebenfalls $\tilde{X} \cap \tilde{C} = (X \cap C)/O_p(X) = 1$. Also ist $X/O_p(X)$ quasia einfach und isomorph zu $SL_2(p^n)$.

J normalisiert X , also ist $[X, J] \leq X$. Wegen $[\overline{X}, \overline{J}] = \overline{X}$ ist $X = [X, J](C \cap X)$, also $X = [X, J]$, da X perfekt und C auflösbar.

Nach Konstruktion gilt (ii) aus Definition 4.1, offenbar ist X perfekt und wegen $V \leq O_p(X)$ ist $O_p(X) \not\leq Z(X)$. Also ist $X \in \mathcal{K}_n(T)$. Sei $T_0 \in \text{Syl}_p(XJ(T))$. Dann erfüllt (X, T_0) Situation 3.1, dies zeigt mit Satz 3.3 die Behauptungen über den Modul V .

Sei umgekehrt $Y \leq L$ eine nichtauflösbare $J(T)$ -Komponente. Dann ist $Y \leq J(L)$ nach Bemerkung 4.2 (iii), also $Y = Y^\infty \leq K^\infty = X$.

Da X (und damit auch $XJ(T)$) von je zwei verschiedenen p -Sylowgruppen erzeugt wird und Y nicht $J(T)$ normalisiert, ist $YJ(T)O_p(X) = XJ(T)$. Nach 4.2 (vi) angewandt auf $Q = O_p(X)$ ist $O_p(X) \leq N_L(Y)$. Also ist $X = O^p(XJ(T)) = O^p(YJ(T)O_p(X)) = Y$. ■

4.4 Definition: Setze $\mathcal{K}_n^0(T) := \{K \in \mathcal{K}_n(T) \mid \exists T_0 \in \text{Syl}_p(N_G(W_K)) : J(T) = J(T_0)\}$.

4.5 Satz: *Sei G von lokaler Charakteristik p , und seien $K \in \mathcal{K}_n^0(T)$, $L := N_G(W_K)$ und $T_0 \in \text{Syl}_p(L)$ mit $T_0 \leq S$. Dann erfüllen L und T_0 die Situation 3.1, insbesondere ist $K/O_p(K) \simeq SL_2(p^n)$.*

Beweis: Wegen $K \in \mathcal{K}_n^0(T)$ gilt $K \leq J(KJ(T)) \leq J(L)$, und nach Bemerkung 3.2 erfüllt (L, T_0) Situation 3.1 anstelle von (L, T) . Da $J(L)$ nicht auflösbar, liegt der nichtauflösbare Fall von Satz 3.3 vor. Aus Satz 4.3 folgt die Behauptung. ■

5 Auflösbare $J(T)$ -Komponenten

In diesem Abschnitt untersuchen wir die sog. auflösbaren $J(T)$ -Komponenten. Dies ist in [KS, 12.2] für $p = 2$ durchgeführt. Der fehlende Fall $p = 3$ erfordert nur kleine Modifikationen. Im gesamten Kapitel gelte

(\mathcal{L}) G besitzt lokale Charakteristik p .

5.1 Definition (auflösbare $J(T)$ -Komponenten): Sei $p \in \{2, 3\}$. Sei $\mathcal{K}_a(T)$ die Menge aller $K \leq G$ mit

- (i) $K = [K, J(T)]$,
- (ii) $\exists T_0 \in \text{Syl}_p(KJ(T)) : J(T_0) = J(T)$,
- (iii) $K = O^p(K)$,
- (iv) falls $p = 2$, dann ist $K/O_2(K) \simeq Z_3$, sonst ist $K/O_3(K) \simeq Q_8$,
- (v) $W_K := [\Omega_1(Z(O_p(K))), K] \simeq Z_p \times Z_p$ ist irreduzibler K -Modul.

Ein solches K heiße auflösbare $J(T)$ -Komponente (zur Primzahl p). Setze $\mathcal{K}(T) := \mathcal{K}_a(T) \cup \mathcal{K}_n(T)$, die Menge aller $J(T)$ -Komponenten.

5.2 Lemma: Sei $K \in \mathcal{K}(T)$ und $Q \leq G$ mit $KJ(T) \leq N_G(Q)$ und $Q \leq N_G(J(T))$. Dann gilt $Q \leq N_G(K)$.

Beweis: Der Beweis für auflösbare $J(T)$ -Komponenten verläuft analog zu dem in 4.2 (vi). ■

5.3 Situation: Seien im folgenden L, T, C, E_1, \dots, E_r wie im auflösbaren Fall von Satz 3.3, d.h.

- (i) (L, T) erfüllt Situation 3.1,
- (ii) $p \in \{2, 3\}$,
- (iii) $r \in \mathbb{N}$,
- (iv) für $i \in \{1, \dots, r\}$ existieren $C \leq E_i \leq L$ mit $\overline{E}_i \simeq SL_2(p)$, $[V, E_i]$ ist natürlicher Modul zu \overline{E}_i und für $j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{i\}$ ist $[V, E_i, E_j] = 1$,
- (v) $\overline{J(L)} = \overline{E}_1 \times \dots \times \overline{E}_r$,
- (vi) $V = [V, E_1] \times \dots \times [V, E_r] \times C_V(J(L))$.

Setze $K_i := O^p([O^p(E_i), J(T)])$ und $W_{K_i} := [\Omega_1(Z(O_p(K_i))), K_i]$ für $i = 1, \dots, r$ und $\tilde{L} := L/O_p(L)$.

5.4 Lemma: Dann gilt

- (i) $\overline{J(L)} = (\overline{K}_1 \times \dots \times \overline{K}_r)\overline{J(T)}$.
- (ii) \tilde{C} ist eine p' -Gruppe.

$$(iii) \quad \tilde{C}\tilde{T} = \tilde{C} \times \tilde{T}.$$

$$(iv) \quad J(T) \not\leq C.$$

$$(v) \quad \text{Für } i = 1, \dots, r \text{ ist } K_i \in \mathcal{K}_a(T).$$

Beweis: (i) ist klar. Wegen $Z \leq V$ ist $C \leq N_G(T)$ nach (Z), also \tilde{C} eine p' -Gruppe und $\tilde{C}\tilde{T} = \tilde{C} \times \tilde{T}$. Aus $J(T) \leq C$ würde damit $J(T) \leq O_p(L)$ folgen — im Widerspruch zu Situation 5.3 (i).

Zum Beweis von (v) sei abkürzend $(E, V_E, K, W_K) := (E_i, [V, E], K_i, W_{K_i})$. Offenbar erfüllt K die Punkte (ii) und (iii) aus Definition 5.1.

Setze $X := O^p(E)$. Dann ist $\overline{X} \simeq Z_3$ oder $\overline{X} \simeq Q_8$ und die Operation von $\overline{XJ(T)}$ auf V_E ergibt $\overline{X} = [\overline{X}, \overline{J(T)}]$.

Sei $q \in \mathbf{N}$ mit $\{p, q\} = \{2, 3\}$. Nach (ii) ist \tilde{X} eine p' -Gruppe, also existiert eine $J(T)$ -invariante q -Sylowgruppe \tilde{S}_0 von $\tilde{R} := [\tilde{X}, J(T)]$. Es gilt $\tilde{R} = [\tilde{R}, J(T)] \leq [\tilde{C}\tilde{S}_0, J(T)] = [\tilde{S}_0, J(T)] \leq \tilde{S}_0$, d.h. \tilde{R} ist eine q -Gruppe. Analog folgt

$$(1) \quad \tilde{R} = \tilde{S}_0 \quad \text{für jede } J(T)\text{-invariante Untergruppe } \tilde{S}_0 \text{ von } \tilde{R} \text{ mit } \tilde{C}\tilde{S}_0 = \tilde{C}\tilde{R}.$$

Sei $|\tilde{R}| > |\overline{X}|$ angenommen. Dann existiert $\tilde{N} \triangleleft \tilde{R}$ mit $\tilde{N} \leq \tilde{C}$ und $|\tilde{R} \cap \tilde{C} : \tilde{N}| = p$. Beachte, daß \tilde{N} als Untergruppe von \tilde{C} invariant unter $J(T)$ ist, d.h. $J(T)$ operiert auf $\hat{R} := \tilde{R}/\tilde{N}$. Im Fall $p = 2$ ist $|\hat{R}| = 9$, also \hat{R} abelsch und $\hat{R} = C_{\hat{R}}(J(T)) \times [\hat{R}, J(T)]$ mit $C_{\hat{R}}(J(T)) \geq \hat{R} \cap \hat{C} \neq 1$. Es folgt der Widerspruch $\hat{R} > [\hat{R}, J(T)]$.

Also ist $p = 3$. Sei $\hat{U} \leq \hat{R}$ mit $\overline{U} \simeq Z_4$. Dann ist \hat{U} abelsch als zentrale Erweiterung einer zyklischen Gruppe. Ist \hat{U} zyklisch, so ist $\hat{R} \simeq D_{16}, S_{16}, Q_{16}$ oder $M(16)$ nach Klassifikation der p -Gruppen mit zyklischem Normalteiler vom Index p und es ergibt sich der Widerspruch $\hat{R}/\hat{C} \simeq D_8$. Also ist \hat{U} nicht zyklisch. Sei $\hat{u} \in \hat{U}$ ein Element der Ordnung 4, und τ der von $J(T)$ induzierte Automorphismus der Ordnung 3. Es gilt $|(\hat{u}^2)^{\langle \tau \rangle}| \neq 3$, da \hat{R} genau vier Involutionen besitzt. Damit ist $\hat{S}_0 := \langle \hat{u}, \hat{u}^\tau \rangle \simeq Q_8$, also $\hat{R} \simeq Z_2 \times Q_8$ und \hat{S}_0 ist $J(T)$ -invariant im Widerspruch zu (1).

Also ist $K/O_p(K) \simeq O_{p'}(SL_2(p))$. Aus $K = [K, J(T)]O_p(K)$ folgt $K = [K, J(T)]$. Dies zeigt (i) und (iv) aus Definition 5.1.

Nach Definition liegt V_E in W_K , es genügt also, $|W_K| \leq p^2$ zu zeigen. Setze

$$\hat{\mathcal{A}}(T) := \{A \in \mathcal{A}(T) \mid [A, K/O_p(K)] \neq 1\} \quad (\neq \emptyset)$$

und wähle $A \in \hat{\mathcal{A}}(T)$ derart, daß $C_A(W_K)$ maximal ist. Kenntnis der $SL_2(p)$ liefert ein $d \in K$, so daß $\langle A, A^d \rangle$ eine q -Sylowgruppe D von K enthält. Nach Definition von W_K und der oben gezeigten Struktur von K ist $C_{W_K}(D) = 1$. Also gilt

$$(2) \quad C_{W_K}(A) \cap C_{W_K}(A^d) = 1 \quad \text{und} \quad W_K = [W_K, A][W_K, A^d].$$

Setze $A_0 := C_A([W_K, A])[W_K, A]$ und $A_1 := C_A(K/O_p(K))$. Nach 2.11 ist $A_0 \in \mathcal{A}(T)$ und $[W_K, A_0] \neq 1$. Wegen $C_A(W_K)[W_K, A] \leq C_{A_0}(W_K)$ und nach Wahl von A gilt entweder $A_0 \leq C(K/O_p(K))$ oder $A_0 = A$.

Im ersten Fall folgt $A_0^d \leq A_0 O_p(K)$, also $A_0^d \leq C([W_K, A]) \cap C([W_K, A^d])$ und mit (2) der Widerspruch $[W_K, A_0] = 1$.

Andernfalls folgt wie eben $[W_K, A_1] = 1$, also $|A : C_A(W_K)| = p$. Wegen $A \in \mathcal{A}(T)$ folgt

$$|A| \geq |W_K C_A(W_K)| = |C_A(W_K)| |W_K / C_{W_K}(A)|,$$

also $|W_K / C_{W_K}(A)| \leq p$ und damit $|W_K| \leq p^2$ wegen (2).

Damit ist K eine $J(T)$ -Komponente. ■

5.5 Satz: K_1, \dots, K_r sind genau die auflösbaren $J(T)$ -Komponenten, die in L liegen. Insbesondere ist jede $J(T)$ -Komponente von L ein Subnormalteiler von L .

Beweis: K_1, \dots, K_r sind auflösbare $J(T)$ -Komponenten nach 5.4 (v).

Sei $K \in \mathcal{K}_a(T)$ mit $K \leq L$. Aus Lemma 5.2 folgt $K \trianglelefteq KO_p(L)$, also

$$(*) \quad K = O^p(KO_p(L)) \quad \text{und} \quad (+) \quad [O_p(L), K] \leq O_p(K).$$

Sei wieder $q \in \mathbb{N}$ mit $\{p, q\} = \{2, 3\}$. Aus Definition 5.1 (i) folgt $K \leq J(L)$, genauer $\overline{K} \leq O_q(\overline{J(L)}) = \overline{K}_1 \times \dots \times \overline{K}_r$ und $O_p(K) \leq O_p(L)$. Mit (+) folgt

$$[V, K] = [V, K, K] = W_K \simeq Z_p \times Z_p.$$

Damit existiert genau ein $i \in \{1, \dots, r\}$, so daß die Projektion von \overline{K} auf \overline{K}_i nichttrivial ist. Also ist

$$\overline{K} = \overline{K}_i \quad \text{und} \quad W_K = [V, E_i].$$

Damit ist

$$\widetilde{K} = [\widetilde{K}, \widetilde{J(T)}] = [\widetilde{K}\widetilde{C}, \widetilde{J(T)}] = [\widetilde{K}_i\widetilde{C}, \widetilde{J(T)}] = [\widetilde{K}_i, \widetilde{J(T)}] = \widetilde{K}_i$$

nach Lemma 5.4 (iii) und (v). Also gilt

$$K \stackrel{(*)}{=} O^p(KO_p(L)) = O^p(K_i O_p(L)) = K_i. \quad \blacksquare$$

5.6 Definition: Setze $\mathcal{K}_a^0(T) := \{K \in \mathcal{K}_a(T) \mid \exists T_0 \in \text{Syl}_p(N_G(W_K)) : J(T) = J(T_0)\}$.

5.7 Lemma: Sei $K \in \mathcal{K}_a^0(T)$ und $L := N_G(W_K)$. Dann gilt

$$(i) \quad L = N_G(K).$$

$$(ii) \quad K \in \mathcal{K}_a(T^g) \text{ für alle } g \in G \text{ mit } J(T^g) \leq L.$$

Beweis: Wegen $K \in \mathcal{K}_a^0(T)$ können wir $T \in \text{Syl}_p(L)$ annehmen. Das Paar (L, T) erfüllt dann Situation 3.1 nach Bemerkung 3.2. Wegen (\mathcal{C}) ist L auflösbar, d.h. L erfüllt Situation 5.3. Nach Satz 5.5 existiert ein $i \in \{1, \dots, r\}$ mit $K = K_i$ und $W_K = [V, E_i]$. Mit W_K normalisiert L auch K als die eindeutig bestimmte $J(T)$ -Komponente, die W_K nicht zentralisiert. Dies liefert (i).

Zu (ii) beachte, daß nach dem Satz von Sylow g aus L gewählt werden kann. ■

5.8 Lemma: Seien $g \in G$, $F \in \mathcal{K}_a^0(T^g)$ und $F \trianglelefteq \langle J(T), F \rangle$. Dann liegt F nicht in $N_G(J(T))$.

Beweis: Sei $F \leq N_G(J(T))$ angenommen. Wegen $F = O^p(FJ(T))$ ist $J(T) \leq N_G(W_F)$, also $F \in \mathcal{K}_a^0(T)$ nach Lemma 5.7 (ii) im Widerspruch zu $F \leq N_G(J(T))$. ■

5.9 Satz: Seien L und T wie in 5.3, $g \in G$ und $F \in \mathcal{K}_a^0(T^g)$ mit $F \leq L$ und $F \trianglelefteq \langle F, J(T) \rangle$. Dann ist F schon subnormal in L .

Beweis: Nach Lemma 5.8 gilt

$$(*) \quad F \not\leq N_G(J(T)).$$

Setze $L_0 := \langle F, J(T) \rangle$. Wegen $F \trianglelefteq L_0$ können wir $O_p(F) \leq T$ annehmen. Dann ist $Z \leq \Omega(Z(O_p(L_0))) \cap V$. Wegen $F = O^p(L_0)$ ist $[Z, F] \leq [\Omega_1(Z(O_p(L_0))), F, F] \leq W_F$.

Aus $[Z, F] = 1$ folgte $F \leq C_L(Z) \leq N_G(S) \cap L \leq N_G(J(T))$ im Widerspruch zu (*).

Also ist $[Z, F] \neq 1$ und damit $[Z, F] = W_F$, da F irreduzibel auf W_F operiert (Definition 5.1 (v)). Es folgt $W_F \leq V$ und $O_p(L) \leq N_G(W_F) = N_G(F)$, letzteres wegen Lemma 5.7 (i). Damit folgt $[V, F] \leq [\Omega_1(Z(O_p(L))), F, F] \leq W_F$.

Sei $E \in \{E_1, \dots, E_r\}$ und $V_E := [V, E]$. Dann ist $V_E W_F$ unter F invariant. Wegen $|V_E W_F| \leq p^4$ und der Struktur von $J(L)$ existierten höchstens zwei Konjugierte von V_E in $V_E W_F$. Im Fall $p = 2$ ist $F/O_p(F) \simeq Z_3$, also normalisiert F schon V_E .

Sei also $p = 3$ und $F \not\leq N_G(V_E)$ angenommen. Dann hat $N := N_F(V_E)$ Index zwei in F . Ist $[[V_E, N]] = 9$, dann $V_E = W_F$ im Widerspruch zur Annahme. Andernfalls ist $C_N(V_E) > O_p(F)$, also $O_p(F) < C_F(\langle V_E^F \rangle) = C_F(V_E W_F) \leq C_F(W_F) = O_p(F)$ (beachte $C_F(W_F) = O_p(F)$ nach Definition 5.1 (v)).

Also gilt jeweils $F \leq N_G(V_E)$. Im Fall $W_F = V_E$ folgt $\overline{F} = \overline{E}$ aus der Operation beider auf V , also $F \leq E$ und mit Lemma 5.7 (i) die Behauptung $F \trianglelefteq E \trianglelefteq L$. Andernfalls können wir annehmen, daß $[V_E, F] = 1$ gilt für alle $E \in \{E_1, \dots, E_r\}$. Dann gilt $[J(T), V, F] = 1 = [V, F, J(T)]$, also $[F, J(T)] \leq C$ und $F \leq N_G(CJ(T))$. Da $CJ(T)$ nach Lemma 5.4 (iii) p -abgeschlossen ist, folgt $F \leq N_G(J(T))$ im Widerspruch zu (*). ■

Für auflösbare $J(T)$ -Komponenten ist die Aussage $\Omega_1(Z(J(T))) \leq W_K$ wie in Satz 4.3 im allgemeinen falsch. Dies liegt natürlich daran, daß im auflösbaren Fall die Voraussetzung (C) wertlos ist. Die folgende, schwächere Aussage können wir zeigen:

5.10 Satz: Sei $K \in \mathcal{K}_a(T)$. Dann gilt für $Z_0 := \Omega_1(Z(J(T)))$

$$Z_0 = (Z_0 \cap Z(KJ(T)))(Z_0 \cap W_K) \quad \text{und} \quad |Z_0 \cap W_K| = p.$$

Beweis: Sei $L := KJ(T)$. Wegen Definition 5.1 (ii) können wir $T \in \text{Syl}_p(L)$ annehmen. Setze

$$V := \langle \Omega_1(Z(T))^L \rangle.$$

Wegen $\Omega_1(Z(T)) \leq C_L(O_p(L)) = C_L(F(L)) \leq F(L) = O_p(L)$ ist $V \leq Z(O_p(L))$. Aus $W_K \trianglelefteq L$ folgt $W_K \cap V \neq 1$, also $W_K \leq V$ wegen 5.1 (v) und damit

$$(1) \quad C_L(V) = O_p(L).$$

Wegen $[V, K] = [V, K, K] \leq [\Omega_1(Z(O_p(K))), K]$ ist

$$(2) \quad W_K = [V, K].$$

Sei $A \in \mathcal{A}(T) \setminus \mathcal{A}(O_p(L))$. Nach 2.12 gilt $|A/C_A(V)| = |V/C_V(A)|$. Mit $V \cap C_A(V) = A \cap V = C_V(A)$ folgt $|A| = |VC_A(V)|$. Aus (1) folgt

$$(3) \quad \mathcal{A}(O_p(L)) \subseteq \mathcal{A}(T)$$

und $Z_0 \leq Z(J(O_p(L)))$.

Nach 2.14 gilt $[Z_0, K] \leq V$, also mit (2)

$$(4) \quad [Z_0, K] = W_K \quad \text{und} \quad Z_0 W_K \trianglelefteq KT = L.$$

Sei $q \in \mathbf{N}$ mit $\{p, q\} = \{2, 3\}$. Sei $d \in K$ derart, daß $L_0 := \langle J(T), J(T)^d \rangle$ eine q -Sylowgruppe von L enthält. Dann ist $TL_0 = L$, also $K \leq \langle J(T)^L \rangle = \langle J(T)^{L_0} \rangle \leq L_0$ und somit $L = L_0$.

Für $X := Z_0 \cap Z_0^d$ gilt $X \leq Z(L)$ und daher $W_K \cap X = 1$. Es folgt $|Z_0 W_K / Z_0| = |W_K / (W_K \cap Z_0)| = p$, also $|Z_0 W_K / X| \leq p^2$. Damit gilt

$$Z_0 W_K = X \times W_K,$$

und dies ergibt die Behauptung. ■

6 Lokale Analyse

Im folgenden sei M eine maximale p -lokale Untergruppe von G mit $N_G(J(S)) \leq M$; ferner gelte weiterhin

(\mathcal{L}) G besitzt lokale Charakteristik p .

Setze

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p(G) &:= \{N_G(Q) \mid 1 \neq Q \text{ } p\text{-Gruppe}\} \quad \text{und} \\ \mathcal{T}(M) &:= \{T \leq M \mid 1 \neq T \text{ } p\text{-Gruppe}, \exists L \in \mathcal{L}_p(G) : T \leq L \not\leq M\}. \end{aligned}$$

6.1 Lemma: M ist genau dann stark p -eingebettet in G , wenn $\mathcal{T}(M) = \emptyset$ gilt.

Beweis: Dies ist in [KS, 12.3.1] für $p = 2$ durchgeführt. Der Beweis für beliebiges p verläuft entsprechend. ■

Für eine p -Gruppe T setze $a(T) := |A|$, wobei A ein Element aus $\mathcal{A}(T)$ ist. Seien R und T zwei p -Untergruppen von G . Es gelte $R \preceq T$, falls folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $a(R) \leq a(T)$.
- (ii) Ist $a(R) = a(T)$, so gilt $|J(R)| \leq |J(T)|$.
- (iii) Ist $a(R) = a(T)$ und $|J(R)| = |J(T)|$, so gilt $|R| < |T|$ oder $R = T$.

Setze

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^*(M) &:= \{T \in \mathcal{T}(M) \mid \forall R \in \mathcal{T}(M) : T \preceq R \implies T = R\} \quad \text{und} \\ \mathcal{T}_S^*(M) &:= \{T \in \mathcal{T}^*(M) \mid T \leq S\}, \end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{T}^*(M)$ ist die Menge der bezüglich der Thompson-Ordnung maximalen Elemente.

Wegen $N_G(J(S)) \leq M$ ist $S \in \text{Syl}_p(M)$, und damit

$$\mathcal{T}_S^*(M) \neq \emptyset \iff \mathcal{T}^*(M) \neq \emptyset \iff \mathcal{T}(M) \neq \emptyset.$$

6.2 Lemma: Sei $T \in \mathcal{T}^*(M)$. Dann ist $N_G(J(T)) \leq M$.

Beweis: Nach Konjugation können wir $T \leq S$ annehmen. Wende 2.3 an auf (S, T, id) anstatt (G, U, X) . Dann folgt $T \prec N_S(J(T))$, also $N_G(J(T)) \leq M$ wegen der Maximalität von T , oder $T = S$ (und mit $N_G(J(S)) \leq M$ die Behauptung). ■

6.3 Lemma: Sei $T \in \mathcal{T}^*(M)$, $L \in \mathcal{L}_p(G)$ mit $L \not\leq M$ und $Y \in \text{Syl}_p(L)$ mit $J(T) \leq Y$. Dann gilt

- (i) $J(T) = J(Y)$,
- (ii) $Y \leq M$,
- (iii) $J(T) \not\leq O_p(L)$.

Beweis: Dies ist [KS, 12.3.3] für beliebiges p anstatt $p = 2$. ■

6.4 Lemma: Seien $T \in \mathcal{T}_S^*(M)$ und $L \in \mathcal{L}_p(G)$ mit $T \leq L \not\leq M$. Dann erfüllen L und T Situation 3.1.

Beweis: Sei $T \leq Y \in \text{Syl}_p(L)$. Wegen Lemma 6.3 ist $Y \in \mathcal{T}(M)$, mit der Maximalität von T folgt $T = Y \in \text{Syl}_p(L)$. Mit diesem und Lemma 6.3 (iii) erfüllen L und T Situation 3.1 (vgl. 3.2). ■

6.5 Definition: Sei $T \in \mathcal{T}_S^*(M)$. Mit $\mathcal{K}_M(T)$ sei die Menge aller $K \in \mathcal{K}(T)$ bezeichnet, für die gilt:

- (i) $K \not\leq M$
- (ii) $O_p(\langle K, T \rangle) \neq 1$
- (iii) $\exists T_0 \in \text{Syl}_p(N_G(W_K)) : J(T_0) = J(T)$.

Wegen (iii) ist $\mathcal{K}_M(T) \subseteq \mathcal{K}_a^0(T) \cup \mathcal{K}_n^0(T)$.

6.6 Lemma: Seien T und L wie in Lemma 6.4. Dann existiert $K \in \mathcal{K}_M(T)$ mit $K \leq L$.

Beweis: Das Frattiniargument liefert $L = N_L(J(T))J(L)$, also ist $J(L) \not\leq M$ nach Lemma 6.2.

Ist $J(L)$ nicht auflösbar, so liefern Satz 3.3 und 4.3 ein $K \in \mathcal{K}_n(T)$ mit $KC = J(L)C$, also $KC \not\leq M$. Andernfalls liefern Satz 3.3 und 5.5 ein $K \in \mathcal{K}_a(T)$ mit $K \leq L$ und $KC \not\leq M$. Wegen $C \leq C_G(Z) \leq N_G(S) \leq N_G(J(S)) \leq M$ nach (Z) folgt $K \not\leq M$.

Es gilt $O_p(L) \leq T$, also $1 \neq O_p(L) \leq O_p(\langle K, T \rangle)$. Sei $J(T) \leq Y \in \text{Syl}_p(N_G(W_K))$. Wegen $K \leq N_G(W_K)$ ist $N_G(W_K) \not\leq M$, also ist $J(T) = J(Y)$ nach Lemma 6.3 (i). ■

6.7 Satz: Eindeutigkeitsatz. Seien $T \in \mathcal{T}_S^*(M)$ und $K \in \mathcal{K}_M(T)$. Dann existiert genau eine maximale p -lokale Untergruppe L mit $KJ(T) \leq L$. Ferner gilt $K \trianglelefteq L$ und $T \in \text{Syl}_p(L)$. Ist $K \in \mathcal{K}_n(T)$, so gilt $L = N_G(W_K) = N_G(K)$ und K ist die einzige nichtauflösbare $J(T)$ -Komponente in L .

Beweis: Ist $K \in \mathcal{K}_a(T)$, so ist dies [KS, 12.3.6] — dort für $p = 2$ durchgeführt, der Beweis im Fall $p = 3$ verläuft entsprechend und verwendet die Sätze 5.5 und 5.9. Sei also $K \in \mathcal{K}_n(T)$. Sei \mathcal{L} die Menge der p -lokalen Untergruppen von G , die $KJ(T)$ enthalten. Wegen $KJ(T) \leq N_G(W_K)$ ist $\mathcal{L} \neq \emptyset$.

Sei $L \in \mathcal{L}$ und $J(T) \leq T_0 \in \text{Syl}_p(L)$. Wegen $KJ(T) \leq L$ ist $J(T) \not\leq O_p(L)$, und nach Lemma 6.3 ist $J(T) = J(T_0)$. Somit erfüllt (L, T_0) Situation 3.1. Da $K \leq J(L)$ nicht auflösbar ist, folgt aus Satz 3.3 und 4.3, daß K die einzige nichtauflösbare $J(T)$ -Komponente in L ist, und damit $L \leq N_G(W_K)$. Also ist $N_G(W_K)$ das eindeutige maximale Element in \mathcal{L} . Nach Definition von $\mathcal{K}_M(T)$ ist $\langle K, T \rangle \leq N_G(O_p(\langle K, T \rangle)) \in \mathcal{L}$, also $T \leq N_G(W_K)$ nach eben Gezeigtem und $T \in \text{Syl}_p(N_G(W_K))$ nach Lemma 6.4. ■

6.8 Lemma: Seien $T \in \mathcal{T}_S^*(M)$ und $K \in \mathcal{K}_M(T)$ auflösbar. Sei L die eindeutig bestimmte p -lokale Untergruppe mit $KJ(T) \leq L$ (vgl. 6.7) und $Z_0 := \Omega_1(Z(J(T)))$. Dann ist $\Omega_1(Z(T)) \cap W_K \neq 1$, und es gilt einer der folgenden Fälle:

- (i) $Z = Z_0 \simeq Z_p$.
- (ii) $Z = Z_0 \simeq Z_p \times Z_p$ und $S = T$.
- (iii) $\Omega_1(Z(T)) = Z_0 \simeq Z_p \times Z_p$ und $|N_S(Z_0) : C_S(Z_0)| = p$.

Beweis: Dies ist [KS, 12.3.7] um den dort nicht behandelten (aber analog beweisbaren) Fall $p = 3$ erweitert. ■

6.9 Satz: Seien $T \in \mathcal{T}_S^*(M)$ und $K \in \mathcal{K}_M(T)$. Dann ist $T \leq N_G(K)$.

Beweis: Ist $K \in \mathcal{K}_n(T)$, so ist dies eine triviale Konsequenz aus 6.7.

Sei also $K \in \mathcal{K}_a(T)$ und sei L die maximale p -lokale Untergruppe mit $KJ(T) \leq L$. Nach 6.7 erfüllt (L, T) Situation 3.1, also Situation 5.3, da K auflösbar. Sei $t \in T$. Nach 6.8 ist $Z(T) \cap W_K \neq 1$, also $W_K \cap W_K^t \neq 1$ und damit $W_K = W_K^t$. Damit normalisiert t auch K , die einzige Komponente, die W_K nicht zentralisiert. ■

Wir haben nun die nötige Information, um zwei Untergruppen P_1 und P_2 zu konstruieren, die geeignet sind, mittels der Amalgam-Methode nach Delgado, Goldschmidt und Stellmacher untersucht zu werden.

6.10 Satz: Sei $T \in \mathcal{T}_S^*(M)$. Dann existieren $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(T)$ und $T_0 \leq T$ mit $J(T) \leq T_0$, so daß für $i \in \{1, 2\}$ und $P_i := \langle T_0, K_i \rangle$ gilt:

- (i) Es existiert genau eine maximale p -lokale Untergruppe L_i von G mit $P_i \leq L_i$. Ferner gilt $T \in \text{Syl}_p(L_i)$, falls L_i auflösbar ist, und $J(T) = J(T_i)$ für ein $T_i \in \text{Syl}_p(L_i)$.
- (ii) $T \leq N_G(K_i)$.
- (iii) $O_p(L_i) \leq O_p(P_i)$.
- (iv) $T_0 \in \text{Syl}_p(P_i)$.
- (v) $L_1 \neq L_2$.
- (vi) $P_i/O_p(P_i)$ operiert treu auf dem Normalteiler $K_iJ(T)O_p(P_i)/O_p(P_i)$; $K_iJ(T)O_p(P_i)/O_p(P_i)$ ist isomorph zu $SL_2(q_i)$, $q_i = p^{n_i}$, $n_i \in \mathbb{N}$ geeignet, und hat p -Potenzindex in $P_i/O_p(P_i)$. Ferner operiert $P_i/O_p(P_i)$ treu auf W_K .
- (vii) $C_G(O_p(P_i)) \leq O_p(P_i)$.
- (viii) $P_1 \cap P_2 \leq N_G(T_0)$.
- (ix) $O_p(\langle P_1, P_2 \rangle) = 1$.
- (x) Keine nichttriviale Untergruppe von $P_1 \cap P_2$ ist normal in P_1 und P_2 .

Seien $p \neq 2$, $\{i, j\} = \{1, 2\}$ und $t_i \in G$ mit $\langle t_i O_p(P_i) \rangle = Z(P_i/O_p(P_i))$. Dann gilt $L_j^{t_i} = L_j$, oder es existiert eine Involution x in G mit $P_1^x = P_2$.

Beweis: Nach 6.6 existiert $K_1 \in \mathcal{K}_M(T)$. Nach 6.7 liegt $K_1J(T)$ in genau einer maximalen p -lokalen Untergruppe L_1 von G , und es gilt $T \in \text{Syl}_p(L_1)$.

Für die Konstruktion von K_2 und L_2 betrachten wir separat die drei Fälle

- (a) $N_G(J(T)) \leq L_1$.
- (b) $N_G(J(T)) \not\leq L_1$ und $N_G(T) \leq L_1$.
- (c) $N_G(T) \not\leq L_1$.

Gelte zuerst (a), d.h. $N_G(J(T)) \leq L_1$. Dann ist $T = S$, da $T \in \text{Syl}_p(L_1)$, und L_1 erfüllt dieselben Voraussetzungen wie M . Es gilt $T \in \mathcal{T}^*(L)$, und aus 6.6 und 6.7 folgt die Existenz eines $K_2 \in \mathcal{K}_L(T)$ mit $L_2 := M$ als einziger maximaler p -lokaler Untergruppe, die $K_2 J(T)$ enthält. Setze $T_0 := T$ und $P_i := \langle T_0, K_i \rangle, i = 1, 2$. Dann gilt (i) bis (v), beachte 6.9.

Gelte nun (b), d.h. es ist $N := N_G(J(T)) \not\leq L_1$, aber $N_G(T) \leq L_1$. Dann ist wieder $T = S$. Setze $Z_0 = \Omega_1(Z(J(S)))$. Sei $K \in K_a(T)$ angenommen. Aus 6.8 folgt dann $Z_0 = Z$, und es gilt $N_G(J(S)) \leq N_G(Z_0) = N_G(Z) \leq N_G(S) \leq L_1$ wegen (Z) und 2.19 im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $K \in \mathcal{K}_n(T)$.

Es ist $C := C_N(Z_0) \trianglelefteq N$, also $T_0 := C \cap S \in \text{Syl}_p(C)$ und $N = CN_N(T_0)$ (Frattini-Argument). Wegen (Z) ist $C \leq N_G(S) \leq L_1$, also $N_N(T_0) \not\leq L_1$. Nach Satz 4.5 und 4.3 ist $W_K = \langle Z^{L_1} \rangle$, also gilt $O_p(L_1) \leq C_S(W_K) \leq T_0$ nach 2.17. Offenbar ist $J(S) \leq T_0$, also T_0 eine p -Sylowgruppe von $P_1 := \langle T_0, K_1 \rangle$ und es gilt $O_p(L_1) \leq O_p(P_1)$. Sei $x \in N_G(T_0) \setminus L_1$. Setze $L_2 := L_1^x, K_2 := K_1^x$ und $P_2 := BK_1^x (= P_1^x)$. Dann gilt (i) bis (v).

Im Fall $N_G(T) \not\leq L_1$ schließlich wähle $T_0 := T, x \in N_G(T) \setminus L_1$ und $L_2 := L_1^x, K_2 := K_1^x$ und $P_2 := T_0 K_1^x (= P_1^x)$. Wiederum gilt (i) bis (v).

In allen drei Fällen haben wir also K_1, K_2 und T_0 so gefunden, daß sie der Behauptung bis einschließlich (v) genügen.

Seien $p \neq 2, \{i, j\} = \{1, 2\}$ und $t_i \in G$ mit $\langle t_i O_p(P_i) \rangle = Z(P_i/O_p(P_i))$ derart, daß t_i nicht L_j normalisiert. Wegen $O_p(P_i) \leq P_j$ können wir $o(t_i) = 2$ annehmen. Dann gelten (i) bis (v) auch für $L_i := L_j^{t_i}, K_i := K_j^{t_i}$ und $P_i := P_j^{t_i}$.

Sei nun wieder p beliebig. Setze $K := K_i J(T) \trianglelefteq P_i$. Wegen (ii) gilt $O_p(P_i) = O_p(K) C_{T_0}(K/O_p(K))$. Also operiert $P_i/O_p(P_i)$ treu auf $K/O_p(K) \simeq SL_2(q_i)$. Sei $t \in C_{T_0}(K/O_p(K))$. Dann ist $C_{W_{K_i}}(t) \neq 1$, also $1 = [C_{W_{K_i}}(t), t] = [C_{W_{K_i}}(t)^{K/O_p(K)}, t] = [W_{K_i}, t]$. Also ist $O_p(P_i) \leq C_{P_i}(W_{K_i}) \trianglelefteq P_i$. Dies zeigt (vi).

Wegen (L) und (iii) gilt $C_G(O_p(P_i)) \leq C_G(O_p(L_i)) \leq O_p(L_i) \leq O_p(P_i)$, d. i. (vii), und wegen (v) und der Eindeigkeitseigenschaft aus Satz 6.7 folgt $O_p(\langle P_1, P_2 \rangle) = 1$, d. i. (ix).

(viii) folgt aus der Tatsache, daß P_1 und P_2 jeweils von je zwei ihrer p -Sylowgruppen erzeugt werden und $P_1 \neq P_2$ gilt.

Angenommen, es existiert $1 \neq U \leq P_1 \cap P_2$ mit $U \trianglelefteq P_1$ und $U \trianglelefteq P_2$. Wegen (viii) ist U p -abgeschlossen, also U eine p' -Gruppe nach (ix) und damit $1 \neq U O_p(P_1)/O_p(P_1) \leq O_{p'}(P_1/O_p(P_1))$ nach (vi). Es folgt $U \geq [U, W_{K_1}] = W_{K_1}$ im Widerspruch dazu, daß U eine p' -Gruppe ist. Also gilt (x). ■

Wir führen nun Nebenklassengraphen ein und listen einige elementare Eigenschaften auf. Eine ausführlichere Behandlung ist in [DGS] zu finden.

Sei $P := \langle P_1, P_2 \rangle$. Sei $\Gamma := \{P_1 x, P_2 x \mid x \in P\}$ mit der Relation

$$X \equiv Y : \iff X \cap Y \neq \emptyset \quad \text{und} \quad X \neq Y$$

der zu P_1, P_2 und P gehörige Nebenklassengraph. Wegen $P = \langle P_1, P_2 \rangle$ ist Γ zusammenhängend. Bezeichne mit $d : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbf{N}_0$ die natürliche Abstandsfunktion und mit $\Delta(\alpha)$ die Menge der Nachbarn der Ecke α . P operiert auf Γ durch Rechtsmultiplikation, die Eckenstabilisatoren $P_{P_i x} = P_i^x$ sind

transitiv auf der Menge der benachbarten Ecken. P ist kantentransitiv auf Γ , also gilt Satz 6.10 entsprechend für P_α, P_β statt P_1, P_2 mit beliebigen benachbarten Ecken α, β , und Γ zerfällt unter der Operation von P in zwei Bahnen.

Seien $\alpha, \beta \in \Gamma$ mit $\beta \equiv \alpha$. Setze $B_{\alpha\beta} := P_\alpha \cap P_\beta$ und bezeichne mit $S_{\alpha\beta}$ die eindeutig bestimmte p -Sylowgruppe von $B_{\alpha\beta}$ (vgl. Satz 6.10 (viii)). Beachte $S_{\alpha\beta} \in \text{Syl}_p(P_\alpha)$. Setze $Q_\alpha := O_p(P_\alpha)$. Ist $\alpha = P_i g$ für ein $i \in \{1, 2\}$ und ein $g \in P$, so setze $K_\alpha := (O_p(P_i)K_i J(T))^g$ und $Z_\alpha := W_{K_i}^g$. Diese Definition ist eindeutig, da $O_p(P_i)K_i J(T)$ und W_{K_i} Normalteiler von P_i sind. Beachte, daß diese Definition leicht von der üblichen abweicht: Normalerweise ist $Z_\alpha := \langle \Omega_1(Z(T)) | T \in \text{Syl}_p(P_\alpha) \rangle$, dann ist Z_α direktes Produkt aus unserem Z_α und $Z(P_\alpha)$. Im nichtauflösbaren Fall stimmen also beide Definitionen überein. Da wir mit W_{K_i} den natürlichen Modul schon identifiziert haben, scheint uns dieses Vorgehen zweckmäßig.

Seien $n_\alpha, q_\alpha \in \mathbf{N}$ mit $|Z_\alpha| = p^{2n_\alpha} = q_\alpha^2$. Dann ist $Q_\alpha \leq K_\alpha \leq P_\alpha$, $Z_\alpha \text{ char } K_\alpha$, und $K_\alpha/Q_\alpha \simeq SL_2(q_\alpha)$ operiert natürlich auf Z_α .

6.11 Satz: *Seien $\alpha, \beta \in \Gamma$ mit $\alpha \equiv \beta$. Für $\delta \in \{\alpha, \beta\}$ sei $L_\delta \leq P_\delta$ transitiv auf $\Delta(\delta)$. Setze $L := \langle L_\alpha, L_\beta \rangle$. Dann gilt*

- (i) L operiert kantentransitiv auf Γ .
- (ii) $P = B_{\alpha\beta}L$.
- (iii) $(L_\alpha \cap L_\beta)_L = 1$.

Beweis: Dies ist [DGS, II.3.2]. ■

Setze $b := \min\{d(\alpha, \alpha') | Z_\alpha \not\leq Q_{\alpha'}; \alpha, \alpha' \in \Gamma\}$. Ein Paar $(\alpha, \alpha') \in \Gamma \times \Gamma$ mit $Z_\alpha \not\leq Q_{\alpha'}$ und $d(\alpha, \alpha') = b$ heiße kritisches Paar.

Sei (α, α') ein kritisches Paar und γ ein Weg der Länge b von α nach α' . Bezeichne die (eindeutig bestimmte) Ecke δ auf γ mit $d(\alpha, \delta) = i$ mit $\alpha + i$ bzw. $\alpha' - (b - i)$.

6.12 Lemma: *Seien $\delta \in \Gamma$ und $\lambda \in \Delta(\delta)$. Dann gilt*

- (i) $C_{P_\delta}(Z_\delta) = Q_\delta$.
- (ii) $P_\delta = \langle S_{\delta\lambda}, x \rangle$ fur alle $x \in P_\delta \setminus N(S_{\delta\lambda})$.
- (iii) (α', α) ist ein kritisches Paar.
- (iv) Ist P_δ nicht auflösbar, so gilt $J(K_\delta \cap S_{\delta\lambda}) = J(S_{\delta\lambda})$ und $|Z_\delta : \Omega_1(Z(J(S_{\delta\lambda})))| = q_\delta = |\Omega_1(Z(J(S_{\delta\lambda})))|$.
- (v) $Q_\lambda \leq K_\delta \cap S_{\delta\lambda}$,
- (vi) $Q_\alpha Z_{\alpha'} = Q_\alpha Q_{\alpha+1} = K_\alpha \cap S_{\alpha\alpha+1}$.
- (vii) $q_\alpha = q_{\alpha'}$.
- (viii) $R := |[Z_\alpha, Z_{\alpha'}]| = q_\alpha$ und $R \leq Z(K_\alpha \cap S_{\alpha\alpha+1})$.
- (ix) Sind P_δ und P_λ auflösbar, so gilt $|\Omega_1(Z(S_{\delta\lambda}))| \leq p^2$ und $|\Omega_1(Z(P_\delta))| \leq p$.

Beweis: (i) ist 6.10 (vi) in den neuen Bezeichnungen. (ii) folgt aus der Tatsache, daß P_δ von zwei verschiedenen p -Sylowgruppen erzeugt wird.

Wegen $Z_\alpha \not\leq Q_{\alpha'}$ und (i) ist $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \neq 1$, also $Z_{\alpha'} \not\leq Q_\alpha$; wegen $b = d(\alpha, \alpha')$ gilt (iii).

Nach Konstruktion ist $J(K_\delta \cap S_{\delta\lambda}) = J(T^x) = J(T_0^x)$, $x \in P$ geeignet, also folgt (iv) aus Satz 4.3.

Zu (v): Ist P_δ auflösbar, so ist $S_{\delta\lambda} \leq K_\delta = P_\delta$. Sei P_δ nicht auflösbar. Dann ist $\Omega_1(Z(J(S_{\delta\lambda})))$ ein eindimensionaler Teilraum von Z_δ , der von Q_λ zentralisiert wird (nach (iv), falls P_λ nicht auflösbar, und sonst wegen 6.8). Also folgt (v) aus Lemma 2.6.

Zu (vi): Wegen $Z_{\alpha'} \leq Q_{\alpha+1}$ ist $Q_\alpha Z_{\alpha'} \leq Q_\alpha Q_{\alpha+1} \leq K_\alpha \cap S_{\alpha\alpha+1}$.

Aufgrund der Symmetrie in α und α' können wir $q_\alpha \leq q_{\alpha'}$ annehmen. Wegen $Z_{\alpha'} \leq K_\alpha \cap S_{\alpha\alpha+1}$ gilt $|K_\alpha \cap S_{\alpha\alpha+1} : Q_\alpha| = q_\alpha \leq q_{\alpha'} = |Z_{\alpha'} : C_{Z_{\alpha'}}(Z_\alpha)| = |Z_{\alpha'} : Z_{\alpha'} \cap Q_\alpha| = |Q_\alpha Z_{\alpha'} : Q_\alpha|$, also (vi) und (vii), sowie mit $[Z_\alpha, Z_{\alpha'}] = [Z_\alpha, K_\alpha \cap S_{\alpha\alpha+1}]$ auch (viii).

Zu (ix): Setze $V := \langle \Omega_1(Z(S_{\delta\lambda}))^{P_\delta} \rangle$. Nach 2.13 gilt $V = [V, P_\delta] \times C_V(P_\delta)$. Also ist $|\Omega_1(Z(S_{\delta\lambda})) : \Omega_1(Z(P_\delta))| = p$, ebenso $|\Omega_1(Z(S_{\delta\lambda})) : \Omega_1(Z(P_\lambda))| = p$, und die Behauptung folgt aus $Z(P_\delta) \cap Z(P_\lambda) = 1$. ■

Lemma 6.12 (vi) zeigt, daß die Behauptung (vi) in Satz 6.10 o.B.d.A. ersetzt werden kann durch

$$(vi)' \quad P_i/O_p(P_i) \simeq SL_2(q_i),$$

indem man im Beweis dort $T_0 = O_p(P_1)O_p(P_2)$ wählt. Aus Bequemlichkeitsgründen sei dieses im folgenden angenommen. Es gilt also

$$K_\alpha = P_\alpha$$

für alle $\alpha \in \Gamma$.

6.13 Satz: Sei $\alpha - 1 \in \Delta(\alpha) \setminus \{\alpha + 1\}$, so daß $(\alpha - 1, \alpha' - 1)$ kein kritisches Paar ist. Dann gilt

- (i) $Z_\alpha Z_{\alpha-1} = Z_\alpha Z_\delta \trianglelefteq P_\alpha$ für alle $\delta \in \Delta(\alpha)$.
- (ii) Für jede zu $\alpha - 1$ konjugierte Ecke δ gibt es kein δ' , so daß (δ, δ') ein kritisches Paar ist,
- (iii) b ist gerade,
- (iv) $Q_\alpha \cap Q_{\alpha-1} \trianglelefteq P_\alpha$.

Beweis: Wegen $Z_{\alpha-1} \leq S_{\alpha'-1\alpha'} = Z_\alpha Q_{\alpha'}$ ist $[Z_{\alpha-1} Z_\alpha, Z_{\alpha'}] \leq Z_\alpha$, also $Z_{\alpha-1} Z_\alpha \trianglelefteq \langle S_{\alpha-1\alpha}, Z_{\alpha'} \rangle = P_\alpha$ (vgl. Lemma 6.12 (ii)). Der Rest von (i) folgt aus der Transitivität von P_α auf $\Delta(\alpha)$.

Da $Z_\alpha Z_{\alpha-1}$ ein p -Normalteiler von P_α ist, folgt $b \geq 2$. Angenommen, (ii) ist falsch. Sei δ konjugiert zu $\alpha - 1$, $\delta' \in \Gamma$, (δ, δ') kritisches Paar und $\delta + 1 \in \Delta(\delta)$ mit $d(\delta', \delta + 1) = b - 1$. Dann ist $\delta + 1$ konjugiert zu α , also $Q_{\delta'} \not\leq Z_\delta Z_{\delta+1} = Z_{\delta+2} Z_{\delta+1}$ für ein $\delta + 2 \in \Delta(\delta + 1)$ mit $d(\delta + 2, \delta') = b - 2$, im Widerspruch zur Minimalität von b . Also gilt (ii), damit ist α' nicht konjugiert zu $\alpha - 1$, und dies zeigt (iii).

Aus Lemma 6.12 (i) folgt (iv). ■

6.14 Satz: Sei $b > 1$ und $\alpha - 1 \in \Delta(\alpha) \setminus \{\alpha + 1\}$. Dann ist $(\alpha - 1, \alpha' - 1)$ kein kritisches Paar, oder es ist $b = 2$, $q = 3$, $|Q_\delta| = 3^5$, Q_δ hat Exponent 3 und $Q_\delta/(Z_\delta Z(P_\delta))$ sowie Z_δ sind natürliche Moduln zu P_δ/Q_δ für alle $\delta \in \Gamma$.

Beweis: Sei $(\alpha - 1, \alpha' - 1)$ ein kritisches Paar. Sei $\alpha - 2 \in \Delta(\alpha - 1) \setminus \{\alpha\}$ und $\alpha' + 1 \in \Delta(\alpha') \setminus \{\alpha' - 1\}$. Wegen 6.13 (ii) sind $(\alpha - 2, \alpha' - 2)$ und $(\alpha + 1, \alpha' + 1)$ kritische Paare.

Für $i \in \{0, 1, 2\}$ setze

$$R_i := [Z_{\alpha-i}, Z_{\alpha'-i}].$$

Wegen 6.12 (i) gilt $1 \neq R_i \leq Z(Q_{\alpha'-i})$ und $R_i \leq Z(S_{\alpha-i\alpha+1-i})$, also

$$R_i \leq Z(\langle Z_{\alpha'+1-i}, S_{\alpha-i\alpha+1-i} \rangle) = Z(P_{\alpha+1-i}).$$

Wegen (C) sind damit alle $P_\delta, \delta \in \Gamma$ auflösbar.

Angenommen, es wäre $b > 2$. Dann ist $Z_{\alpha'} \leq Q_{\alpha'-2}$, also $[R_2, Z_{\alpha'}] = 1$, und mit $R_2 \leq Z(P_{\alpha-1})$ folgt $R_2 \leq Z(\langle S_{\alpha-1\alpha}, Z_{\alpha'} \rangle) = Z(P_\alpha)$ im Widerspruch zu 6.11 (iii). Also ist

$$(1) \quad b = 2.$$

Für $i \in \{0, 1\}$ setze $D_{\alpha+i} := Q_{\alpha+i-1} \cap Q_{\alpha+i+1}$ und $X_{\alpha+i} := C_{D_{\alpha+i}}(\langle Z_{\alpha+i-2}, Z_{\alpha+i+2} \rangle)$. Dann ist $[D_\alpha, Z_{\alpha+2}] \leq [Q_{\alpha+2}Z_\alpha, Z_{\alpha+2}] = [Z_\alpha, Z_{\alpha+2}] \leq Z_\alpha \leq D_\alpha$ und analog $[D_\alpha, Z_{\alpha-2}] \leq D_\alpha$. Damit folgt

$$(2) \quad D_\alpha \trianglelefteq \langle Z_{\alpha+2}, D_\alpha, Z_{\alpha-2} \rangle = P_\alpha.$$

Wegen $X_\alpha = Q_{\alpha-2} \cap D_\alpha \cap Q_{\alpha+2}$ ist $D_\alpha = X_\alpha Z_\alpha$ und damit $\Phi(D_\alpha) = \Phi(X_\alpha)$. Aus $X_\alpha \leq D_{\alpha+1}$ folgt $\Phi(D_\alpha) \leq \Phi(D_{\alpha+1})$, also $\Phi(D_\alpha) = \Phi(D_{\alpha+1}) \trianglelefteq P$ wegen der Symmetrie in α und $\alpha + 1$. Aus 6.10 (x) folgt

$$(3) \quad \Phi(D_\alpha) = 1.$$

Wegen $Q_\alpha = D_\alpha Z_{\alpha-1} Z_{\alpha+1}$ ist $D_\alpha \leq Z(Q_\alpha)$. Aus Satz 2.13 folgt $D_\alpha = Z_\alpha Z(P_\alpha)$, also $|Q_\alpha| = p^5$ (beachte 6.12 (ix)). Die Operation von P_α auf $\Delta(\alpha)$ liefert die natürliche Operation auf Q_α/D_α .

Damit gilt $Q_\alpha = \bigcup_{\delta \in \Delta(\alpha)} Z_\delta D_\alpha$, und Q_α hat Exponent p .

Wegen $[Z_{\alpha-1}, Z_{\alpha+1}] \neq 1$ ist Q_α nicht abelsch, also folgt $p \neq 2$, d.h. $p = 3$. ■

6.15 Satz: *Es ist $P_1 \simeq P_2$, und es gilt einer der drei Fälle:*

- (i) P_1 ist isomorph zum natürlichen semidirekten Produkt einer $SL_2(p^n)$ mit einer elementarabelschen Gruppe der Ordnung p^{2n} .
- (ii) $p^n \in \{2, 3\}$ und P_1 ist isomorph zum direkten Produkt einer zyklischen Gruppe der Ordnung p mit einer Gruppe wie in (i) beschrieben.
- (iii) Es ist $p = 3$, $P_1/O_3(P_1) \simeq SL_2(3)$, $Q := O_3(P_1)$ hat Exponent 3 und Ordnung 3^5 und $|Z(Q)| = 3^3$. P_1/Q operiert natürlich auf $Q/Z(Q)$ und $Z(Q)/Z(P_1)$.

Beweis: Gelte nicht die Situation von Fall (iii). Setze $\beta := \alpha + 1$. Sei $b > 1$ angenommen und $\alpha - 1 \in \Delta(\alpha) \setminus \{\beta\}$. Nach Satz 6.14 gilt:

$(\alpha - 1, \alpha' - 1)$ ist kein kritisches Paar.

Wegen 6.13 (iv) gilt $X := Q_\alpha \cap Q_\beta \trianglelefteq P_\alpha$. Setze $\bar{P}_\alpha := P_\alpha/X$. Es gilt $|\bar{Q}_\beta| = q_\alpha$. Setze $L := \langle Q_{\alpha-1}, Q_\beta \rangle$. Dann gilt

- (i) $O_p(L) = C_L(Z_\alpha) = L \cap Q_\alpha$.
- (ii) $L/O_p(L) \simeq SL_2(q_\alpha)$ operiert natürlich auf Z_α .
- (iii) $L = \langle Q_\beta^{P_\alpha} \rangle \trianglelefteq P_\alpha$.
- (iv) $C_L(O_p(L)) \leq O_p(L)$.
- (v) $O_p(L) = X$, insbesondere ist $Q_\beta \in \text{Syl}_p(L)$.

(i) bis (iv) sind einfache Konsequenzen aus der Struktur von P_α .

Zu (v): Aus 6.12 (vi) folgt $\overline{S}_{\alpha\beta} = \overline{Q}_\alpha \times \overline{Q}_\beta \simeq Z_p^{q_\beta} \times Z_p^{q_\alpha}$. Also besitzt $O_p(\overline{L}) = \overline{Q}_\alpha \cap \overline{L}$ ein Komplement in $\overline{S}_{\alpha\beta} \cap \overline{L}$, also auch ein Komplement \overline{L}_0 in \overline{L} nach dem Satz von Gaschütz. Nach dem Satz von Sylow können wir $\overline{Q}_{\alpha-1} \leq \overline{L}_0$ annehmen, und es existiert $g \in \overline{L}_0 \overline{Q}_\alpha$ mit $\overline{Q}_\beta \leq \overline{L}_0^g$. Wir können $g \in \overline{Q}_\alpha$ annehmen. Dann folgt $\overline{Q}_{\alpha-1}, \overline{Q}_\beta \leq \overline{L}_0$, also $\overline{L}_0 = \overline{L}$ und damit die Behauptung.

Sei zuerst $p = 2$. Sei $N \trianglelefteq L$ mit $N \text{ char } Q_\beta$. Dann ist $N \trianglelefteq P_\beta$, also $N = 1$ nach 6.11 (iii). Mit [Ba] folgt

$$(*) \quad [O_2(L), L] = Z_\alpha.$$

Setze $V_\beta := \langle Z_\delta | \delta \in \Delta(\beta) \cup \{\beta\} \rangle \trianglelefteq P_\beta$. Ist $V_\beta \leq O_2(L)$, so ist $V_\beta \trianglelefteq L$ im Widerspruch zu Satz 6.11 (iii). Also $V_\beta \not\leq O_2(L)$ und damit $b = 2$.

Sei $t \in P_\beta$ mit $\alpha^t = \alpha'$. Die Operation von P_β auf $\Delta(\beta)$ ist isomorph zu der auf den $B_{\alpha\beta}$ -Rechtsnebenklassen in P_β durch Rechtsmultiplikation bewirkten Operation. Wegen Lemma 2.9 können wir annehmen, daß t ungerade Ordnung hat. Setze $D := O_2(L) \cap O_2(L^t)$. Es gilt $O_2(L) = Z_\alpha D$ und $O_2(L^t) = Z_{\alpha'} D$, damit $Q_\beta = O_2(L) O_2(L^t) = Z_\alpha Z_{\alpha'} D$ und $\Phi(O_2(L)) = \Phi(D) = \Phi(O_2(L^t))$, also $\Phi(D)^t = \Phi(D)$. Daher operiert t auf $Q_\beta / \Phi(D)$. Können wir zeigen, daß $Q_\beta / \Phi(D)$ genau zwei maximale elementarabelsche Untergruppen besitzt (nämlich $O_2(L) / \Phi(D)$ und $O_2(L^t) / \Phi(D)$), dann normalisiert t schon $O_2(L)$ im Widerspruch zu $Z_\alpha^t = Z_{\alpha'}$.

Sei $x \in L$ ein Element ungerader Ordnung, das fixpunktfrei auf Z_α operiert (bspw. im Fall $q_\alpha = 2$ eines der Ordnung 3, sonst eines aus dem Normalisator einer 2-Sylowgruppe). Mit (*) folgt $O_2(L) = Z_\alpha \times C_{O_2(L)}(x)$ und $O_2(L)' = Z_\alpha \cap C_{O_2(L)}(x)' = 1$. Mit $D^{[2]} := \langle d^2 | d \in D \rangle = \{d^2 | d \in D\}$ (D ist abelsch) ist $\Phi(D) = D' D^{[2]} = D^{[2]}$. Für $\lambda \in \{\alpha, \alpha'\}$ sei $z_\lambda \in Z_\lambda \setminus D$. Dann ist $[z_\alpha, z_{\alpha'}] \neq 1$, also hat $y := z_\alpha z_{\alpha'}$ mindestens Ordnung 4, und wegen $D \leq Z(Q_\beta)$ ist $y \notin D$. Angenommen $y^2 \in D^{[2]}$. Sei $d \in D$ mit $d^2 = y^2$. Dann ist $U := \langle y, d \rangle$ eine abelsche Gruppe der Ordnung $2o(y)$. Also existiert ein $u \in U$ mit $U = \langle y \rangle \times \langle u \rangle$ und $o(u) = 2$. Es folgt $d = y^l u$ für ein $l \in \mathbb{N}$ mit $l \equiv 1 \pmod{2}$. Aus $u \in D$ folgt $y^l \in D$ und damit $y \in D$ im Widerspruch zu oben. Also ist $u \notin D$ und damit $uD \in Z_\alpha D / D \cup Z_{\alpha'} D / D$. Dann aber ist $[u, y] \neq 1$ im Widerspruch zu $U = \langle y \rangle \times \langle u \rangle$.

Also ist $o((z_\alpha \Phi(D))(z_{\alpha'} \Phi(D))) \neq 2$, und damit sind $O_2(L) / \Phi(D)$ und $O_2(L^t) / \Phi(D)$ die einzigen maximalen elementarabelschen Untergruppen von $Q_\beta / \Phi(D)$.

Sei nun $p \neq 2$. Dann existiert $t \in \text{Inv}(L)$ mit $\langle \overline{t} \rangle = Z(\overline{L})$.

Wir betrachten zuerst den Fall $P_\beta^t = P_\beta$. $\overline{C_L(t)} = C_{\overline{L}}(\overline{t}) = \overline{L}$ ist transitiv auf $\Delta(\alpha)$, und $Q_\alpha = C_{Q_\alpha}(t)[Q_\alpha, t] = C_{Q_\alpha}(t)O_p(L)$. Damit ist $C_{Q_\alpha}(t)Q_\beta = Q_\alpha Q_\beta = S_{\alpha\beta}$ eine p -Sylowgruppe von P_β mit $[S_{\alpha\beta}/Q_\beta, t] = 1$. Nach Hilfssatz 2.8 induziert t einen inneren Automorphismus auf P_β/Q_β , es folgt $[P_\beta/Q_\beta, t] = 1$, und $C_{P_\beta}(t)$ ist transitiv auf $\Delta(\beta)$. Aus Lemma 6.11 (i) folgt

$$t \in D := \bigcap_{g \in P} P_{\alpha^g}.$$

Wegen $D \trianglelefteq P$ folgt $O_p(D) = 1$ und $DQ_\alpha/Q_\alpha \in \{P_\alpha/Q_\alpha, O^p(P_\alpha/Q_\alpha), Z(P_\alpha/Q_\alpha), 1\}$. Aus den ersten drei Alternativen folgt $Z_\alpha \leq D$, also der Widerspruch $1 \neq O_p(D)$, die letzte scheidet aus Ordnungsgründen aus.

Also ist $t \notin N_G(P_\beta)$. Aus der Operation von $\langle t \rangle$ auf Z_α folgt $\langle t \rangle Q_\alpha = Z(P_\alpha/Q_\alpha)$. Existiert eine Involution x mit $P_\alpha^x = P_\beta$, so ist $Q_\alpha \cap Q_\beta = (Q_\alpha \cap Q_\beta)^x \leq P_\alpha^x = P_\beta$, ein Widerspruch zu Satz 6.10 (x).

Also folgt aus 6.10 $t \in N_G(L_\beta) = L_\beta$. Setze

$$V := [Q_\alpha, O^p(P_\alpha)] \leq [Q_\alpha, \langle Q_\beta^{P_\alpha} \rangle] = \langle [Q_\alpha, Q_\beta]^{P_\alpha} \rangle \leq Q_\alpha \cap Q_\beta.$$

Damit folgt

$$[S_{\alpha\beta}, t] = [S_{\alpha\beta}, t, t] \leq [Q_\alpha, t] \leq Q_\beta.$$

Setze $\tilde{L}_\beta := L_\beta/O_p(L_\beta)$. $E := O^p(P_\beta)$ ist eine $J(T)$ -Komponente von L_β , daher gilt $\tilde{E} \simeq SL_2(q)$, ferner ist $S \cap E \in \text{Syl}_p(\tilde{E})$. Aus der Struktur von P_β folgt $[\tilde{E}, \tilde{Q}_\beta] = 1$. Nach 2.13 zentralisierten sich \tilde{E} und \tilde{E}^t . Es gilt $\text{Syl}_p(\tilde{E}^t) \ni (S \cap E)^t \leq S \cap E \tilde{V} \leq C_{\tilde{L}_\beta}(\tilde{E}^t)$, ein Widerspruch zur Struktur von \tilde{E}^t .

Also gilt

$$b = 1.$$

Nach 6.12 (vii) ist $q_\alpha = q_\beta$.

Aus 6.12 (vi) folgt

$$Q_\alpha = Z_\alpha(Q_\alpha \cap Q_\beta).$$

Mit der Symmetrie in α und β folgt $\Phi(Q_\alpha) = \Phi(Q_\alpha \cap Q_\beta) = \Phi(Q_\beta)$, also

$$\Phi(Q_\alpha) = 1$$

nach Satz 6.10 (x). Ist P_α nicht auflösbar, so folgt $Q_\alpha = Z_\alpha$ aus Satz 3.3.

Andernfalls ist P_α/Q_α wie in Satz 2.13, also $Q_\alpha = [Q_\alpha, P_\alpha] \times C_{Q_\alpha}(P_\alpha) = Z_\alpha \times Z(P_\alpha)$. Nach 6.12 (ix) ist $|Z(P_\alpha)| \leq p$.

Nach Satz 3.3 bzw. Struktur der auflösbaren $J(T)$ -Komponenten existiert ein $A \in \mathcal{A}(T)$ mit $AQ_\alpha \in \text{Syl}_p(P_\alpha)$, also besitzt Q_α ein Komplement in $S_{\alpha\beta}$, also auch in P_α nach dem Satz von Gaschütz. Symmetrie in α und β , $|P_\alpha|_p = |P_\beta|_p$ und Konjugiertheit von $\{P_\alpha, P_\beta\}$ zu $\{P_1, P_2\}$ liefern die Behauptung, ausgenommen die Tatsache, daß im Fall (ii) nur $p = 2$ sein kann. Dies zeigen wir nun:

Angenommen, es ist $p = 3$, die $P_\delta, \delta \in \Gamma$ sind auflösbar und $Z(P_\delta) \neq 1$. Für $\delta \in \Gamma$ bezeichne mit L_δ die eindeutig bestimmte, maximale 3-lokale Untergruppe mit $P_\delta \leq L_\delta$. Ist $P_\delta = P_i^g$ für ein $i \in \{1, 2\}, g \in G$, so ist also $L_\delta = L_i^g$.

- (1) Seien α, β benachbarte Ecken in Γ und $t_\alpha \in \text{Inv}(N_{L_\alpha}(S_{\alpha\beta}))$. Dann ist $t_\alpha \in L_\beta$, und es existiert $\gamma \in \Delta(\beta) \setminus \{\alpha\}$ mit $t_\alpha \in N_G(S_{\beta\gamma})$.

Wegen $\mathcal{A}(S_{\alpha\beta}) = \{O_3(P_\alpha), O_3(P_\beta)\}$ ist $t_\alpha \leq N_G(O_3(P_\beta)) = L_\beta$ nach 6.16. Wegen $|\text{Syl}_3(P_\beta)| = 4$ und $o(t_\alpha) = 2$ existiert γ wie beschrieben.

- (2) Seien α, β benachbarte Ecken in Γ und für $\delta \in \{\alpha, \beta\}$ sei $t_\delta \in \text{Inv}(P_\delta)$ mit $\langle t_\delta \rangle O_3(P_\delta)/O_3(P_\delta) = Z(P_\delta/O_3(P_\delta))$. Wähle γ wie in (1) und analog $\zeta \in \Delta(\alpha) \setminus \{\beta\}$ mit $t_\beta \in N_G(S_{\zeta\alpha})$. Dann gilt: t_α zentralisiert $Z(P_\alpha) = Z_\beta \cap Z_\gamma$ und invertiert Z_α , und t_β zentralisiert $Z(P_\beta) = Z_\alpha \cap Z_\zeta$ und invertiert Z_β .

Setze $V = Z(S_{\alpha\beta})$. Nach Struktur von P_α ist $C_V(t_\alpha) = Z(P_\alpha)$, also ist $V = C_V(t_\alpha) \times [V, t_\alpha]$ eine nichttriviale Zerlegung von V . Nach (1) ist sie sogar t_β -invariant. Da $Z(P_\alpha) \cap Z(P_\beta) = 1$, folgt $Z(P_\beta) = [V, t_\alpha] \leq Z_\alpha$ und $Z(P_\alpha) = [V, t_\beta] \leq Z_\beta$. Damit ist $[Z_\beta, t_\alpha] = Z_\beta \cap Z_\alpha$ und $C_{Z_\beta}(t_\alpha) = Z(P_\alpha)$. Da $Z_\beta \cap Z_\gamma$ invariant unter t_α ist, folgt $Z(P_\alpha) = Z_\beta \cap Z_\gamma$. Analog ergibt sich die Behauptung für t_β .

Wie oben existieren $\delta \in \Delta(\gamma) \setminus \{\beta\}$ mit $t_\alpha \in L_\delta$ und $\varepsilon \in \Delta(\delta) \setminus \{\gamma\}$ mit $t_\alpha \in L_\varepsilon$. Wähle t_δ analog zu t_α . t_α invertiert $Z_\delta \cap Z_\varepsilon = Z(P_\gamma) = Z_\alpha \cap Z_\beta$ und $Z_\gamma \cap Z_\delta = Z(P_\beta)$ und zentralisiert $Z(P_\delta) = Z_\beta \cap Z_\gamma = Z(P_\alpha)$. Also ist $t_\alpha t_\delta \in C_G(O_p(L_\delta)) \leq O_p(L_\delta)$, d.h. $t_\alpha = t_\delta$. Für $v \in O_p(L_\delta)$ folgt analog $t_\alpha = t_\delta^v$, also $t_\delta \in C_G(O_p(L_\delta)) \leq O_p(L_\delta)$, ein Widerspruch. ■

6.16 Satz: *Für $i = 1, 2$ ist $L_i = N_G(P_i) = N_G(O_p(P_i))$. Insbesondere ist $O_p(L_i) = O_p(P_i)$.*

Beweis: Der zweite Teil der Behauptung folgt aus dem ersten und 6.10 (iii).

Sei $i \in \{1, 2\}$ und $(P, L) := (P_i, L_i)$. Ist P nicht auflösbar, so folgt die Behauptung aus Satz 6.7 und der Bemerkung nach Lemma 6.12.

Sei daher P auflösbar. Aus der Struktur von P und 6.10 (iii) folgt $|\Omega_1(Z(O_p(L)))| \leq p^3$. Wegen $\Omega_1(Z(T)) = \Omega_1(Z(T_0))$ ist $\Omega_1(Z(O_p(L))) = \langle \Omega_1(Z(T))^L \rangle = \Omega_1(Z(O_p(P)))$. Damit ist nur noch der Fall (iii) aus Satz 6.15 zu betrachten. Aus Satz 3.3 und Kapitel 5 folgt, daß L genau eine $J(T)$ -Komponente besitzt. Aus der Operation von K auf $O_p(P)/\Omega_1(Z(O_p(L)))$ folgt $O_p(P) \leq K$, also $O_p(P) = O_p(L)$ und $P = J(L)O_p(L) \trianglelefteq L$. Aus der Maximalität von L folgt die Behauptung. ■

Wir wollen die Struktur der L_i noch etwas genauer untersuchen. Sei dazu $(L, P) := (L_i, P_i)$ für ein $i \in \{1, 2\}$, $V \trianglelefteq P$ natürlicher Modul von $P/O_p(P)$ und $X := C_L(P/O_p(P))$. Sei V_0 ein eindimensionaler Unterraum von V . Dann ist normalisiert X schon $V_0 = C_V(C_P(V_0))$, also operiert X durch Skalarmultiplikation auf V und $X/C_X(V)$ ist isomorph zu einer Untergruppe von $Z(GL(V))$.

Im Fall (i) aus Satz 6.15 ist $C_L(V) = C_L(O_p(L)) = O_p(L)$, also ist $L/(XP)$ isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Out}SL_2(q)$ und $(XP)/O_p$ operiert treu als Untergruppe von $Z(GL_2(q))SL_2(q)$ auf $O_p(P) = V$. $O^p(L)$, d. i. der $GL_2(q)$ -Anteil von L mit den von L auf P induzierten p' -Körperautomorphismen, zerfällt über V nach dem Satz von Gaschütz (vgl. Beweis von Satz 6.15).

Seien $\{i, j\} = \{1, 2\}$ und $T \in \text{Syl}_p(L_i)$. Sei nun $p \neq 2$. Sei $x \in T$ ein Element der Ordnung p , das auf $\bar{P} := P_i/O_p(P_i)$ einen äußeren Automorphismus induziert. Dann zentralisiert x eine zu $SL_2(p^{\frac{n}{p}})$ isomorphe Untergruppe $\bar{P}_0 \leq \bar{P}$, also auch $O^p(P_0)$. Aus (C) folgt $p = n \in \{2, 3\}$.

Ist $p = 2$, so besitzt T genau zwei maximale elementarabelsche Untergruppen, nämlich $O_p(L_1)$ und $O_p(L_2)$. Also ist $T \leq N_G(O_p(L_j)) = L_j$, d. h. $T \in \text{Syl}_p(L_j)$. Insgesamt ergibt sich $\text{Syl}_p(L_1 \cap L_2) \subseteq \text{Syl}_p(L_i)$ außer im Fall $q = 3^3$. Da wir in dieser Arbeit hauptsächlich demonstrieren wollen, wie wirkungsvoll die Analyse der $J(T)$ -Komponenten auch im nichtauflösbaren Fall ist, wollen wir diesen Sonderfall nicht weiter untersuchen, sondern uns damit zufriedengeben, daß die Struktur der L_i bereits sehr eingeschränkt ist.

Im Fall (ii) aus Satz 6.15 ist $C_L(V) \cap C_L(O_p(L)/V)$ eine p -Gruppe, also $C_L(V) = O_p(L)$ und damit $P = L$.

Im Fall (iii) aus Satz 6.15 schließlich ist $|C_L(V) : O_p(L)| \leq 2$ und ebenfalls $Z(GL(V)) \leq SL(V)$. Also ist $|L : XP| \leq 2$ und $|XP : P| \leq 2$.

6.17 Satz: *G besitzt eine stark p -eingebettete Untergruppe, oder es existieren zwei maximale p -lokale Untergruppen, die ‚im wesentlichen‘ gleich den in 6.15 beschriebenen P_i sind. Ihre genauere Struktur ist oben analysiert.*

Beweis: Sei M wie am Anfang des Kapitels eingeführt. Ist $\mathcal{T}(M) = \emptyset$, so ist M stark p -eingebettet in G nach Lemma 6.3. Andernfalls existieren L_1, L_2, P_1, P_2 wie in 6.10, und diese haben nach 6.15 und der folgenden Analyse eine Struktur wie behauptet. ■

Abschließend wollen wir einige Beispiele zeigen, die die Voraussetzungen dieses Abschnitts erfüllen.

Beispiel 1: Seien $q = p^n$ sowie

$$\begin{aligned} G &:= \{A \mid \det(A) = 1, \forall i, j \in \{1, \dots, 3\} \exists a_{ij} \in GF(q) : A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, 3\}}\} \simeq SL_3(q), \\ P_1 &:= \{(a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, 3\}} \in G \mid a_{31} = a_{32} = 0\} \quad \text{und} \\ P_2 &:= \{(a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, 3\}} \in G \mid a_{21} = a_{31} = 0\}. \end{aligned}$$

Dann sind

$$\sigma_1 : P_1 \rightarrow SL_2(q); \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$$

und

$$\sigma_2 : P_2 \rightarrow SL_2(q); \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

Epimorphismen mit

$$\text{Kern } \sigma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b \in GF(q) \right\} \simeq Z_p^{2n}$$

bzw.

$$\text{Kern } \sigma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b \in GF(q) \right\} \simeq Z_p^{2n}.$$

Offenbar sind

$$K_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \middle| a, b, c, d \in GF(q) \right\} \simeq SL_2(q)$$

bzw.

$$K_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \in G \middle| a, b, c, d \in GF(q) \right\} \simeq SL_2(q)$$

Komplemente zu diesen Kernen, und sie operieren in natürlicher Weise auf ihnen.

$$\text{Es ist } S := P_1 \cap P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in GF(q) \right\} \in \text{Syl}_p(G).$$

G operiert auf $V := GF(q)^3$ durch Rechtsmultiplikation. Es gilt

$$Z := \Omega(Z(S)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in GF(q) \right\}$$

und $C_G(Z) \leq N_G(C_V(Z)) = P_2$, also folgt $C_G(Z) \leq S$ aus der Operation von K_2 auf Kern σ_2 . Damit gilt (Z) . Man rechnet schnell nach, daß auch (\mathcal{C}) und (\mathcal{L}) gelten.

Für alle $c \in GF(q)$ ist P_1 transitiv auf $\{(a, b, c) \mid a, b \in GF(q)\} \setminus \{(0, 0, c)\}$ und P_2 auf $\{(0, a, b) \mid a, b \in GF(q)\} \setminus \{0\}$. Also ist $P := \langle P_1, P_2 \rangle$ transitiv auf $V \setminus \{0\}$. Es gilt $P_1 = C_G((0, 0, 1))$, also ist $C_G(v) \leq P$

für alle $v \in V \setminus \{0\}$. Damit ist $S^g \leq C_G((0, 0, 1)^g) \leq P$ für alle $g \in G$, also $G = \langle S^g \rangle \leq P$, da G quasieinfach.

Beispiel 2: Sei $G = S_6$. Setze $a := (12)$ und $P_1 := C_G(a) = \langle a \rangle \times S_{\{3,4,5,6\}}$. Es ist $O_2(P_1) \simeq Z_2^3$ und $P_1/O_2(P_1) \simeq S_3$. a und $b := (12)(34)(56)$ sind unter $\text{Aut } G$ konjugiert, also ist $P_2 := C_G(b) \simeq P_1$. $S := P_1 \cap P_2 = C_G(\langle a, b \rangle) = \langle a \rangle \times C_{S_{\{3,4,5,6\}}}((34)(56)) \simeq Z_2 \times D_8$ ist eine Sylowgruppe von G . Neben a^G und b^G existiert genau eine weitere Konjugiertenklasse von Involuntionen, nämlich $((12)(34))^G$. Wegen $C_G((12)(34)) = C_{S_{\{1,2,3,4\}}}((12)(34)) \times S_{\{5,6\}}$ gilt (\mathcal{C}) . Aus $C_G(\Omega(Z(S))) = C_G(\langle a, b \rangle) = P_1 \cap P_2 = S$ folgt (\mathcal{Z}) . Ein kurzer Blick auf die übrigen 2-Gruppen zeigt (\mathcal{L}) . Wegen $|\langle P_1, P_2 \rangle| \geq |P_1 P_2| = 144$ hat $\langle P_1, P_2 \rangle$ höchstens Index 5 in G , also folgt $\langle P_1, P_2 \rangle = G$.

Beispiel 3: Sei $G = G_2(3)$. G ist die Automorphismengruppe eines verallgemeinerten Sechsecks mit je 364 Ecken und Kanten derart, daß jedes dieser Objekte mit vier anderen inzident ist. Ihre Stabilisatoren sind semidirekte Produkte einer Z_2 mit einer Gruppe, die isomorph zu P_1 wie in Satz 6.15 (iii) ist, und sie sind maximale Untergruppen (also insbesondere maximale 3-lokale Untergruppen). Sei $S \in \text{Syl}_3(G)$. Wir können $S \in \text{Syl}_3(L_1)$ annehmen, und wegen $C_G(\Omega_1(Z(S))) \leq C_G(Z(L_1)) \leq L_1$ folgt (\mathcal{Z}) aus der Struktur von L_1 . Eine Untersuchung der maximalen Untergruppen liefert (\mathcal{C}) , als Gruppe vom Lie-Typ hat G lokale Charakteristik 3.

Das folgende Lemma über die Struktur der p -Sylowgruppen der L_i werden wir im nächsten Abschnitt benötigen.

6.18 Lemma: Sei $L := L_1$ wie in Fall (i) von Satz 6.15 und $T \in \text{Syl}_p(L)$. Dann zerfällt T über $J(T)$.

Beweis: Setze $P := P_1$ und $T_0 := T \cap P$. Dann liefert das Frattini-Argument

$$N_L(T_0)P = L.$$

Setze $N := N_L(T_0)$ und sei K ein Komplement von T_0 in $N_P(T_0)$ (ein solches existiert, da $P/O_p(P) \simeq SL_2(q)$ ist). Wieder liefert das Frattini-Argument $N = T_0 N_N(K)$, es folgt

$$L = P N_N(K).$$

Sei $T_1 \in \text{Syl}_p(N_N(K))$. Dann gilt $T_0 \cap T_1 = 1$ (da sogar $T_0 \cap N_N(K) = 1$ ist) und $T_0 T_1 \in \text{Syl}_p(L)$. Wegen $T_0 = J(T)$ folgt die Behauptung. ■

7 Ein Spezialfall

In diesem Abschnitt wollen wir den Spezialfall $p = 2$ genauer untersuchen.

7.1 Satz: *Sei G eine endliche Gruppe der lokalen Charakteristik 2 mit $O_2(G) = 1$. Gelte (C) und (Z)*

Dann existiert eine stark eingebettete Untergruppe von G , oder es existieren zwei maximale 2-lokale Untergruppen L_1 und L_2 von $H := O^2(G)$, die isomorph sind zum natürlichen semidirekten Produkt einer $SL_2(2^n)$ enthaltenden Untergruppe der $\Gamma L_2(2^n)$ auf einer elementarabelschen Gruppe der Ordnung 2^{2n} . Es gilt $|L_1 \cap L_2|_2 = |L_1|_2 = |L_2|_2 = 2^{3n}$, im Fall $n \geq 2$ sogar $Syl_2(L_1) \subseteq Syl_2(H)$.

Beweis: Besitze G keine stark eingebettete Untergruppe. Dann existieren Untergruppen P_1, L_1, P_2, L_2 wie in 6.15 bis 6.18 beschrieben. Der Fall, daß diese Gruppen auflösbar sind, wurde bereits in [KS] behandelt. Wir können also annehmen, daß Fall (i) von Satz 6.15 vorliegt mit $n \geq 2$. Sei $i \in \{1, 2\}$. Setze $M_i := L_i \cap H$. Es gilt $P_i \leq M_i$. Sei M eine maximale 2-lokale Untergruppe von H , die M_i enthält. Dann gilt

$$N_{O_2(M)}(O_2(P_i)) \leq O_2(M) \cap L_i \cap H \leq O_2(M) \cap M_i \leq O_2(M_i) \leq O_2(L_i) = O_2(P_i)$$

nach 6.16, also $O_2(M) \leq O_2(L_i)$. Aus der Operation von P_i auf $O_2(P_i)$ folgt $O_2(P_i) = O_2(M)$, d. h. $M = M_i$ ist maximale 2-lokale Untergruppe von H .

Sei $T \in Syl_2(M)$ und $T \leq R \in Syl_p(H)$. Setze $R_0 := N_R(J(T))$. Wegen $|\mathcal{A}(T)| = 2$, $V := \Omega_1(Z(O_2(M))) \in \mathcal{A}(T)$ und $M = N_H(V)$ ist $|R_0 : T| \leq 2$. Angenommen, es wäre $J(R_0) > J(T)$. Sei $B \in \mathcal{A}(R_0) \setminus \mathcal{A}(T)$. Wegen $|B : B \cap T| = 2$ existiert $t \in B$ mit $B = \langle t \rangle (B \cap T)$ und t vertauscht die beiden Elemente von $\mathcal{A}(T)$. Es gilt $|B \cap T : B \cap J(T)| \leq 2$ und $B \cap J(T) \leq \bigcap \mathcal{A}(T) = \Omega_1(Z(J(T))) =: Z_0$, also $q^2 \leq |B| = 4|B \cap J(T)| \leq 4q$, also $q = 4$ und $B \cap J(T) = Z_0$. Dies ist ein Widerspruch dazu, daß ein Element aus $\text{Inv}(T) \setminus J(T)$ (und ein solches liegt in B) auf Z_0 einen Körperautomorphismus induziert, insbesondere also Z_0 nicht zentralisiert. Damit gilt $J(R_0) = J(T)$, also

$$(1) \quad J(T) = J(R)$$

nach 2.3 und damit

$$(2) \quad |R : T| \leq 2.$$

Angenommen, es wäre $T < R$, d. h. $|R : T| = 2$ und R/T vertauscht die beiden Elemente von $\mathcal{A}(T)$. Nach Verlagerungstheorie (betrachte die Fokalgruppe) existiert ein $y \in R \setminus T$, das unter H konjugiert ist zu einem Element aus T . Wir können daher annehmen, daß es ein $g \in H$ gibt mit $y \in T^g$ und für mindestens eine der beiden Gruppen R und R^g liegt der Schnitt mit $C_H(y)$ in $Syl_2(C_H(y))$. Bezeichne diese mit X , die andere mit Y . Die oben beschriebenen Eigenschaften von y, X, Y, R und g sind invariant unter Konjugation mit Elementen aus $C_H(y)$, also kann $C_Y(y) \leq X$ angenommen werden. Insbesondere gilt $\Omega_1(Z(Y)) = Z(Y) \leq X$.

Wegen der unterschiedlichen Operation von y auf $\mathcal{A}(R)$ und $\mathcal{A}(R^g)$ ist

$$(3) \quad \mathcal{A}(R) \cap \mathcal{A}(R^g) = \emptyset.$$

Existiert ein $A \in \mathcal{A}(X)$ mit $Z(Y) \leq A$, so folgt $A \leq Y$ aus (Z). Dies ist ein Widerspruch zu (3). Also ist

$$(4) \quad Z(Y) \not\leq J(X).$$

Setze $X_1 := C_X(\mathcal{A}(X))$, d.h. X_1 ist das eindeutig bestimmte Konjugierte von T in X . Wir betrachten zunächst den Fall $Z(Y) \not\leq X_1$:

Durch geeignete Wahl von y können wir $y \in Z(R^g)$ annehmen, also $R^g \in \text{Syl}_2(C_H(y))$ und $C_{J(R)}(y) \leq R^g$. Betrachte zuerst den Fall $D := Z_0 \cap Z_0^g \neq 1$. Setze $C := C_H(D)$. Sei $x \in H$ mit $R_1 := R^x \cap C \in \text{Syl}_2(C)$ und $V := \langle \Omega_1(Z(R_1))^C \rangle$. Nach 2.16 und 2.17 ist V ein elementarabelscher Normalteiler von C . Wegen $\langle y \rangle J(R) \leq C$ ist $V \leq Z_0$, also $V = D$. Aus $\Omega_1(Z(R^x)) \leq V$ folgt 2-Abgeschlossenheit von C , also $J(R) = J(R^g)$ im Widerspruch zu (3). Damit gilt insbesondere

$$(*) \quad C_{Z_0}(y) \cap Z_0^g = 1.$$

Da y quadratisch auf Z_0 operiert, ist $|C_{Z_0}(y)| \geq \sqrt{q} > 2$ oder $q = 4$. Im ersten Fall ist $n \leq 4$ wegen (*), und eine Involution $y_0 \in Z(R) \setminus J(R^g)$ — vgl. (4) — ist wegen der Transitivität von H auf $\text{Inv}(Z_0)$ konjugiert zu einer Involution aus $T^g \setminus J(T^g)$, d.h. es existiert ein $h \in H$ mit $y \in T^h \setminus J(T^h)$. Nach Konjugation in $C_H(y_0)$ können wir $C_{R^h}(y_0) \leq R$ annehmen. y_0 operiert quadratisch auf den Elementen von $\mathcal{A}(R^h)$, also besitzt $C := C_{J(R^h)}(y_0)$ zwei normale elementarabelsche Untergruppen der Ordnung 2^n . Der Fall $n > 2$ liefert sofort $C \leq J(R)$ und damit $Z(R^h) \leq Z_0$, und aus (Z) folgt der Widerspruch $J(R) = J(R^h)$. Sei also $n = 2$ und $D_8 \simeq C \not\leq J(R)$. Aus der Struktur von R folgt $Z^h = Z(C) \leq J(R)$. Wegen (Z) ist $\mathcal{A}(R) \cap \mathcal{A}(R^h) \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Operation von y_0 auf den Elementen von $\mathcal{A}(R)$ und $\mathcal{A}(R^h)$.

Also können wir $q = 4$ und $|C_{Z_0}(y)| = 2$ annehmen. Setze $\Omega := \{r^{-1}r^y \mid r \in J(R)\}$ und $\overline{R} := R/Z_0$. Dann ist $\overline{\Omega} \subseteq C_{\overline{J(R)}}(y)$ und $|C_{\overline{J(R)}}(y)| = 4$, also $|\Omega| \leq 2^4$. Aus $|\Omega| = |J(R) : C_{J(R)}(y)|$ folgt $|C_{J(R)}(y) \geq 4|$. Insbesondere existiert ein $x \in C_{J(R)}(y)$ mit $o(x) = 4$ und $\langle x^2 \rangle = Z$. Wegen $x \in R^g$ folgt $Z \leq \langle z^2 \mid z \in R^g \rangle \leq J(R^g)$ im Widerspruch zu (4). Damit gilt

$$(5) \quad Z(Y) \leq X_1.$$

Sei $A \in \mathcal{A}(X)$ mit $Z(Y) \cap J(X) \leq A$. Setze $A_1 := C_A(Z(Y))$ und $A_2 := Z(Y)A_1$. Dann ist $|A_1| = 2^n$ und $|A_2| = 2^{n+1}$. Ist $Z(Y) = \langle y_0 \rangle$ für ein $y_0 \in Y$, so folgt für (y_0, X, Y) anstelle von (y_0, R^h, R) analog zu oben ein Widerspruch. Also ist $|Z(Y)| \geq 4$. $A_1 = \Omega_1(C_{J(X)}(Z(Y)))$ ist y -invariant, wegen $A_1 \not\leq Z(J(X))$ ist A durch A_1 eindeutig bestimmt und damit ebenfalls y -invariant, also $X = R^g$. A_2 ist y -invariant, also $A_2 \not\leq J(R)$. Aus $Z(X) \leq T$ folgt wie oben $Y = R^g$. Also existiert $y_0 \in Z(R^g) \setminus T$. In bezug auf y_0 statt y haben X und Y genau die entgegengesetzten Rollen und es ergibt sich ein Widerspruch zu (5). Also ist

$$(6) \quad T = R.$$

Angenommen, es wäre $R > J(R)$. Dann ist R ein semidirektes Produkt einer zyklischen Gruppe $\langle z \rangle \neq 1$ auf dem Normalteiler $J(R)$. Wiederum mit Verlagerungstheorie folgt, daß z konjugiert ist zu einem Element aus $\langle z^2 \rangle J(R)$. Also ist $z_0 := z^{\frac{1}{2}o(z)}$ konjugiert zu einem Element aus $J(R)$, d.h. es existiert ein $g \in H$ mit $z_0 \in J(R^g)$. O. B. d. A. können wir $R^g \cap C_H(z_0) \in \text{Syl}_2(C_H(z_0))$ annehmen und nach Konjugation in $C_H(z_0)$ auch $C_R(z_0) \leq R^g$. Hieraus folgt für (z_0, R, R^g) anstelle von (y_0, R^h, R) wie oben ein Widerspruch.

Damit zerfällt T über V , also auch M nach dem Satz von Gaschütz. ■

Wie in [KS] folgt:

7.2 Satz: Sei G eine Gruppe gerader Ordnung mit $O_2(G) = 1 = O_{2'}(G)$, in der (C) und (Z) gelten. Sei $S \in \text{Syl}_2(G)$, $Z := \Omega_1(Z(S))$, $H := O^2(G)$ und $R := H \cap S$. Dann gilt einer der folgenden Fälle:

- (i) H besitzt eine stark eingebettete Untergruppe.
- (ii) $Z \simeq Z_2$, $Z \leq R$, und Z ist schwach abgeschlossen in R bezüglich H .
- (iii) $\Omega_1(R) = Z \simeq Z_2 \times Z_2$.
- (iv) H hat lokale Charakteristik 2, und es existieren zwei maximale 2-lokale Untergruppen L_1, L_2 von H , die isomorph sind zum natürlichen semidirekten Produkt einer $SL_2(2^n)$ enthaltenden Untergruppe der $\Gamma L_2(2^n)$ auf einer elementarabelschen Gruppe der Ordnung 2^{2n} . Es gilt $|L_1 \cap L_2|_2 = |L_1|_2 = |L_2|_2 = 2^{3n}$, im Fall $n \geq 2$ sogar $\text{Syl}_2(L_1) \subseteq \text{Syl}_2(H)$.

Literatur

- [A] M. Aschbacher, *Finite Group Theory*, Cambridge University Press, 1986
- [Ba] B. Baumann, *Über endliche Gruppen mit einer zu $L_2(2^n)$ isomorphen Faktorgruppe*, Proc. AMS **74** (1979) S. 215–222
- [Be] H. Bender, *Transitive Gruppen gerader Ordnung, in denen jede Involution genau einen Punkt festläßt*, J. Alg. **17** (1971) S. 527–554
- [DGS] A. Delgado, D. Goldschmidt, B. Stellmacher, *Groups and Graphs: New Results and Methods*, Birkhäuser Verlag, 1985
- [G] G. Glauberman, *Weakly Closed Elements of Sylow Subgroups*, Math. Zeitschr. **107** (1968) S. 1–20, Theorem 2
- [H] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1967
- [Hua] Loo-Keng Hua, *On the Automorphisms of the Symplectic Group on any Field*, Annals of Math. **49** (1948) S. 739–759, Appendix
- [L1] J. McLaughlin, *Groups Generated by Transvections*, Arch. Math. **18** (1967) S. 364–368
- [L2] J. McLaughlin, *Some Subgroups of $SL_n(\mathbf{F}_2)$* , Illinois J. Math. **13** (1969) S. 108–115
- [KS] H. Kurzweil u. B. Stellmacher, *Theorie der endlichen Gruppen*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1998
- [PGV] Oberseminarvortrag von A. Chermak in Kiel im Sommersemester 1997

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, daß ich die vorliegende Arbeit selbst verfaßt habe und keine anderen Hilfsmittel als die angegebene Literatur und den Rat meines wissenschaftlichen Lehrers verwendet habe.