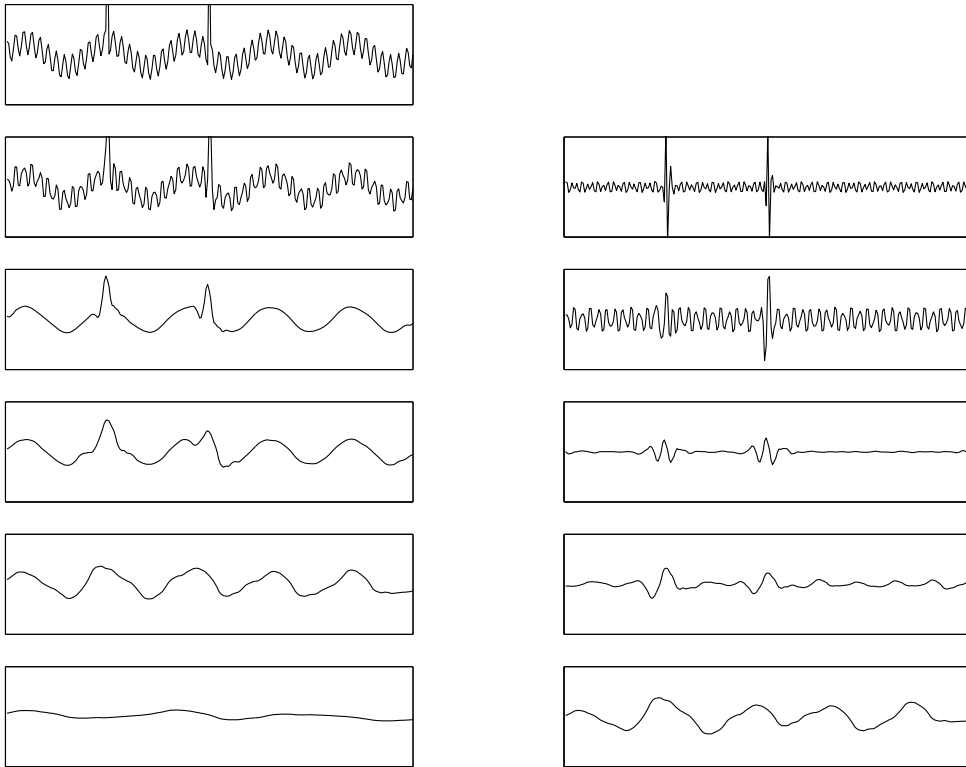


# Zeit-Frequenz-Analyse und Wavelettransformationen

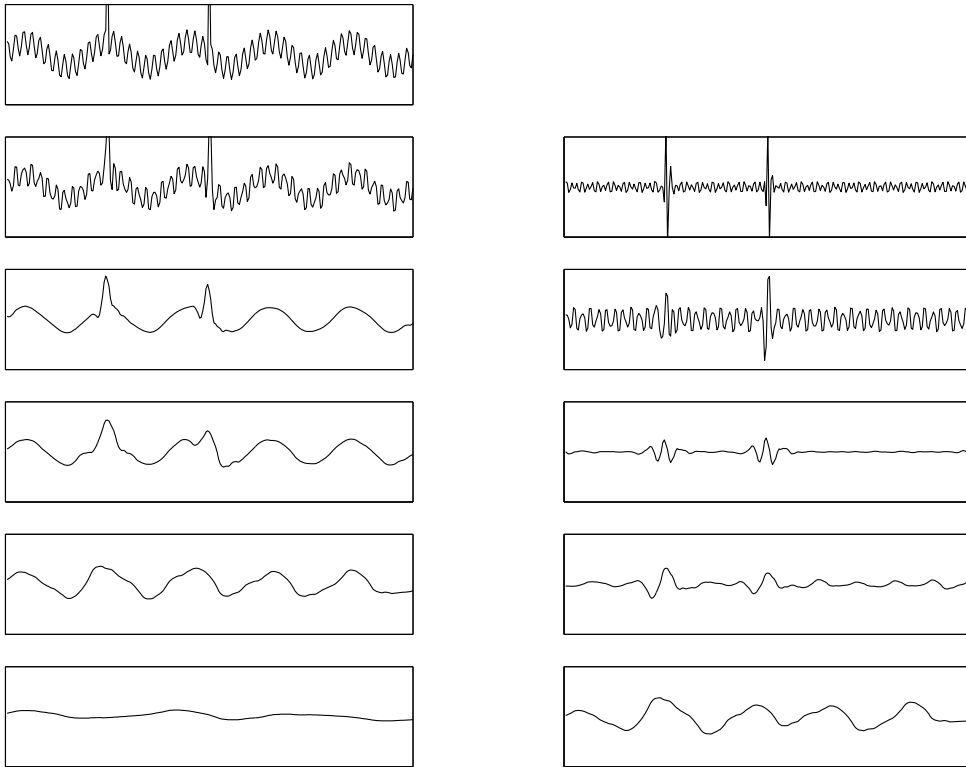


Skript zur Vorlesung

Sommersemester 2001



# Zeit-Frequenz-Analyse und Wavelettransformationen



Skript zur Vorlesung

Sommersemester 2001



# Vorwort

Das vorliegende Skript ist eine Ausarbeitung der im Wintersemester 1998/1999 gehaltenen Vorlesung **Audiosignalverarbeitung II** und behandelt die Grundlagen der Zeit-Frequenz-Analyse und die Theorie der Wavelet- und Filterbanktransformationen. Obwohl diese Vorlesung auf der Vorlesung Audiosignalverarbeitung I des Sommersemesters 1998 aufbaut, wurde versucht, dieses Skript in sich selbst abgeschlossen zu gestalten. Insbesondere findet man in Kapitel 1 in gestraffter Form die benötigten signaltheoretischen Grundlagen, die ausführlicher im Skript [ASVI] behandelt werden.

Dieses Skript richtet sich insbesondere an Studierende der Informatik und Mathematik. An einigen Stellen wurde auf Beweise verzichtet, die man aber in der angegebenen Literatur nachlesen kann. Dennoch wurde auf exakte Definitionen und eine saubere Darstellung viel Wert gelegt. Einige der in der Vorlesung aus Zeitmangel weggelassenen Beweise werden hier sehr detailliert geführt. Besonderes Augenmerk haben wir auf die Anschauung und die Darstellung von Querverbindungen zwischen den verschiedenen Theorien gelegt, die für die Intuition unabdingbar sind.

Wir möchten den kritischen Hörern der Vorlesung danken und hoffen auf weitere Rückmeldungen und Verbesserungsvorschläge (bitte an Michael Clausen oder Meinard Müller leiten). Unser besonderer Dank richtet sich an Herrn Frank Kurth für seine hilfreichen fachlichen Kommentare und für sein kritisches Korrekturlesen.

Bonn, März 1999

Michael Clausen, Meinard Müller



# Vorwort zur zweiten Version

Das vorliegende Skript stimmt bis auf die Verbesserung einiger kleiner Fehler mit dem der Vorlesung „Audiosignalverarbeitung II“ vom Wintersemester 1998/1999 überein und dient als wesentliche Grundlage für die Vorlesung des Sommersemesters 2001.

Wir bedanken uns bei den Studierenden, die uns auf einige der Fehler des ursprünglichen Skriptes aufmerksam gemacht haben.

Bonn, März 2001

Michael Clausen, Meinard Müller



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>iii</b>
<b>Einleitung</b>	<b>xi</b>
<b>1 Mathematische Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1 Funktionenräume . . . . .	1
1.1.1 Integrierbarkeit . . . . .	1
1.1.2 Lebesguesche Räume . . . . .	3
1.1.3 Frames, Basen, Orthogonalität . . . . .	5
1.2 Fourier-Analyse . . . . .	6
1.2.1 Fourierreihen . . . . .	6
1.2.2 Fourierintegrale, Fouriertransformation . . . . .	8
1.2.3 Fouriertransformation von Folgen . . . . .	10
1.2.4 Diskrete Fouriertransformation . . . . .	10
1.3 Faltung . . . . .	11
1.3.1 LTI-Systeme . . . . .	12
1.3.2 Faltung von Folgen . . . . .	12
1.3.3 Faltungsfilter . . . . .	13
1.3.4 Faltung auf der reellen Achse . . . . .	14
1.4 Diskretisierung kontinuierlicher Signale . . . . .	15
1.4.1 Abtastung . . . . .	15
1.4.2 Das Abtasttheorem von Shannon . . . . .	16
1.5 Beispiele zur Fouriertransformation . . . . .	17
1.5.1 Überlagerung von zwei Sinusschwingungen . . . . .	18
1.5.2 Chirpsignal . . . . .	19
1.5.3 Dirac-Folge . . . . .	20
1.5.4 Gaußsche Glockenkurve . . . . .	21

1.5.5	Rechteck-Funktion und sinc-Funktion . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Gefensterter Fouriertransformationen (WFT)</b>	<b>25</b>
2.1	Definition der WFT . . . . .	26
2.2	Beispiele . . . . .	27
2.2.1	Fensterfunktionen . . . . .	27
2.2.2	WFT des Chirp-Signals . . . . .	29
2.2.3	WFT in Abhängigkeit von der Fensterbreite . . . . .	32
2.3	Zeit-Frequenz-Lokalisierung der WFT . . . . .	35
2.3.1	Heisenbergsche Unschärferelation . . . . .	35
2.3.2	Informationszellen . . . . .	38
2.4	Rekonstruktion des Signals aus seiner WFT . . . . .	39
2.5	Diskrete Version der WFT . . . . .	40
2.6	Schwachpunkte der WFT . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Kontinuierliche Wavelettransformationen (CWT)</b>	<b>43</b>
3.1	Definition der CWT . . . . .	44
3.2	Beispiele für Wavelets . . . . .	47
3.2.1	Wavelets mit expliziten Formeln . . . . .	47
3.2.2	Daubechies-Wavelets . . . . .	49
3.3	Zeit-Frequenz-Lokalisierung der CWT . . . . .	50
3.4	Beispiele zur CWT . . . . .	53
3.4.1	CWT des Chirpsignals . . . . .	53
3.4.2	CWT einer überlagerten Sinusschwingung mit Impulsen . . . . .	56
3.5	Rekonstruktion der CWT . . . . .	59
3.6	Diskrete Version der CWT . . . . .	61
3.6.1	An die CWT angepaßte Gitter . . . . .	61
3.6.2	Wavelet-Frames . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Multiskalenanalyse (MRA) und Wavelettransformationen</b>	<b>67</b>
4.1	Multiskalenanalyse (MRA) . . . . .	67
4.1.1	Motivierende Analogie zur MRA . . . . .	67
4.1.2	Definition der MRA . . . . .	68
4.2	MRA und Wavelets . . . . .	71
4.2.1	Filterkoeffizienten der Skalierungsgleichung . . . . .	72
4.2.2	Filterkoeffizienten und Wavelets . . . . .	75

4.3	Schnelle Waveletalgorithmen . . . . .	77
4.3.1	Schnelle Diskrete Wavelettransformation (FDWT) . . . . .	78
4.3.2	Schnelle diskrete Waveletrekonstruktion (FIDWT) . . . . .	80
4.3.3	Aufwandsanalyse der FDWT und FIDWT . . . . .	81
4.3.4	Diskretisierungsschritt des Signals . . . . .	83
4.3.5	$P_m, Q_m$ und Waveletkoeffizienten . . . . .	84
4.4	Beispiel: Haar-MRA . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Anwendungen der DWT</b>	<b>93</b>
5.1	DWT-basierte Rauschunterdrückung . . . . .	94
5.1.1	Weißes Rauschen . . . . .	95
5.1.2	Thresholding . . . . .	99
5.1.3	Wahl der Schranke für Thresholding . . . . .	99
5.1.4	Algorithmus zur Rauschunterdrückung . . . . .	101
5.1.5	Beispiele zur Rauschunterdrückung . . . . .	103
5.1.6	Probleme und Ausblick . . . . .	108
5.2	DWT-basierte Kompression . . . . .	110
5.3	DWT-basierte Singularitätserkennung . . . . .	115
5.3.1	Unstetigkeitsstelle im Signal . . . . .	116
5.3.2	Unstetigkeitsstellen in der Ableitung . . . . .	118
5.3.3	Entdeckung von Langzeit-Entwicklungen . . . . .	119
<b>6</b>	<b>Filterbänke (FB) und perfekte Rekonstruktion (PR)</b>	<b>121</b>
6.1	Filtertheoretische Grundlagen . . . . .	123
6.1.1	Faltungsfiler . . . . .	123
6.1.2	Darstellungsbereiche für Filter . . . . .	124
6.1.3	Down- und Upsampling . . . . .	126
6.2	2-Band Filterbänke und PR-Bedingung . . . . .	131
6.2.1	PR-Eigenschaft . . . . .	132
6.2.2	Modulationsmatrizen und $PR_\ell$ -Charakterisierung . . . . .	134
6.2.3	Direkte $PR_\ell$ -Charakterisierung im Zeitbereich . . . . .	136
6.2.4	Matrixcharakterisierung der $PR_\ell$ -Eigenschaft . . . . .	138
6.2.5	Polyphasenzerlegung und Polyphasenmatrizen . . . . .	140
6.2.6	Kausale $PR_\ell$ -FB . . . . .	143
6.3	Orthonormale Filterbänke (ON-FB) . . . . .	144

6.3.1	Charakterisierungen von ON-FB . . . . .	144
6.3.2	Paraunitäre Matrizen . . . . .	147
6.3.3	Prototyp und Alternierender Flip . . . . .	147
6.3.4	Tiefpaß-Bedingung für den Prototyp . . . . .	150
<b>7</b>	<b>Zusammenhang zwischen Wavelets, MRA und ON-FB</b>	<b>153</b>
7.1	Schnelle DWT-Algorithmen und ON-FBs . . . . .	153
7.1.1	FDWT als Analysebank . . . . .	154
7.1.2	FIDWT als Synthesebank . . . . .	157
7.2	Konstruktion von 2-Band ON-FB . . . . .	158
7.2.1	Halbbandfilter . . . . .	158
7.2.2	Spektralfaktorisierung von positiven FIR-Filtern . . . . .	159
7.2.3	Spektralzerlegung von Halbbandfiltern . . . . .	162
7.2.4	Konstruktion der Daubechies-Halbbandfilter . . . . .	163
7.2.5	Daubechies- oder Maxflat-Filter . . . . .	166
7.2.6	Die Fälle $d = 1$ und $d = 2$ für Daubechies-Filter $D_d$ . . . . .	170
7.3	Konstruktion von MRAs und Wavelets . . . . .	171
7.3.1	Kaskadenalgorithmus für die Skalierungsfunktion . . . . .	171
7.3.2	Konstruktion von MRAs . . . . .	175
7.3.3	Konvergenzkriterien für den Kaskadenalgorithmus . . . . .	177
7.3.4	Kaskadenalgorithmus im $\omega$ -Bereich . . . . .	181
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>183</b>

# Einleitung

Wavelettransformationen sind die neuen „High-Tech-Tools“ im Werkzeugkasten der Signalverarbeitung und haben sich inzwischen in vielen anderen Bereichen von Mathematik, Physik und Technik etabliert. Wie so oft war der Anfang ein ingenieurmäßiger Zugang zu einem Anwendungsproblem, das mit den vorhandenen Mitteln, insbesondere der Fourieranalysis, nicht zufriedenstellend lösbar war. Ein Nachteil der Fouriertransformation ist das Fehlen einer Lokalisierungseigenschaft: ändert sich ein Signal an einer Stelle, so ändert sich die Transformierte überall, ohne daß durch bloßes Hinschauen die Stelle der Änderung gefunden werden kann. Der Grund ist natürlich die Verwendung der immer periodisch schwingenden trigonometrischen Funktionen. Verwendet man dagegen räumlich begrenzte Wavelets, „kleine Wellen“ oder „Wellchen“ sind Versuche einer Übersetzung ins Deutsche, so kann durch das Verschieben eine Lokalisierung und durch Stauchen eine Frequenzauflösung an der entsprechenden Stelle erreicht werden.

Das vorliegende Skript zur Vorlesung „Audiosignalverarbeitung II“ bietet eine Einführung in die Wavelettheorie. Dabei wird die Theorie von verschiedenen Perspektiven aus betrachtet. Der Zugang ausgehend von der klassischen Theorie der Fouriertransformation und gefensterter Fouriertransformation führt auf die Interpretation, wie die Wavelettransformation eines Signals als Phasenraumdarstellung, also als Darstellung in der Zeit-Frequenz-Ebene, aufgefaßt werden kann. Dieser Zugang läßt besonders gut die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der kontinuierlichen Wavelettheorie, die wir in **Kapitel 3** behandeln, zur klassischen gefensterter Fourieranalysis, die wir in **Kapitel 2** zusammenfassen, hervortreten. Daher wurde versucht, die Kapitel 2 und 3 möglichst parallel aufzubauen.

Bei allen Anwendungen steht natürlich die diskrete Transformation von zeitdiskreten Signalen im Vordergrund. Die Herleitung einer schnellen diskreten Wavelettransformation, die sogar schneller als die schnelle diskrete Fouriertransformation ist, erlaubt den praktischen Einsatz der Wavelettransformation. Theoretischer Hintergrund ist die Erzeugung einer Folge aufsteigender Unterräume, der Multiskalenanalyse. Dies ist der Gegenstand von **Kapitel 4**. Wer sich von der Einfachheit der Algorithmen überzeugen will, sollte sich Abschnitt 4.3 vornehmen. Eine gezielte Anwendung der Wavelettransformation erfordert wegen der Vielfalt der Wavelets allerdings einen Einblick in deren Hintergründe.

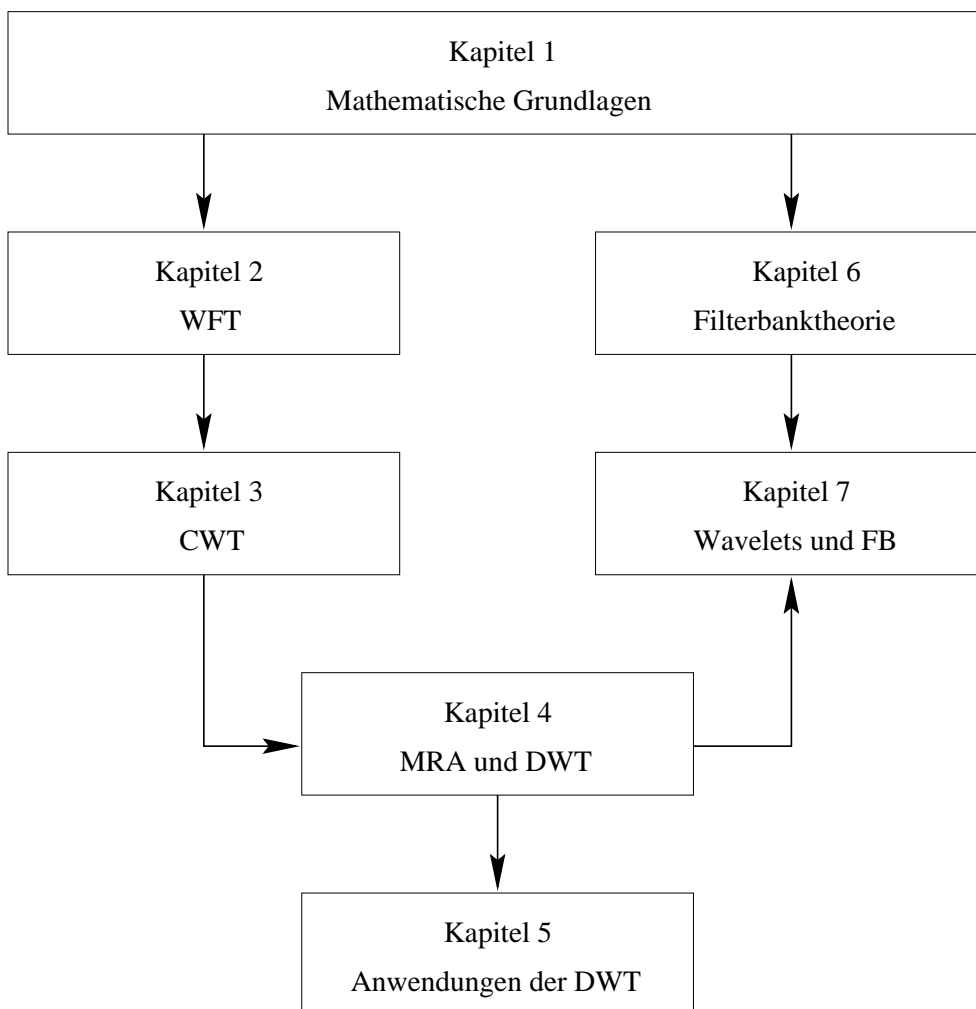
In **Kapitel 5** widmen wir uns einer Anwendung der diskreten Wavelettransformation im Bereich der digitalen Audiosignalverarbeitung: der Rauschunterdrückung bei verrauschten Audiosignalen. Hierbei wird die Eigenschaft von Wavelettransformationen ausgenutzt, daß die Information einer großen Klasse von Signalen in einer kleinen Anzahl von Waveletkoeffizienten konzentriert wird. Dies führt auf eine amplitudenbasierte Trennung der Rauschkomponenten vom eigentlichen Signal, welche mit herkömmlichen Methoden der Fourieranalyse nicht möglich ist. Aus ähnlichen Gründen findet die Wavelettransformation auch Anwendung in der Kompression von und Singularitätserkennung in Audiosignalen.

Die in Kapitel 4 behandelten diskreten Wavelettransformationen haben eine wichtige Verbindung zur wesentlich älteren und weiterentwickelten Theorie der Filterbänke. Erst als erkannt wurde, wie die diskrete Wavelettheorie als Spezialfall der Filterbanktheorie aufgefaßt werden kann, kam es zu der stürmischen Entwicklung in Forschung und Anwendung der Wavelets in den letzten 16 Jahren. In **Kapitel 6** behandeln wir daher die Theorie der Filterbänke, beschränken uns dabei aber auf eine kleine Klasse von Filterbänken. Dennoch werden schon anhand dieser kleinen Klasse die wesentlichen Ideen der Filterbanktheorie deutlich, bei der ein Signal in eine Menge von Subbandsignalen zerlegt wird, die bestimmte Aspekte des Originalsignals deutlicher hervortreten lassen oder sich besser zur weiteren Verarbeitung eignen. Wir haben Kapitel 6 bewußt relativ unabhängig von den restlichen Kapiteln dieses Skriptes gehalten, so daß es auch separat als Einführung in die Theorie der Filterbänke verwendet werden kann.

**Kapitel 7** stellt dann die Verbindung zwischen der diskreten Wavelettheorie und der Theorie der Filterbänke her. Aus dieser Perspektive heraus entwickeln wir Konstruktionsverfahren von Multiskalenanalysen und damit auch von Wavelets. Als Beispiel behandeln wir die Konstruktion der Daubechies-Wavelets, der vielleicht bekanntesten Familie von Wavelets. Wir finden damit über die Theorie der Filterbänke den Weg zurück zur Wavelettheorie und hiermit schließt sich der Kreis der Vorlesung.

Dieses Skript zur Vorlesung im Sommersemester 2001 ist eine leicht modifizierte Form des Skriptes zur Vorlesung Audiosignalverarbeitung II vom Wintersemester 1998/1999. Es werden einige Grundlagen der digitalen Audiosignalverarbeitung - u. a. Filter, Faltung, Fouriertransformation,  $z$ -Transformation, Abtasttheorem - vorausgesetzt, die z. B. im Skript der Vorlesung Audiosignalverarbeitung I vom Sommersemester 1998 zu finden sind. Um das Skript möglichst unabhängig zu gestalten, wurden in **Kapitel 1** die benötigten mathematischen Grundlagen, Definitionen und Sätze ohne Beweis zusammengefaßt. Obwohl diese Vorlesung keine Mathematikvorlesung sein soll, wurden viele Beweise durchgeführt, da sie für ein tieferes Verständnis des behandelten Stoffes unentbehrlich sind. An den Stellen, wo Beweise ausgelassen sind, findet man detaillierte Literaturhinweise. Besonders viel Wert wurde auf die Interpretation und eine anschauliche Darstellung der erhaltenen Resultate gelegt. Die zahlreichen Abbildungen sind daher nicht nur Schmuckwerk, sondern sollen ausgehend von den Beschreibungen der auftauchenden Phänomene zu weiteren Diskussionen und

selbständigen Experimentieren anregen. Hierfür sei das Softwarepaket MATLAB empfohlen, das auf die Bedürfnisse der digitalen Signalverarbeitung zugeschnitten ist und mit dem die meisten Abbildungen dieses Skriptes entworfen wurden. Für weitere Literaturhinweise verweisen wir auf das **Literaturverzeichnis**. Hier gehen wir ausführlich auf die für das Skript verwendeten Quellen ein, was eine nahtlose Fortführung für weitere, selbstständige Studien in der Audiosignalverarbeitung ermöglichen soll.





# Kapitel 1

## Mathematische Grundlagen

### 1.1 Funktionenräume

#### 1.1.1 Integrierbarkeit

Das *Riemann-Integral* einer Funktion  $f$  auf einem beschränkten Intervall  $[a, b]$  ist der Grenzwert der *Riemann-Summen*:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)(a_{k+1} - a_k).$$

Hierbei ist  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{N-1} < a_N = b$  eine beliebige Unterteilung,  $x_k \in [a_k, a_{k+1}]$  ein beliebiger Punkt aus dem  $k$ -ten Teilintervall der Unterteilung, und  $\Delta := \max\{|a_{k+1} - a_k| : 0 \leq k < N\}$  heißt die Schrittweite der Partition. Für  $\Delta \rightarrow 0$  folgt notwendig  $N \rightarrow \infty$ . Eine Funktion heißt *Riemann-integrierbar*, falls dieser Grenzwert existiert und unabhängig ist von der speziellen Wahl der Unterteilung und der Auswertpunkte  $x_k$  aus den Teilintervallen.

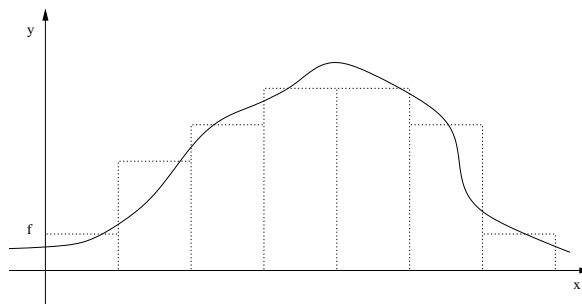


Abbildung 1.1: Das Riemann-Integral: Unterteilung des Definitionsbereichs in Teilintervalle.

Zwar sind die meisten der üblichen Funktionen Riemann-integrierbar (z. B. die auf dem Intervall  $[a, b]$  beschränkten und fast überall stetigen Funktionen), dennoch reicht das Konzept der Riemann-Integration nicht aus. Bei der Riemann-Integration gibt es Folgen integrierbarer Funktionen, deren Grenzwerte nicht

integrierbar sind. Mit anderen Worten ist Riemann-Integration beim Studium von Grenzverhalten kein geeignetes Hilfsmittel.

Deshalb geht man über zur *Lebesgue-Integration*, die unter Grenzprozessen wesentlich stabiler ist. Das Riemann-Integral unterteilt den **Definitionsbereich** von  $f$  in kleine Teilintervalle  $[a_k, a_{k+1}]$  und wählt einen beliebigen Repräsentanten  $f(x_k)$  für den Wertebereich von  $f$  über  $[a_k, a_{k+1}]$ . Im Gegensatz hierzu wird bei der Lebesgue-Integration der **Wertebereich** in kleine Intervalle zerlegt, und für jedes solche Intervall  $I$  bestimmt man die Menge  $D_I$  aus dem Definitionsbereich der Funktion  $f$ , so daß für jedes  $x \in D_I$  der Wert  $f(x)$  in diesem Intervall liegt. Man bestimmt dann das Maß  $\mu(D_I)$  von jeder Menge  $D_I$ , das heißt die „Größe“ dieser Mengen. Darunter kann man sich so etwas wie die Intervalllänge vorstellen. Allerdings sind die Mengen  $D_I$  im allgemeinen keine Intervalle, sondern äußerst komplizierte Mengen, deren Maßbestimmung, wenn überhaupt möglich, ein schwieriges Problem ist. Dies ist Inhalt der sogenannten *Maßtheorie*, bei der unter anderem definiert wird, was meßbare Mengen sind und wie man diesen Mengen ein Maß zuordnen kann. Funktionen  $f$ , bei denen beliebige Mengen  $D_I$  meßbar sind, nennt man dann *meßbare Funktionen*. Diese Eigenschaft ist Grundvoraussetzung für die Definition der Lebesgue-Integrierbarkeit. Analog zum Riemann-Integral betrachtet man die Summe über die Intervalle  $I$  der Unterteilung des Wertebereiches

$$\sum_{\text{Intervalle } I} f(x_I)\mu(D_I)$$

mit einem beliebigen  $x_I \in D_I$ , wobei zunächst nur positive Funktionen  $f$  zugelassen werden. Eine positive Funktion  $f$  heißt dann *Lebesgue-integrierbar*, falls der Grenzwert solcher Summen bei immer feineren Unterteilungen des Wertebereiches existiert und unabhängig von der speziellen Wahl der Unterteilung ist.

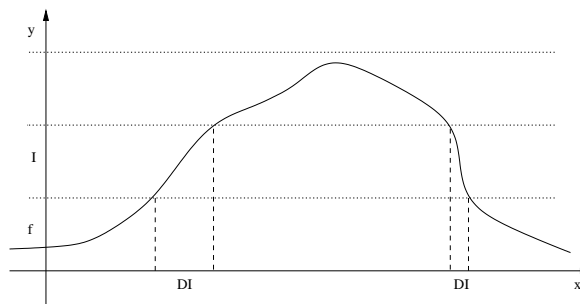


Abbildung 1.2: Das Lebesgue-Integral: Unterteilung des Wertebereiches in Teilintervalle.

Eine beliebige meßbare Funktion  $f$  heißt dann *Lebesgue-integrierbar*, wenn  $|f|$  Lebesgue-integrierbar ist. Den Raum dieser Funktionen bezeichnet man als Lebesgueschen Raum  $L^1([a, b])$  oder  $L^1(\mathbb{R})$ . Allgemeinere Lebesgue-Räume definieren wir im nächsten Abschnitt.

## 1.1.2 Lebesguesche Räume

Die (Lebesgueschen)  $L^p$ -Normen  $\|\cdot\|_p$  für  $1 \leq p \leq \infty$  sind für meßbare Funktionen  $f$  definiert durch

$$\begin{aligned}\|f\|_p &:= \sqrt[p]{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \|f\|_\infty &:= \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| = \inf\{a \geq 0 \mid \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\}.\end{aligned}$$

Man definiert dann die Lebesgueschen Räume  $L^p(\mathbb{R})$  durch

$$L^p(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ meßbar und } \|f\|_p < \infty\}.$$

Genau genommen besteht  $L^p(\mathbb{R})$  aus Äquivalenzklassen von Funktionen: zwei Funktionen  $f, g \in L^p(\mathbb{R})$  werden als gleich angesehen, wenn  $\|f - g\|_p = 0$ . Ersetzt man in den obigen Definitionen  $\mathbb{R}$  durch das Intervall  $[a, b]$ , ergeben sich die Lebesgue-Räume  $L^p([a, b])$  in ähnlicher Weise. Diese Räume können auch als Räume periodischer Funktionen mit der Periode  $b - a$  interpretiert werden. Ergänzendes zu den  $L^p$ -Räumen findet sich in der Literatur, beispielsweise in Folland: *Real Analysis* oder im *dtv-Atlas Mathematik II*.

Jede  $L^p$ -Norm induziert die invariante Metrik  $\operatorname{dist}_p(x, y) = \|x - y\|_p$ . Für jedes  $p$  ist der metrische Raum  $(L^p, \operatorname{dist}_p)$  vollständig. Insbesondere ist  $L^2$  ein Hilbert-Raum, wobei das *innere Produkt* (oder auch *Skalarprodukt*) definiert ist durch

$$\langle f | g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

**Bemerkung 1.1.1** Auf den ersten Blick scheinen die  $L^p$ -Räume im Rahmen der Signalverarbeitung ziemlich ungeeignet zu sein. Macht es Sinn von einem Signal  $f \in L^p(\mathbb{R})$  zu sprechen, wobei die Funktionen in  $L^p(\mathbb{R})$  doch nur bis auf eine Nullmenge definiert und somit zum Beispiel die Abtastung eines  $L^p(\mathbb{R})$ -Signals überhaupt nicht definiert werden kann? Warum beschränkt man sich also zum Beispiel nicht auf den Raum der stetigen Funktionen als Grundraum für zeitkontinuierliche Signale? Die Antwort hierauf ist typisch für die Mathematik. Die  $L^p$ -Räume und insbesondere der  $L^2$ -Raum mit seinem Skalarprodukt haben eine starke innere Struktur, die erst den Beweis von mathematischen Sachverhalten ermöglichen. Der  $L^2$ -Raum ist aus vielen Gründen beliebt:

- (1) Die Norm ist durch  $\|f\|^2 = \langle f | f \rangle$  direkt mit dem Skalarprodukt verbunden. Es gilt die Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle f | g \rangle| \leq \|f\| \|g\|,$$

die für viele Abschätzungen ein unentbehrliches mathematisches Hilfsmittel ist.

- (2) Durch das Skalarprodukt lassen sich Winkel und Orthogonalität definieren. Dies erst ermöglicht es, orthogonale Unterräume zu betrachten. Die Projektionen lassen sich sehr einfach mit Hilfe des Skalarproduktes angeben.
- (3) Ein besonders wichtiges Hilfsmittel in der Signaltheorie ist die Fouriertransformation. Diese kann (wenn auch mit einiger Mühe) auf dem  $L^2(\mathbb{R})$  definiert werden, und liefert dort eine Abbildung, die sowohl die Norm als auch das Skalarprodukt respektiert. Das ist die Parsevalsche Gleichung:

$$\|f\| = \|\hat{f}\| \quad \text{und} \quad \langle f|g \rangle = \langle \hat{f}|\hat{g} \rangle$$

für  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ . Diese Eigenschaften stellen sich bei der Frequenzanalyse von Signalen als äußerst hilfreich heraus.

Der Übergang zu den  $L^p$ -Räumen hat ihre Begründung also insbesondere in der Fülle von mathematischen Hilfsmitteln, die in diesen Räumen zur Verfügung gestellt werden. Den Preis, den man hierfür bezahlt, ist der Übergang zu einer Funktionenklasse, die signaltheoretisch wenig sinnvoll zu sein scheint. Erst unter geeigneten Zusatzbedingungen an unsere Signale ist eine Rückübersetzung in signaltheoretisch sinnvolle Funktionenräume möglich (z. B. stetige Funktionen), bei der dann zum Beispiel aus der  $L^p$ -Gleichheit die punktweise Gleichheit folgt.

Ersetzt man in obigen Definitionen  $\mathbb{R}$  durch  $\mathbb{Z}$ , so ergeben sich die Folgenräume  $\ell^p(\mathbb{Z})$ . Dabei gehen (unter Benutzung des Zählmaßes auf  $\mathbb{Z}$ ) die Integrale in Summen über. Man kann also die Folgenräume  $\ell^p(\mathbb{Z})$  als Spezialfall der Lebesgueschen Räume auffassen. Die Definitionen sind wie folgt, wobei  $x$  eine Folge bezeichne:

$$\begin{aligned} \|x\|_p &:= \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|x\|_\infty &:= \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|, \\ \ell^p(\mathbb{Z}) &:= \{x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \|x\|_p < \infty\}. \end{aligned}$$

Die quadratisch-summierbaren Folgen bilden den Hilbertraum  $\ell^2(\mathbb{Z})$  mit dem inneren Produkt

$$\langle x|y \rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) \overline{y(n)}.$$

Im folgenden werden wir die Notation  $\|\cdot\|$  und  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  verwenden, ohne dabei die Norm in  $L^p$  oder  $\ell^p$  oder das innere Produkt in  $L^2$  oder  $\ell^2$  durch Indizierung hervorzuheben, sofern der jeweilige Raum aus dem Zusammenhang klar hervorgeht.

**Bemerkung 1.1.2** Man kann auch allgemein Folgenräume  $\ell^p(I)$  für beliebige Indexmengen  $I$  definieren. Da die Indexmenge  $I$  dann auch überabzählbar sein

kann, muß der (unendliche) Summationsbegriff geeignet verallgemeinert werden. Dann kann  $\ell^p(I)$  analog zu oben definiert werden. Uns interessieren jedoch im folgenden nur die (abzählbaren) Fälle  $I = \mathbb{Z}$ ,  $I = \mathbb{N}$  und  $I = [1 : N]$ ,  $N \in \mathbb{N}$ .

### 1.1.3 Frames, Basen, Orthogonalität

Ist  $H$  ein Hilbert-Raum und  $I$  eine geeignete Indexmenge, so nennt man ein System  $\{\phi_n : n \in I\} \subset H$  eine *Orthonormalbasis* oder *ON-Basis* von  $H$ , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- *Orthogonalität:* Aus  $n, m \in I$  und  $n \neq m$  folgt  $\langle \phi_n | \phi_m \rangle = 0$ ;
- *Normierung:* Für alle  $n \in I$  gilt  $\|\phi_n\| = 1$ ;
- *Vollständigkeit:* Aus  $f \in H$  und  $\langle f | \phi_n \rangle = 0$  für alle  $n \in I$  folgt  $f = 0$ .

Ist  $\{\phi_n : n \in I\}$  eine Orthonormalbasis, so können wir die Norm einer Funktion  $f$  aus den Skalarprodukten mit den Funktionen  $\phi_n$  nach der *Formel von Parseval* berechnen:

$$\|f\|^2 = \sum_{n \in I} |\langle f | \phi_n \rangle|^2.$$

Weiterhin hat die Funktion  $f$  die Entwicklung (man könnte diese Entwicklung auch als verallgemeinerte Fourierreihe bezeichnen):

$$f = \sum_{n \in I} \langle f | \phi_n \rangle \phi_n.$$

Zudem definiert die Abbildung

$$H \rightarrow \ell^2(I), \quad f \mapsto (\langle f | \phi_n \rangle)_{n \in I}$$

einen Isomorphismus von Hilberträumen, eine sogenannte *unitäre Transformation*. Unitäre Transformationen erhalten Winkel und Längen.

Uns interessiert insbesondere der Fall  $I = \mathbb{Z}$ , der zum Beispiel für  $H = L^2([0, 1])$  relevant ist, und der Fall  $I = [1 : N]$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , der zum Beispiel für  $H = \mathbb{C}^N$  mit Standardskalarprodukt zutrifft.

Orthogonalität impliziert lineare Unabhängigkeit. Es kann aber erwünscht sein, ein System  $\{\phi_n : n \in I\}$  zu konstruieren, das weder orthogonal noch linear unabhängig ist, aber dennoch zur Approximation von Funktionen dienen kann. Eine wichtige Eigenschaft ist die, daß die Vergleichbarkeit von  $\|f\|$  mit der Quadratsumme der Skalarprodukte erhalten bleibt. Wir nennen ein Funktionensystem  $\{\phi_n : n \in I\}$  einen *Frame*, falls es zwei Konstante  $A$  und  $B$  gibt mit  $0 < A \leq B < \infty$ , so daß für jedes  $f \in H$  gilt:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n \in I} |\langle f | \phi_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

$A$  und  $B$  heißen dann die *Frame-Schranken*. Im Falle  $A = B$  spricht man von einem *bündigen Frame* (tight frame). Eine Orthonormalbasis ist ein bündiger Frame mit  $A = B = 1$ , aber nicht jeder bündige Frame mit solchen Schranken ist eine Orthonormalbasis. Ist das System  $\{\phi_n : n \in I\}$  ein Frame und gleichzeitig linear unabhängig, so sprechen wir von einer *Riesz-Basis*.

## 1.2 Fourier-Analyse

Die *Fouriertransformation* ist ein mathematisches Prisma, welches eine Funktion  $f$  in die bestehenden Frequenzen aufbricht, genauso wie ein Prisma das Licht in die einzelnen Farbkomponenten aufbricht. Sie transformiert eine Funktion  $f$ , abhängig von der Zeit, in eine neue Funktion  $\hat{f}$ , abhängig von der Frequenz. Diese neue Funktion heißt *Fouriertransformierte* von  $f$  - oder, wenn  $f$  eine periodische Funktion ist, *Fourierreihe*.

Eine Funktion und ihre Fouriertransformation spiegeln zwei Seiten derselben Information wider. Die Funktion selbst zeigt die Zeitinformation und versteckt die Frequenzinformation. Die Fouriertransformierte zeigt die Frequenzinformation, aber die Zeitinformation ist verschlüsselt in der *Phase* (Verschiebung der Grundfrequenzen) und in den Amplituden der einzelnen Frequenzen. Anschaulich gibt die Fouriertransformation von Musik an, welche Noten (Frequenzen) gespielt werden, aber der Zeitpunkt, zu dem diese Noten gespielt werden, ist nicht direkt erkennbar.

### 1.2.1 Fourierreihen

Ein Signal  $f \in L^2([0, 1])$  kann durch periodische Fortsetzung als 1-periodisches Signal  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  aufgefaßt werden, dessen Einschränkung auf das Intervall  $[0, 1]$  eine quadrat-integrierbare Funktion ist. Mit dieser Identifikation kann man die Theorie des Hilbertraumes  $H = L^2([0, 1])$  auf solche 1-periodischen Signale anwenden. Ein Hilbertraum  $H$  besitzt im allgemeinen unendlich viele Orthonormalbasen. Im Hilbertraum  $H = L^2([0, 1])$  sind zwei Basen besonders ausgezeichnet und bekannt. Den Beweis des folgenden Satzes findet man in den meisten einführenden Büchern über Funktionalanalysis:

**Satz 1.2.1** *Der Hilbertraum  $L^2([0, 1])$  besitzt (u. a.) folgende zwei ON-Basen:*

- (1)  $\{1, \sqrt{2} \cos(2\pi kt), \sqrt{2} \sin(2\pi kt) \mid k \in \mathbb{N}\}$
- (2)  $\{e^{2\pi ikt} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

Aufgrund dieses Satzes ist jedes  $f \in L^2([0, 1])$  darstellbar als Fourierreihe

$$f(t) = a_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kt) + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi kt).$$

Die Fourierkoeffizienten ergeben sich aus den Skalarprodukten der Funktion  $f$  mit den Basisfunktionen des ON-Systems:

$$\begin{aligned} a_0 &= \langle f|1 \rangle = \int_0^1 f(t) dt \\ a_k &= \langle f|\sqrt{2} \cos(2\pi kt) \rangle = \sqrt{2} \int_0^1 f(t) \cos(2\pi kt) dt \\ b_k &= \langle f|\sqrt{2} \sin(2\pi kt) \rangle = \sqrt{2} \int_0^1 f(t) \sin(2\pi kt) dt \end{aligned}$$

Die Fourierkoeffizienten  $a_1, a_2, a_3, \dots$  drücken aus, mit welcher Intensität die Funktionen  $\cos(2\pi t), \cos(2\pi 2t), \cos(2\pi 3t), \dots$  (d. h. Cosinusfunktionen der Frequenz 1 Hertz, 2 Hertz, 3 Hertz, ...) in  $f$  „enthalten“ sind. Analog für die Koeffizienten  $b_1, b_2, b_3, \dots$ . Eine Fourierreihe berücksichtigt nur ganze Vielfache der Grundfrequenz.

Wir betrachten nun anstelle obigen Systems die Orthonormalbasis  $\{e^{2\pi ikt} : k \in \mathbb{Z}\}$  von  $L^2([0, 1])$ . (Erinnerung:  $e^{2\pi ikt} = \cos(2\pi kt) + i \sin(2\pi kt)$ .) Für eine Funktion  $f \in L^2([0, 1])$  ergibt sich dann die Fourierreihe (in komplexer Schreibweise) durch die Reihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikt}$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$c_k = \langle f|e^{2\pi ikt} \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{e^{2\pi ikt}} dt = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi ikt} dt.$$

**Warnung:** Die Gleichheit in den Fourierreihendarstellungen ist die Gleichheit im  $L^2$ -Sinne, d. h. Gleichheit fast überall oder Gleichheit bis auf eine Nullmenge. Unter Zusatzvoraussetzungen an  $f$  gilt auch die punktweise Gleichheit, z. B. falls  $f$  stetig differenzierbar ist. In diesem Fall konvergiert die Fourierreihe sogar gleichmäßig auf  $[0, 1]$  gegen  $f$ .

Der folgende Satz besagt, daß man den  $L^2([0, 1])$  über die Fourierkoeffizienten mit dem  $\ell^2(\mathbb{Z})$  identifizieren kann. Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Theorie der Hilberträume und ON-Systeme (Parsevalsche Gleichung).

**Satz 1.2.2** *Die Funktion*

$$f \mapsto \hat{f} := (\langle f|e^{2\pi ikt} \rangle)_{k \in \mathbb{Z}},$$

*die jedem  $f \in L^2([0, 1])$  die Folge seiner Fourierkoeffizienten zuordnet, ist ein Hilbertraumisomorphismus*

$$L^2([0, 1]) \xrightarrow{\cong} \ell^2(\mathbb{Z}).$$

*Insbesondere gilt für  $f, g \in L^2([0, 1])$*

$$\langle f|g \rangle_{L^2([0,1])} = \langle \hat{f}|\hat{g} \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}.$$

Jede Funktion  $f \in L^2([0, 1])$  definiert also über die Folge ihrer Fourierkoeffizienten ein Folge in  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , und umgekehrt definiert jede Folge  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  durch

$$f(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k t}$$

eine Funktion in  $f \in L^2([0, 1])$ . Wir betonen noch einmal, daß obige Fourierreihe nur im Sinne einer  $L^2$ -Konvergenz gegen die Funktion  $f$  konvergiert. Das bedeutet zum Beispiel, daß die Reihe für gewisse  $t$  divergieren kann, obwohl im  $L^2$ -Sinne immer noch Konvergenz vorliegt. Wieder unter Zusatzvoraussetzungen, diesmal an die Folgen, erhält man eine stärkere Konvergenzaussage. Beachte im folgenden Satz, daß  $\ell^1(\mathbb{Z}) \subset \ell^2(\mathbb{Z})$  gilt.

**Satz 1.2.3** Für  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$  ist die durch

$$f(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k t}$$

definierte Funktion  $f \in L^2([0, 1])$  stetig. Weiterhin hat man nicht nur  $L^2$ -Konvergenz der Reihe gegen  $f$ , sondern auch punktweise Konvergenz für jedes  $t \in [0, 1]$ .

## 1.2.2 Fourierintegrale, Fouriertransformation

Wir haben gesehen, daß sich eine Funktion in  $L^2([0, 1])$  und damit die durch periodische Fortsetzung 1-periodische Funktion durch ihre Fourierreihe als Überlagerung ganzzahliger Frequenzen schreiben läßt. Ist eine Funktion  $f$  nicht periodisch, fällt aber für Werte gegen Unendlich hinreichend schnell gegen Null (so daß das Integral endlich und damit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  gilt), ist es immer noch möglich, diese Funktion als Überlagerung der Grundfrequenzen  $e^{2\pi i \omega t}$  darzustellen, also  $f$  in Bezug auf seine Frequenzen zu analysieren. Allerdings müssen dann die „Koeffizienten“ aller möglichen Frequenzen  $\omega \in \mathbb{R}$  (nicht nur die Frequenzen  $k \in \mathbb{Z}$ ) bestimmt werden, um die Fourierdarstellung von  $f$  zu erhalten.

Das *Fourierintegral* oder die *Fouriertransformation* einer Funktion  $f \in L^1(\mathbb{R})$  ist definiert durch

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt.$$

Da der Betrag der Exponentialfunktion  $e^{-2\pi i \omega t}$  bezüglich  $t$  beschränkt ist, konvergiert dieses Integral absolut für jedes  $f \in L^1(\mathbb{R})$  und  $\omega \in \mathbb{R}$ . Es gilt der folgende Satz, dessen Beweis man z. B. im Buch von [Folland] findet.

**Satz 1.2.4** Die Fouriertransformierte  $\hat{f}$  zu  $f \in L^1(\mathbb{R})$  ist wohldefiniert, stetig, und es gilt  $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$  für  $|\omega| \rightarrow \infty$ .

Wegen der Existenz von inneren Produkten in Hilberträumen und der damit verbundenen Hilfsmittel, definiert man nun auch eine Fouriertransformation auf

$L^2(\mathbb{R})$ . Dies geht jedoch nicht so offensichtlich, da für Funktionen  $f \in L^2(\mathbb{R})$  das obige Integral im allgemeinen nicht mehr existiert. Das mathematische Argument geht wie folgt: Die absolut integrierbaren Funktionen in  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  liegen dicht in  $L^2(\mathbb{R})$ , und man kann zeigen, daß die Fouriertransformation  $f \rightarrow \hat{f}$  die  $L^2$ -Norm für Funktionen  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  invariant läßt. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert deshalb eine eindeutige stetige Fortsetzung  $f \mapsto \hat{f}$  auf ganz  $L^2(\mathbb{R})$ . Der Einfachheit halber schreiben wir im folgenden auch für  $L^2(\mathbb{R})$ -Funktionen obiges Integral. Der Satz von Plancherel zeigt, daß das Fourier-Integral eine unitäre Transformation ist.

**Satz 1.2.5 (Plancherel)** *Die Fouriertransformation  $f \mapsto \hat{f}$  definiert eine unitäre Transformation auf  $L^2(\mathbb{R})$ . Für  $f \in L^2(\mathbb{R})$  gilt also  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\|f\| = \|\hat{f}\|$ . Weiterhin gilt  $\langle f|g \rangle = \langle \hat{f}|\hat{g} \rangle$  für je zwei Funktionen  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ .*

In folgendem Satz stellen wir einige Rechenregeln für die Fouriertransformation zusammen, deren Beweise man z. B. im Buch von [Folland] finden kann.

**Satz 1.2.6** (1) *Es sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$  und  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Dann ist die Translation von  $f$  um  $t_0$  definiert durch  $f_{t_0}(t) := f(t - t_0)$ . Es gilt*

$$\widehat{f_{t_0}}(\xi) = e^{-2\pi i \xi t_0} \hat{f}(\xi).$$

(2) *Es sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ . Dann ist die Modulation von  $f$  um  $\omega_0$  definiert durch  $f^{\omega_0}(t) := e^{-2\pi i \omega_0 t} f(t)$ . Es gilt*

$$\widehat{f^{\omega_0}}(\xi) = \hat{f}(\xi + \omega_0).$$

(3) *Es sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$  differenzierbar mit  $f' \in L^2(\mathbb{R})$ . Dann gilt*

$$\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi).$$

(4) *Es sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$  mit differenzierbarer Fouriertransformierten  $\hat{f}$ . Dann gilt*

$$\widehat{f'}(\xi) = -2\pi i \xi \hat{f}(\xi).$$

(5) *Es sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$  und  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dann ist die um den Faktor  $s$  skalierte Funktion  $t \mapsto f(t/s)$  ebenfalls in  $L^2(\mathbb{R})$ . Es gilt*

$$\widehat{f(\frac{\cdot}{s})}(\xi) = s \hat{f}(\xi s).$$

Man kann zeigen, daß die Inverse der Fouriertransformation für ein  $g \in L^2(\mathbb{R})$  definiert ist durch das Integral

$$\check{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{2\pi i \xi t} dt.$$

Es gilt also  $(\hat{f})^\vee = f = (\check{f})^\wedge$ . Weiterhin sieht man sofort die Identität  $\hat{f}(\xi) = \check{f}(-\xi)$ . Schreibt man die Gleichung  $f = (\hat{f})^\vee$  aus, erhält man

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c_\xi e^{2\pi i \xi t} d\xi \quad \text{mit} \quad c_\xi = \hat{f}(\xi).$$

Hiermit hat man eine Fourierdarstellung der Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  analog zu den Fourierreihen für Funktionen  $f \in L^2([0, 1])$ . Dabei entsprechen die  $c_\xi = \hat{f}(\xi)$  den Fourierkoeffizienten  $c_k = \hat{f}(k)$  der Fourierreihen.

### 1.2.3 Fouriertransformation von Folgen

In Unterabschnitt 1.2.1 über die Fourierreihen haben wir für jede Folge  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  in  $\ell^2(\mathbb{Z})$  durch

$$f(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k t}$$

eine Funktion in  $f \in L^2(\mathbb{R})$  definiert. Dabei ist der  $k$ -te Fourierkoeffizient  $\hat{f}(k) = \langle f | e^{2\pi i k t} \rangle$  dieser Funktion  $f$  wiederum  $c_k$ .

In der Literatur findet man häufig den Begriff der Fouriertransformierten  $\hat{x}$  einer Folge  $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$  definiert durch

$$\hat{x}(\xi) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-2\pi i k \xi}.$$

Diese ist also bis auf ein Vorzeichen nichts anderes als die Rekonstruktion einer Funktion  $f \in L^2([0, 1])$  aus der Folge seiner Fourierkoeffizienten. Für die Eigenschaften der Fouriertransformation für Folgen können wir also auf den Unterabschnitt 1.2.1 verweisen.

Abschließend wollen wir bemerken, daß man die Fouriertransformierte einer Folge als die Einschränkung der  $z$ -Transformierten dieser Folge auf den Einheitskreis ansehen kann.

### 1.2.4 Diskrete Fouriertransformation

Wir wenden uns nun dem diskreten Fall endlicher Folgen zu. Es sei  $N \in \mathbb{N}$  und  $\Omega_N := e^{-2\pi i / N}$ . Für den Vektor  $v := (v_0, v_1, \dots, v_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N$  definieren wir die *diskrete Fouriertransformierte* oder *DFT* als den Vektor  $\hat{v} \in \mathbb{C}^N$ , der durch folgende Formel gegeben ist:

$$\hat{v}_k := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} v_j e^{-2\pi i j k / N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

In Matrixform schreibt sich dies als

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \Omega_N^{kj} \right)_{0 \leq k, j < N} v.$$

Die Identität  $e^{-2\pi ij(N-k)/N} = e^{-2\pi ij(-k)/N}$  zeigt, daß große positive Frequenzen (die zu  $j(N-k)$ ) von kleinen negativen Frequenzen (die zu  $-jk$ ) nicht zu unterscheiden sind. Dieses Phänomen nennt man auch *Aliasing* (Mehrdeutigkeit).

Es gibt schnelle Algorithmen (die schnelle Fouriertransformation oder FFT), welche die DFT eines  $n$ -dimensionalen Vektors mit Aufwand  $O(N \log N)$  berechnet. Die Idee der FFT wurde schon von Carl Friedrich Gauss um 1805 formuliert, und wurde im Jahr 1965 von James Cooley und John Tukey wiederentdeckt, um dann als effiziente Algorithmen auf Digitalrechnern ihren Siegeszug anzutreten. Wir verweisen für eine ausführliche Darstellung dieser Algorithmen auf das Buch „Fast Fourier Transforms“ BI, 1993 von [Clausen/Baum].

Wir wollen im folgenden kurz darauf eingehen, wie sich die DFT und damit auch die FFT zur (approximativen) Berechnung von Fourierkoeffizienten einsetzen läßt. Wir approximieren die Fourierkoeffizienten  $c_k$  der Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikt} \quad \text{mit} \quad c_k = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi ikt} dt$$

einer Funktion  $f \in L^2([0, 1])$  durch eine Riemann-Summe bezüglich äquidistanter Aufteilung des Intervalles  $[0, 1]$  in  $N$  Stücke. Das Ergebnis bezeichnen wir mit  $\gamma_k$ . Damit gilt für  $k \in \mathbb{Z}$

$$\gamma_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{j}{N}\right) e^{-2\pi ijk/N}.$$

Wegen der Identität  $e^{-2\pi ijk/N} = e^{-2\pi ij(k+N)/N}$  ist die Zuordnung

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \quad k \mapsto \gamma_k$$

$N$ -periodisch (dies ist der oben angesprochene Aliasing-Effekt). Also ist die gesamte Information der Folge  $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  in dem Vektor

$$\Gamma := (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{N-1})^T$$

enthalten. Die Berechnung von  $\Gamma$  ist aber nichts anderes als die DFT angewendet auf den Vektor  $v := (v_0, v_1, \dots, v_{N-1})^T \in \mathbb{C}^N$  mit  $v_j := \frac{1}{\sqrt{N}} f\left(\frac{j}{N}\right)$ .

### 1.3 Faltung

Die *Faltung* ist eine Art Multiplikation von zwei Funktionen. Hängen diese Funktionen von einer reellen Variablen ab, so wird sie über ein Integral realisiert. Sind die Funktionen nur über den ganzen Zahlen definiert, sind sie z. B. abgetastete Signale, so ist die Faltung als (möglicherweise) unendliche Reihe gegeben. Die Faltung spielt bei der Beschreibung von Filtern eine wichtige Rolle und ist damit in der Signalverarbeitung ein unentbehrliches mathematisches Hilfsmittel. Wir wollen daher im folgenden Unterabschnitt kurz auf diesen Zusammenhang eingehen, bevor wir auf die mathematischen Fakten der Faltung eingehen.

### 1.3.1 LTI-Systeme

Ein System  $T : E \rightarrow A$  transformiert (verarbeitet) ein Eingangssignal  $x \in E$  in ein Ausgangssignal  $y \in A$ . Dabei bezeichnen  $E$  bzw.  $A$  geeignete Signalräume.

$$x \longrightarrow \boxed{\text{System } T} \longrightarrow y.$$

Ein *lineares System* ist eine lineare Transformation  $T : E \rightarrow A$  zwischen linearen Signalräumen  $E$  und  $A$ .

Ein Signalraum  $E$  ist ein Teilraum vom Raum der zeitabhängigen Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  (zeitkontinuierliche Signale) oder  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  (zeitdiskrete Signale). Wir betrachten im folgenden nur zeitdiskrete Signale. Der Signalraum  $E$  ist dann nach Definition *zeitinvariant unter Zeitshifts* g.d.w.  $\forall x \in E$  und  $\forall k \in \mathbb{Z}$  gilt:  $x^k \in E$ , wobei  $x^k(t) := x(t - k)$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ .

**Definition 1.3.1** Ein LTI-System  $T : E \rightarrow A$  ist ein lineares System  $T$  zwischen unter Zeitshifts invarianten Signalräumen  $E$  und  $A$ , so daß für alle  $x \in E$  und  $k \in \mathbb{Z}$  gilt

$$T[x^k] = T[x]^k.$$

Es gilt nun der folgende fundamentale Satz, der den Zusammenhang von LTI-Systemen und Faltungen herstellt. Wir verweisen für einen Beweis auf das Skript der ASVI-Vorlesung.

**Satz 1.3.2 (BIBO-stabile LTI-Systeme)** Ein System  $T : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z})$  ist genau dann ein (stetiges) LTI-System, wenn die Impulsantwort  $h := T[\delta]$  in  $\ell^1(\mathbb{Z})$  liegt, wobei  $\delta$  den Einheitsimpuls definiert durch  $\delta(n) := \delta_{0,n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  bezeichne. In diesem Fall ist  $T$  der zu  $h$  gehörige Faltungsoperator

$$T[x] = h * x := \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)x(n - k) \right)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

### 1.3.2 Faltung von Folgen

Sind  $x, y : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  Folgen (oder diskrete Signale), so heißt

$$(x * y)(n) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)y(n - k)$$

die *Faltung* von  $x$  und  $y$  an der Stelle  $n \in \mathbb{Z}$ . Die Existenz von Faltungssummen ist im allgemeinen nicht gewährt. Ein wichtiger Begriff im Zusammenhang mit der Existenz von Faltungen ist der Begriff der *konjugierten Exponenten*: Zwei Zahlen  $p, q \in [1, \infty]$  heißen konjugierte Exponenten, wenn

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

gilt, wobei wir  $\frac{1}{\infty} := 0$  setzen. Man beachte den Sonderfall  $p = q = 2$ . Es gelten die folgenden Existenzaussagen und Eigenschaften der Faltung:

**Satz 1.3.3** *Es seien  $1 \leq p, q \leq \infty$ . Dann gilt:*

- (1) *Seien  $x, y, z : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  Folgen, so daß alle in Frage stehenden Faltungssummen existieren. Dann gilt  $x * (y + z) = x * y + x * z$ ,  $x * y = y * x$  und  $(x * y) * z = x * (y * z)$ . Weiterhin gilt  $(\lambda x) * y = x * (\lambda y) = \lambda(x * y)$  für beliebige  $\lambda \in \mathbb{C}$ .*
- (2) *(Young Ungleichung)  $\ell^1 * \ell^p \subseteq \ell^p$ . Genauer gilt für  $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ,  $y \in \ell^p(\mathbb{Z})$  stets  $x * y \in \ell^p(\mathbb{Z})$  und*

$$\|x * y\|_p \leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_p.$$

- (3) *Sind  $p$  und  $q$  konjugierte Exponenten, so gilt für  $x \in \ell^p$  und  $y \in \ell^q$ :*

$$\begin{aligned} x \cdot y \in \ell^1 \quad \text{und} \quad \|x \cdot y\|_1 &\leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q \\ x * y \in \ell^\infty \quad \text{und} \quad \|x * y\|_\infty &\leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q. \end{aligned}$$

- (4) *Für  $x \in \ell^p(\mathbb{Z})$  und  $y \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$  liegt  $x \cdot y$  in  $\ell^p(\mathbb{Z})$  und*

$$\|x \cdot y\|_p \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_\infty$$

Aus (1) und (2) des Satzes folgt zum Beispiel, daß die Faltung mit  $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$  einen stetigen, linearen Operator  $\ell^p(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^p(\mathbb{Z})$  definiert.

Es seien  $x$  und  $y$  zwei Folgen endlicher Länge, d. h.  $x(t) = 0$  mit Ausnahme von  $a \leq t \leq b$  und  $y(t) = 0$  mit Ausnahme von  $c \leq t \leq d$  für gewisse  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ . Wir bezeichnen die Intervalle  $[a, b]$  bzw.  $[c, d]$  auch als *Trägerintervalle* der Folgen  $x$  bzw.  $y$ . Man überlegt sich leicht, daß die Folge  $x * y$  ebenfalls endliche Länge hat mit dem Trägerintervall  $[a + c, d + b]$ . Die Länge der Folge  $x * y$  ist die Summe der Längen von  $x$  und  $y$ .

### 1.3.3 Faltungsfiler

Der folgende Satz besagt, daß die Faltung zweier Folgen unter der Fouriertransformation von Folgen in die punktweise Multiplikation der Fouriertransformierten übergeht.

**Satz 1.3.4** *Seien  $h, g \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , dann gilt*

$$\widehat{h * g} = \hat{h} \cdot \hat{g}.$$

Diese Gleichheit gilt wieder im  $L^2$ -Sinne. Diese impliziert  $\widehat{h * g}(\xi) = \hat{h}(\xi)\hat{g}(\xi)$  für fast alle  $\xi \in [0, 1]$ .

Faltung mit  $h$  bedeutet also die Abänderung der Frequenzinformation  $\hat{g}$  des Eingangssignals  $g$  durch eine punktweise Multiplikation mit der Fouriertransformierten  $\hat{h}$  des *Filters*  $h$ . Je nach der Gestalt von  $\hat{h}$  unterscheidet man Tief-, Hoch- und Bandpaßfilter.

### 1.3.4 Faltung auf der reellen Achse

Die Faltung von kontinuierlichen Funktionen wird völlig analog wie im Fall von Folgen definiert. Es gelten analoge Aussagen. Dies ist kein Zufall, da die Faltung abstrakt für sogenannte lokalkompakte Gruppen  $G$  mit Haar-Maß definiert werden kann. Die Faltung auf der reellen Achse ( $G = \mathbb{R}$ ) und die Faltung von Folgen ( $G = \mathbb{Z}$ ) stellen sich dann als Spezialfall dieser allgemeineren Faltung heraus.

Wir fassen die Definitionen und Sätze der Faltung von Folgen zusammen. Sind  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  kontinuierliche Funktionen (oder kontinuierliche Signale), so heißt

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds$$

die *Faltung* von  $f$  und  $g$  an der Stelle  $t \in \mathbb{R}$ . Es gelten die folgenden Existenzaussagen und Eigenschaften der Faltung:

**Satz 1.3.5** *Es seien  $1 \leq p, q \leq \infty$ . Dann gilt:*

- (1) *Seien  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , so daß alle in Frage stehenden Faltungsintegrale existieren. Dann gilt  $f * (g + h) = f * g + f * h$ ,  $f * g = g * f$  und  $(f * g) * h = f * (g * h)$ . Weiterhin gilt  $(\lambda f) * g = f * (\lambda g) = \lambda(x * g)$  für beliebige  $\lambda \in \mathbb{C}$ .*
- (2) *(Young Ungleichung)  $L^1 * L^p \subseteq L^p$ . Genauer gilt für  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $g \in L^p(\mathbb{R})$  stets  $f * g \in L^p(\mathbb{R})$  und*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p.$$

- (3) *Sind  $p$  und  $q$  konjugierte Exponenten, so gilt für  $f \in L^p$  und  $g \in L^q$ :*

$$\begin{aligned} f \cdot g \in L^1 & \quad \text{und} \quad \|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \\ f * g \in L^\infty & \quad \text{und} \quad \|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \end{aligned}$$

- (4) *Für  $f \in L^p(\mathbb{R})$  und  $g \in L^\infty(\mathbb{R})$  liegt  $f \cdot g$  in  $L^p(\mathbb{R})$  und*

$$\|f \cdot g\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_\infty.$$

Für die Beweise verweisen wir auf das Buch von Folland. Besonders wichtig ist der folgende Satz, der besagt, daß die Faltung zweier Funktionen unter der Fouriertransformation in die punktweise Multiplikation dieser Funktionen übergeht.

**Satz 1.3.6** *Es seien  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , dann gilt  $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ .*

## 1.4 Diskretisierung kontinuierlicher Signale

In jeder numerischen Rechnung können nur endlich viele Parameter verwendet werden. Ein Signal bzw. Funktion einer reellen Variablen muß deshalb erst approximiert werden, so daß es sich (zumindest annäherungsweise) mit Hilfe einer diskreten (oder noch besser endlichen) Anzahl von Parametern darstellen läßt. Mathematisch entspricht dies einer Projektion der Funktion auf einen endlich-dimensionalen Raum, der sich als lineare Hülle einer endlichen Menge von sogenannten *Synthese-Funktionen* ergibt. Diese diskreten Parameter können zum Beispiel die Fourierkoeffizienten (bei periodischen Signalen), oder die Koeffizienten eines Polynoms (bei der Approximation des Signals durch seine Taylorreihe) sein. Die einfachste Diskretisierung eines reellen Signals ist jedoch die Auswertung an endlich vielen (Zeit-)Punkten, auf die wir im folgenden näher eingehen.

### 1.4.1 Abtastung

Ein diskretes Signal entsteht aus den Werten eines kontinuierlichen Signals zu bestimmten diskreten Zeitpunkten, man spricht von *Abtastung*. Die Werte des diskreten Signals heißen *Abtastwerte* oder *Samples*, die Zeitpunkte der Abtastung heißen *Abtastpunkte*. Es wird im folgenden davon ausgegangen, daß die Abstände zwischen benachbarten Abtastpunkten äquidistant sind. Dies führt zur *T-Abtastung* ( $T > 0$ ), bei der ein kontinuierliches Signal  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  in ein diskretes Signal  $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  übergeht, wobei

$$x(n) := f(T \cdot n).$$

Die Anzahl der Abtastungen  $\frac{1}{T}$  pro Zeiteinheit heißt *Abtastfrequenz* oder *Abtastrate*. Die Abtastrate wird gemessen in der Einheit *Hertz*, wobei nach Definition gilt: 1 Hertz = 1 Hz = 1 Abtastung pro Sekunde.

Bei der Abtastung  $x$  eines kontinuierlichen Signals  $f$  geht im allgemeinen Information verloren, d. h. man kann  $f$  nicht mehr aus den Abtastwerten rekonstruieren. Man kann nur noch damit rechnen,  $f$  mit Hilfe der Abtastung  $x$  zu approximieren. Dies geschieht über sogenannte *Synthesefunktionen*. Wählt man bei der  $T$ -Abtastung von  $f$  zum Beispiel als Synthesefunktionen die charakteristischen Funktionen  $\mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t)$  der Intervalle  $[t_k, t_{k+1})$ ,  $t_k := T \cdot k$ , zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Abtastpunkten, so erhält man die Funktion  $f_T$  definiert durch

$$f_T(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(T \cdot k) \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t).$$

In diesem Fall wird  $f$  durch  $f_T$  approximiert, d. h. der Wert  $f(t)$  wird durch die Konstante  $f(t_k)$  approximiert, wobei  $t_k$  der nächstliegende Abtastpunkt links von  $t$  ist.

Synthesefunktionen sind natürlich nicht eindeutig festgelegt, so könnten z. B. anstelle der charakteristischen Funktionen auch Splinefunktionen oder trigonometrische Funktionen gewählt werden. Diese Wahl muß man vom konkreten Fall abhängig machen, davon hängt natürlich auch die Güte dieser Approximation ab.

Für eine bestimmte Klasse von kontinuierlichen Signalen ist bei Wahl der sogenannten sinc-Funktionen als Synthesefunktionen eine fehlerfreie Rekonstruktion des kontinuierlichen Signals aus seinen Samples möglich. Dies ist Inhalt des folgenden Abschnittes.

### 1.4.2 Das Abtasttheorem von Shannon

Eine quadratisch-integrierbare Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  heißt *bandbegrenzt*, falls es eine Zahl  $\Omega > 0$  gibt derart, daß  $\hat{f}(\xi) = 0$  für  $|\xi| > \Omega$ . Nun ist  $f$  nur als  $L^2$ -Funktion vorausgesetzt, so daß der Begriff einer Abtastung erst einmal keinen Sinn macht. Aus dem *Satz von Bernstein* folgt jedoch aus der Bandbegrenztheit einer  $L^2$ -Funktion deren Stetigkeit. Damit ist  $f$  an der Menge von Abtastpunkten wohldefiniert. Der Abtastatz von Shannon besagt, daß  $f$  exakt bestimmt ist durch seine Werte an diskreten, äquidistant liegenden Punkten der Schrittweite  $1/2\Omega$ :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2\Omega}\right) \frac{\sin \pi(2\Omega t - n)}{\pi(2\Omega t - n)}.$$

Die *Synthesefunktionen von Shannon*, die hier benutzt werden, sind

$$\text{sinc}(2\Omega t - n) \quad \text{mit} \quad \text{sinc}(t) := \frac{\sin \pi t}{\pi t}.$$

Bei einer durch  $\Omega$  bandbeschränkten Funktion benötigt man eine  $T$ -Abtastung mit  $T = \frac{1}{2\Omega}$ , also eine Abtastrate von  $\frac{1}{T} = 2\Omega$ , zur perfekten Rekonstruktion des Signals. In diesem Fall heißt die Abtastrate  $2\Omega$  auch *Nyquist-Rate* der durch  $\Omega$  bandbeschränkten Funktion  $f$ . Umgekehrt heißt  $\Omega = \frac{1}{2T}$  die *Nyquist-Frequenz* zum Abtastintervall der Länge  $T$ .

Das Shannon-Abtasttheorem liefert die mathematische Grundlage für die digitale Verarbeitung von Audiosignalen. Beim Analog-Telefonieren werden Frequenzen von bis zu 4000 Hz übertragen, also muß die Stimme mit einer Abtastrate von 8000 Hz abgetastet werden. Bei der CD will man eine für die menschliche Wahrnehmung optimale Aufnahmequalität erreichen. Geht man beim menschlichen Gehör von einer Wahrnehmung der Frequenzen bis zu 20 kHz aus, so würde dies zu einer notwendigen Abtastrate von 40 kHz pro Sekunde führen. Die tatsächliche Abtastrate liegt bei 44,1 kHz.

## 1.5 Beispiele zur Fouriertransformation

Die Fouriertransformierte  $\hat{f}$  eines Signals  $f \in L^2(\mathbb{R})$  liefert eine Frequenzdarstellung des Signals, d. h.  $\hat{f}(\omega)$  gibt an, mit welcher Intensität die Frequenz  $\omega$  im Signal  $f$  enthalten ist. Wir wollen uns diese Aussage anschaulich an einigen Beispielen verdeutlichen. Da  $\hat{f}(\omega)$  in der Regel komplexwertig ist, geht man bei der graphischen Darstellung zum Betrag  $|\hat{f}|$  oder zur sogenannten *spektralen Energiedichte*  $|\hat{f}|^2$  über.

Im folgenden werden die zu analysierenden Signale über den dargestellten Definitionsbereich hinaus durch Null fortgesetzt und so als Funktionen in  $L^2(\mathbb{R})$  aufgefaßt. In der Fourierdarstellung von  $f$  spiegelt sich dies durch kleine „Störfrequenzen“ in allen Frequenzbereichen wider - die Fouriertransformierte zeigt dann zum Beispiel kleine Oszillationen. Dieses Phänomen kann man durch die sogenannte *destruktive Interferenz* erklären. Die Fourierdarstellung liefert eine Darstellung des Signals  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  als Überlagerung der periodischen Grundfrequenzen  $t \mapsto e^{2\pi i \omega t}$ . Da das Signal aber außerhalb des dargestellten Definitionsbereiches konstant Null ist, müssen sich dort die durch die Fourierkoeffizienten  $\hat{f}(\omega)$  gewichteten Grundfrequenzen  $t \mapsto e^{2\pi i \omega t}$  „wegheben“, sich zu Null addieren. Dies ist nur dann möglich, wenn verschiedene Grundfrequenzen aus allen Frequenzbereichen einen Beitrag liefern.

Weiterhin werden bei der konkreten Berechnung der Fouriertransformierten mittels Computer nur endlich viele Fourierwerte  $\hat{f}(\xi)$  approximativ berechnet, d. h. auftretende Integrale werden durch Riemann-Summen approximiert und die Fouriertransformierte wird nur an einer endlichen Zahl von Frequenzen berechnet. Hierdurch entstehen weitere Artefakte, die sich in den dargestellten Bildern widerspiegeln (z. B. kleine Ecken und Kanten in den Graphen, die daraus resultieren, daß die Abtastrate für die Darstellung nicht fein genug gewählt wurde).

Da die Fouriertransformierte eine Art Frequenzmittelwert über die gesamte Zeitachse liefert, ist die Interpretation besonders bei komplizierten Signalen nicht einfach. Es ist oft schwierig zu unterscheiden, welche Phänome in den dargestellten Graphen von  $|\hat{f}|$  im Signal  $f$  selbst begründet sind, und welche sich aus der Fortsetzung von  $f$  durch Null oder durch Berechnungsfehler beim Diskretisierungsschritt ergeben. Mit dieser Problematik im Hinterkopf wollen wir uns nun den Bildern zuwenden.

### 1.5.1 Überlagerung von zwei Sinusschwingungen

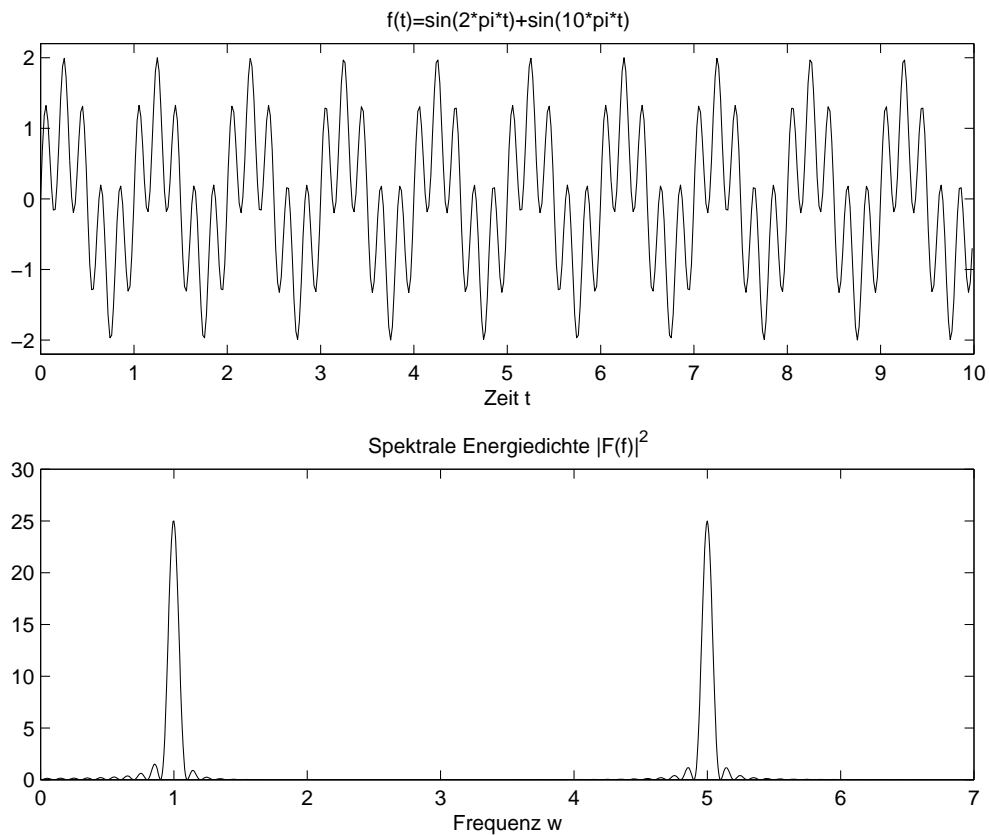


Abbildung 1.3: Überlagerung von zwei Sinusschwingungen

In Abbildung 1.3 ist das Signal  $f$  eine Überlagerung aus zwei reinen Sinusschwingungen der Frequenz 1 und der Frequenz 5. Wie erwartet, spiegelt sich dieser Sachverhalt in der spektralen Energiedichte  $|\hat{f}|^2$  wider. Es treten zwei Peaks bei den Frequenzen  $\omega = 1$  und  $\omega = 5$  auf. Die kleinen Oszillationen von  $|\hat{f}|^2$  sind auf die oben angesprochene destruktive Interferenz zurückzuführen. Das Signal  $f$  wurde bei der Berechnung von  $|\hat{f}|^2$  außerhalb des Intervalles  $[0 : 10]$  durch Null fortgesetzt.

## 1.5.2 Chirpsignal

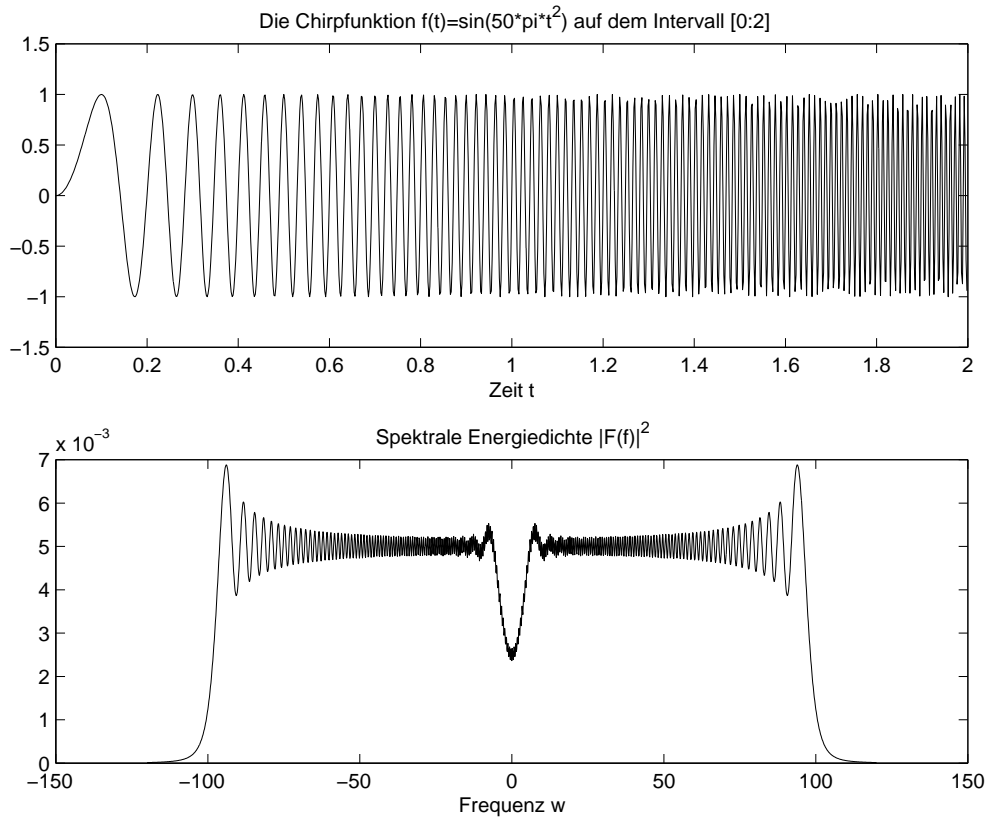


Abbildung 1.4: Chirpsignal

In Abbildung 1.4 ist ein sogenanntes *Chirpsignal* dargestellt, ein Signal mit stetig wachsender Frequenz. Die „Frequenz zum Zeitpunkt  $t = t_0$ “ (wir werden in Kapitel 2 bei der Heisenbergschen Unschärferelation sehen, daß diese Aussage streng genommen keinen Sinn macht) kann man sich in diesem Fall als Ableitung der Phase vorstellen. Zum Zeitpunkt  $t = t_0$  hat also obiges Chirpsignal die Frequenz  $\omega = 50 \cdot t_0$ . Da wir das Chirpsignal nur auf dem Intervall  $[0 : 2]$  definieren und außerhalb dieses Intervalls durch Null fortsetzen, erwarten wir in der Frequenzdarstellung große Werte von  $|\hat{f}(\omega)|^2$  für  $\omega$  aus dem Frequenzband  $[-100 : 100]$ . Dies spiegelt der dargestellte Graph von  $|\hat{f}|^2$  auch tatsächlich wider. Aus der Reellwertigkeit des Chirpsignals  $f$  folgt sofort  $\hat{f}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)}$  und daraus die Symmetrie von  $|\hat{f}|^2$  um  $\omega = 0$ . Die diesmal beträchtlichen Oszillationen kann man wieder durch das Phänomen der destruktiven Interferenz erklären.

### 1.5.3 Dirac-Folge

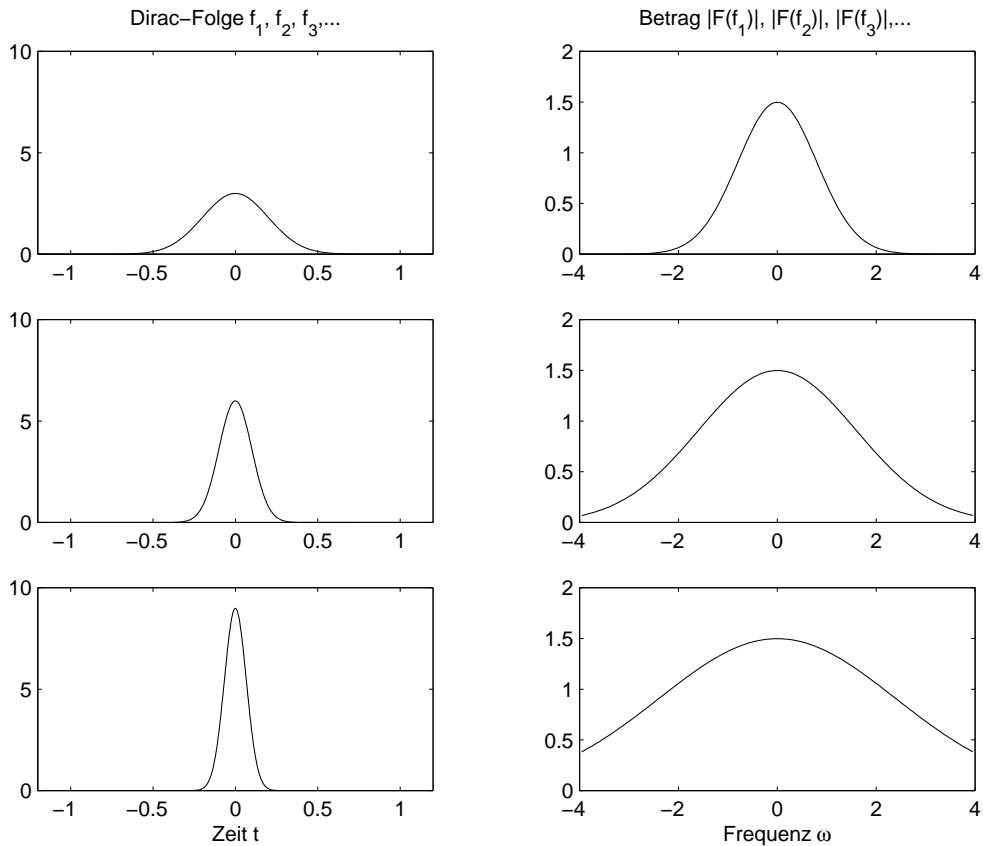


Abbildung 1.5: Dirac-Folge

Eine Dirac-Folge ist eine Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wobei sich für wachsendes  $n$  die Funktionen  $f_n$  bei gleichbleibender Norm  $\|f_n\| = 1$  „immer mehr um die Null konzentrieren“. Grenzwert dieser Folge ist die sogenannte *Diracsche  $\delta$ -Funktion*. Man stellt sich  $\delta$  als Funktion vor, die auf der gesamten Zeitachse konstant Null ist bis auf den Zeitpunkt  $t = 0$ , wo sie den Wert  $\infty$  annimmt. Dabei ergibt das Integral von  $\delta$  über  $\mathbb{R}$  Eins. Dies ist natürlich keine Funktion im herkömmlichen Sinne, sondern  $\delta$  findet seine natürliche mathematische Heimat im Raum der sogenannten *Distributionen*. Interessant ist für uns vor allem die Folge der Fouriertransformaten  $(\widehat{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$ , deren Beträge in Abbildung 1.5 dargestellt sind. Bei Annäherung der Funktionen  $f_n$  an die  $\delta$ -Funktion nähern sich die Fouriertransformaten  $\widehat{f_n}$  der konstanten Einsfunktion an. Wir können uns also die  $\delta$ -Funktion als Überlagerung aller durch Eins gewichteten Grundfrequenzen  $t \mapsto e^{2\pi i \omega t}$  vorstellen. Außerhalb des Zeitpunktes  $t = 0$  hat man eine destruktive Interferenz, die Grundfrequenzen addieren sich zu Null auf. Nur zum Zeitpunkt  $t = 0$  haben sie alle den Wert 1 und addieren sich zu  $\infty$  auf. Diese Aussage macht natürlich streng mathematisch so keinen Sinn und kann erst in der Theorie der Distributionen exakt formuliert werden.

### 1.5.4 Gaußsche Glockenkurve

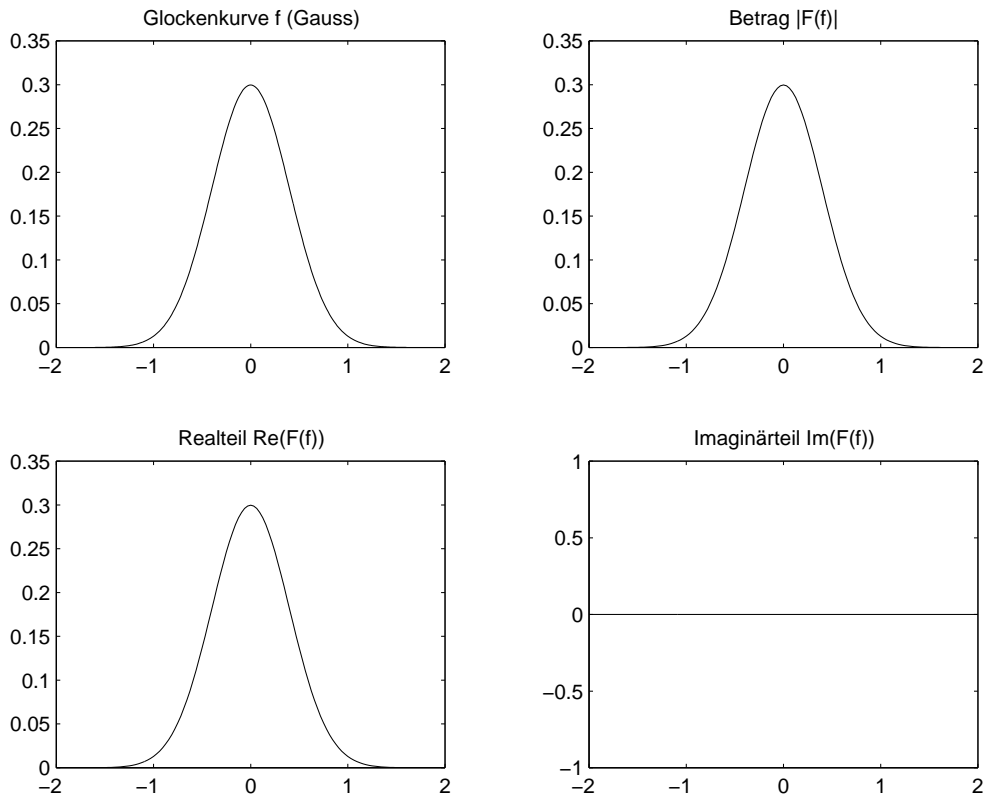


Abbildung 1.6: Gaußsche Glockenkurve

In Abbildung 1.6 ist die Gaußsche Glockenkurve dargestellt, wie man sie (bis auf eine andere Normierung) auch auf dem 10DM-Schein findet. In unserem Fall gilt

$$f(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\pi t^2}.$$

Diese Funktion zeichnet sich dadurch aus, daß ihre Fouriertransformierte  $\hat{f}$  mit der Funktion  $f$  übereinstimmt.  $f$  ist die einzige Funktion mit dieser Eigenschaft. Die Gaußsche Glockenkurve hat darüber hinaus minimale Unschärfe im Sinne der Heisenbergschen Unschärferelation (siehe Kapitel 2), lokalisiert in diesem Sinne optimal zugleich im Zeit- und Frequenzbereich.

### 1.5.5 Rechteck-Funktion und sinc-Funktion

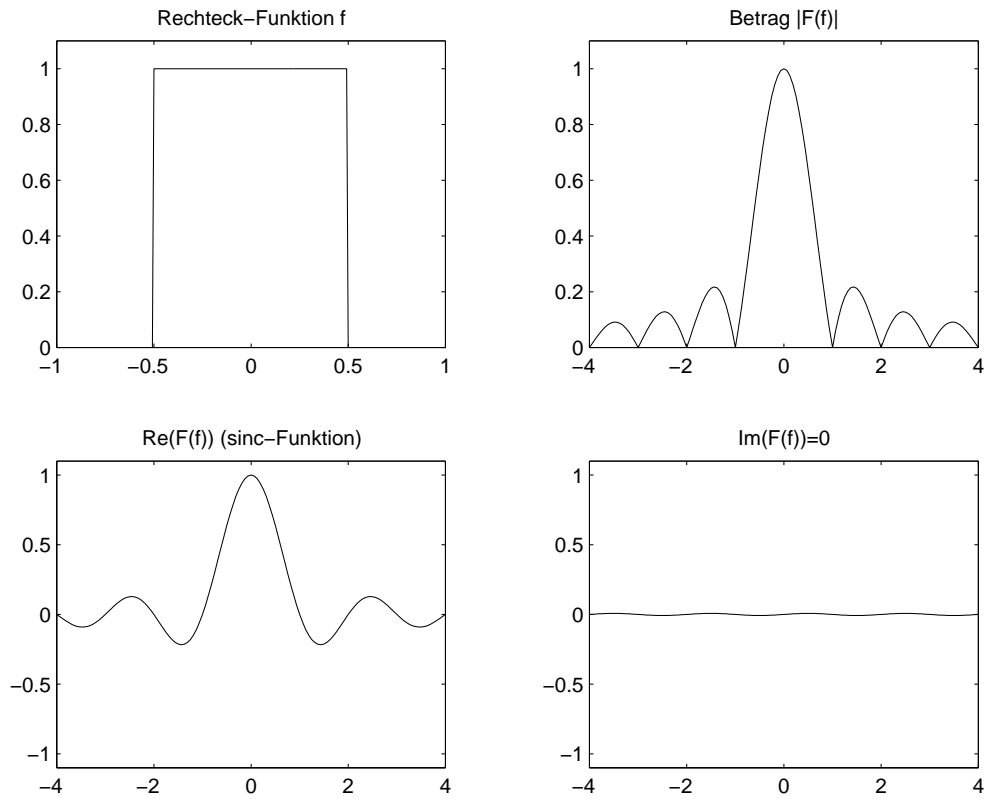


Abbildung 1.7: Rechteck-Funktion

Die Fouriertransformierte  $\hat{f}$  der in Abbildung 1.7 dargestellten Rechteckfunktion  $f$  ist die sinc-Funktion, die uns schon im Unterabschnitt 1.4.2 über das Abtasttheorem von Shannon begegnet ist. Die Fouriertransformierte ist in diesem Fall eine reelle Funktion, der Imaginärteil ist konstant Null. Beobachten Sie in Abbildung 1.8 und 1.9 was im Frequenzbereich passiert, wenn man die Rechteck-Funktion verschiebt. Eine Verschiebung im Zeitbereich hat eine Modulation im Frequenzbereich zur Folge. Die recht zackige Darstellung des Real- und Imaginärteils von  $\hat{f}$  in Abbildung 1.9 ist übrigens auf eine zu geringe Abtastrate im Frequenzbereich zurückzuführen.

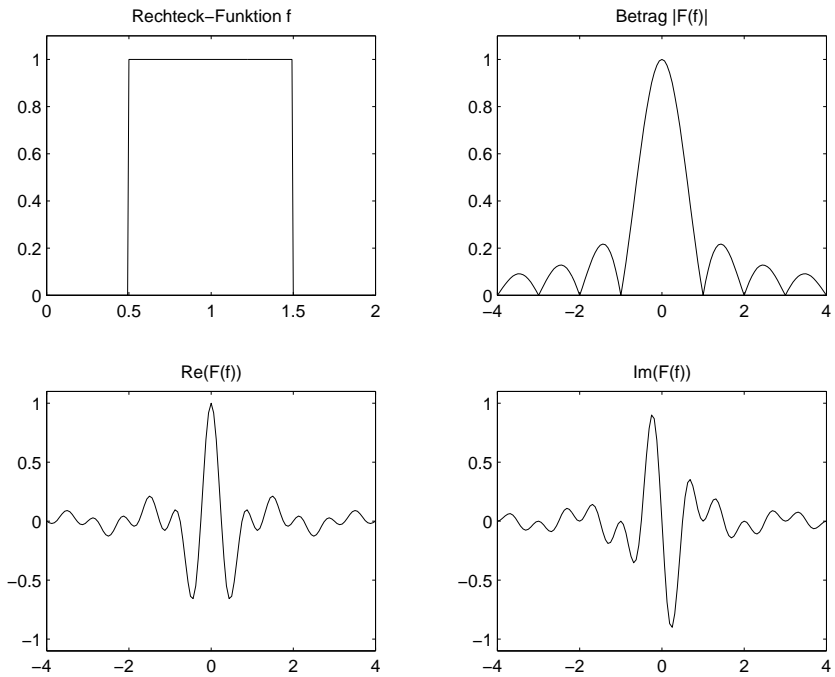


Abbildung 1.8: Um  $\Delta = 1$  verschobene Rechteck-Funktion.

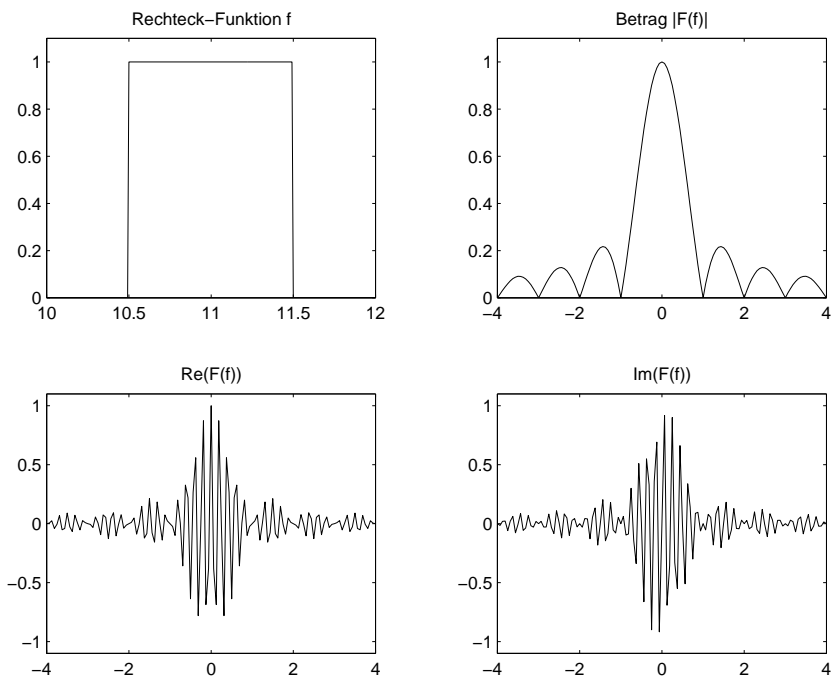


Abbildung 1.9: Um  $\Delta = 10$  verschobene Rechteck-Funktion.



## Kapitel 2

# Gefensterter Fouriertransformationen (WFT)

Die Fouriertransformierte  $\hat{f}$  eines Signals  $f \in L^2(\mathbb{R})$  beschreibt den Frequenzinhalt des Signals, das zeitabhängige Signal  $f$  wird durch die Fouriertransformation in die frequenzabhängige Funktion

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt$$

transformiert. Dabei wird das Signal  $f$  mit Hilfe der Exponentialfunktionen

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{2\pi i \xi t}$$

verschiedener Frequenzen  $\xi \in \mathbb{R}$  analysiert. Diese Analysefunktionen sind periodisch und zeitlich *nicht lokalisiert* und damit eigentlich ungeeignet, die im allgemeinen unperiodischen Signale  $f \in L^2(\mathbb{R})$  zu analysieren. Die Fouriertransformation versteckt die Zeitinformation (in der Phase), sie gibt an, welche „Noten“ (Frequenzen) gespielt werden, jedoch sind die Zeitpunkte, zu denen diese Noten gespielt werden, nicht erkennbar. Abrupte Veränderungen und lokale Schwankungen des Signals sowie Anfang und Ende von Ereignissen werden von der Fouriertransformation nicht gefunden. Die ermittelte Frequenzinformation ist immer auf das ganze Zeitintervall bezogen, bildet also eine Art Frequenzmittelwert. Ein lokales Phänomen des Signals wird zu einem globalen Phänomen der Fouriertransformierten, Fehler im Zeitbereich des Signals wirken sich global auf die gesamte Fouriertransformation aus. Umgekehrt wirken sich kleine Fehler bei der Phase enorm im Zeitbereich aus.

Zur Behebung dieser Schwächen führte Dennis Gabor im Jahre 1946 eine modifizierte Fouriertransformation ein, die *gefensterte Fouriertransformation* oder WFT (Windowed Fourier Transformation). Diese ist ein Kompromiß zwischen zeit- und frequenzbasierter Darstellung des Signals und gibt nicht nur an, aus

welchen Frequenzen das Signal aufgebaut ist, sondern auch zu welchen Zeitpunkten (wie wir später sehen werden, sollte man eigentlich von Zeitabschnitten sprechen) diese Frequenzen (oder besser Frequenzabschnitte) auftreten. Wir wollen dies im folgenden präzisieren.

## 2.1 Definition der WFT

Ziel ist es, für ein Signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  eine Transformation  $\tilde{f}(\omega, t)$  zu finden, die für einen Zeitpunkt  $t$  die Frequenzverteilung von  $f$  repräsentiert. Die Idee hierbei kommt von einer Anleihe an die menschliche Hörwahrnehmung: hier findet eine Echtzeitanalyse von Audiosignalen statt, bei der zur Analyse immer nur der „aktuelle“ Teil des Signals herangezogen wird. Genauer gesagt benutzt man zur Analyse einen Teil des Signals der nahen Vergangenheit, so daß weiter zurückliegende Teile nicht so stark berücksichtigt werden. Ebenso werden Teile des Signals, die ganz aktuell sind, noch nicht so stark wahrgenommen. Diese Vorstellung trifft zwar den physiologischen Ablauf des Hörens nicht genau, liefert aber ein nützliches Modell. Realisiert wird die oben angedeutete Gewichtung des Signals zu einem Zeitpunkt  $t$  durch eine punktweise Multiplikation mit einer sogenannten *Fensterfunktion*. Die Fensterfunktion kann man sich glockenförmig lokalisiert um den Nullpunkt vorstellen. Ist  $f \in L^2(\mathbb{R})$  ein Signal und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Fensterfunktion, so ist die an der Stelle  $t$  lokalisierte Funktion  $f_{g,t}$  definiert durch

$$f_{g,t}(u) := f(t, u) := \bar{g}(u - t)f(u).$$

Falls  $g$  aus dem Zusammenhang klar ist, wird  $f_{g,t}$  abkürzend mit  $f_t$  bezeichnet. Die einzigen Forderungen, die im Moment an  $g$  gestellt werden sollen, sind  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\|g\|_2 \neq 0$ , die Glockenform ist also nicht zwingend. Die (mit  $g$ ) gefensterterte Fouriertransformation wird definiert durch:

**Definition 2.1.1** Sei  $g \in L^2(\mathbb{R})$  mit  $\|g\|_2 \neq 0$ , dann heißt  $g$  Fensterfunktion und für ein  $f \in L^2(\mathbb{R})$  ist

$$\tilde{f}(\omega, t) := \int_{-\infty}^{\infty} f_t(u) e^{-2\pi i \omega u} du = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(u - t) f(u) e^{-2\pi i \omega u} du$$

die gefensterterte Fouriertransformation oder WFT von  $f$ .

Um eine anschauliche Vorstellung der WFT eines Signals  $f$  zu entwickeln, definieren wir die Funktionen

$$g_{\omega,t} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g_{\omega,t}(u) := e^{2\pi i \omega u} g(u - t).$$

Wegen  $\|g_{\omega,t}\| = \|g\|$  ist auch  $g_{\omega,t} \in L^2(\mathbb{R})$  und für ein Signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  ist die WFT gegeben durch das Skalarprodukt

$$\tilde{f}(\omega, t) = \langle f | g_{\omega,t} \rangle.$$

Wir stellen uns dabei  $g_{\omega,t}$  als „musikalische Note“ vor, die mit der Frequenz  $\omega$  innerhalb des durch die Funktion  $u \mapsto |g(u-t)|$  definierten Fensters oszilliert (diese Funktion definiert eine Art „Hüllkurve“). Das Skalarprodukt  $\langle f|g_{\omega,t} \rangle$  mißt die Korrelation zwischen dem Signal  $f$  und der musikalischen Note  $g_{\omega,t}$ . Zeigen das Signal und die musikalische Note im Fensterbereich einen ähnlichen Verlauf, ist also die Korrelation groß, so ist auch das Skalarprodukt groß. Zeigt das Signal  $f$  im Fensterbereich im Vergleich zur Frequenz von  $g_{\omega,t}$  keine große Frequenzänderung, so ist  $\langle f|g_{\omega,t} \rangle$  klein. Das Signal

$$u \mapsto \langle f|g_{\omega,t} \rangle g_{\omega,t}(u)$$

ist die „Projektion“ des Signals  $f$  auf die musikalische Note  $g_{\omega,t}$  und ergibt damit den Anteil, mit dem  $g_{\omega,t}$  in  $f$  enthalten ist. (Machen Sie sich bei dieser Sprechweise der „Projektion“ die Analogie zum  $\mathbb{R}^3$  mit dem Standardskalarprodukt klar!)

## 2.2 Beispiele

### 2.2.1 Fensterfunktionen

In Abbildung 2.1 sind drei Fensterfunktionen mit ihren spektralen Energiedichten abgebildet. Bei der Fensterung mit dem Rechteck-Fenster  $g$  bleibt ein Signal  $f$  auf dem Träger  $\text{supp}(g) = [-0.5, 0.5]$  erhalten und wird außerhalb des Trägers abgeschnitten und durch Null fortgesetzt. Bei dieser recht radikalen Methode entstehen i. a. bei den um  $t$  lokalisierten Funktion  $\text{enf}_{g,t}(u) := f(t, u) := \bar{g}(u-t)f(u)$  Unstetigkeitsstellen und abrupte Veränderungen, die sich in der Fouriertransformation durch Artefakte und Störfrequenzen widerspiegeln. Siehe hierzu auch Abbildung 2.3. Wir erinnern an die Faustregel, daß sich lange, glatte Eigenschaften eines Signals als niederfrequente Phänomene und abrupte, kurzlebige Eigenschaften eines Signals als hochfrequente Phänomene in der Fouriertransformierten widerspiegeln.

Das Hanning-Fenster ist bis auf eine Normierung definiert durch

$$g(u) := \begin{cases} 1 + \cos(\pi u) & \text{falls } -1 \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und hat ebenfalls einen kompakten Träger. Bei Fensterung mit dem Hanning-Fenster wird das Signal nun nicht mehr radikal abgeschnitten, sondern „sachte nach unten gedrückt“ und außerhalb des Trägers der Fensterfunktion durch Null fortgesetzt. Hierdurch werden die oben angesprochenen Artefakte in der Fouriertransformierten des gefensterten Signals vermindert. Siehe hierzu auch Abbildung 2.2. Vergleichen Sie diese mit Abbildungen 2.3 und diskutieren sie die Unterschiede.

Es gibt außer den in Abbildung 2.1 dargestellten Fensterfunktionen noch viele weitere Fensterfunktionen. Weitere Informationen hierüber finden Sie zum Beispiel im MatLab-Handbuch. Wir wollen noch abschließend bemerken, daß eine

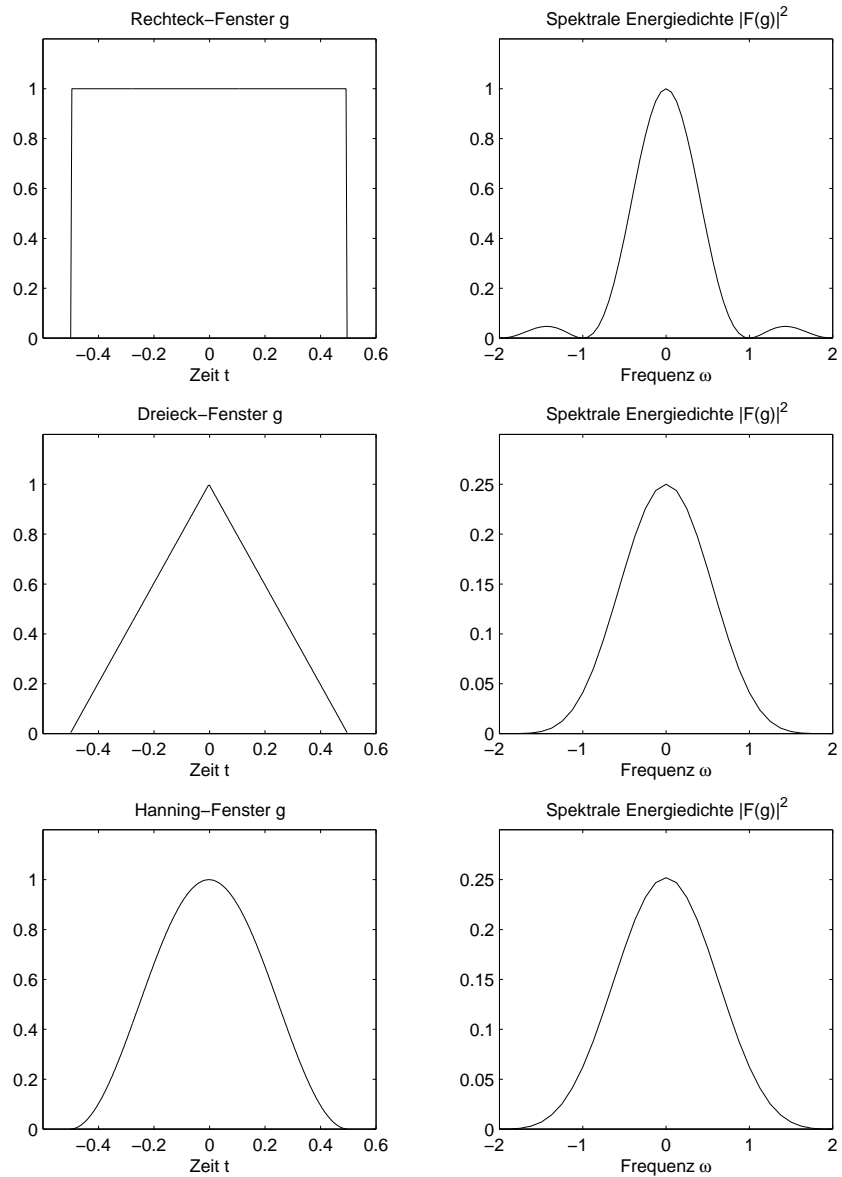


Abbildung 2.1: Fensterfunktionen.

Fensterfunktion nicht notwendiger Weise kompakten Träger haben muß. Ein Beispiel hierfür ist das Gaußfenster, das in Abbildung 1.6 dargestellt ist. In der Praxis ist die Wahl der „richtigen“ Fensterfunktion oft ein schwieriges Problem und hängt auch von der jeweiligen Anwendung ab.

## 2.2.2 WFT des Chirp-Signals

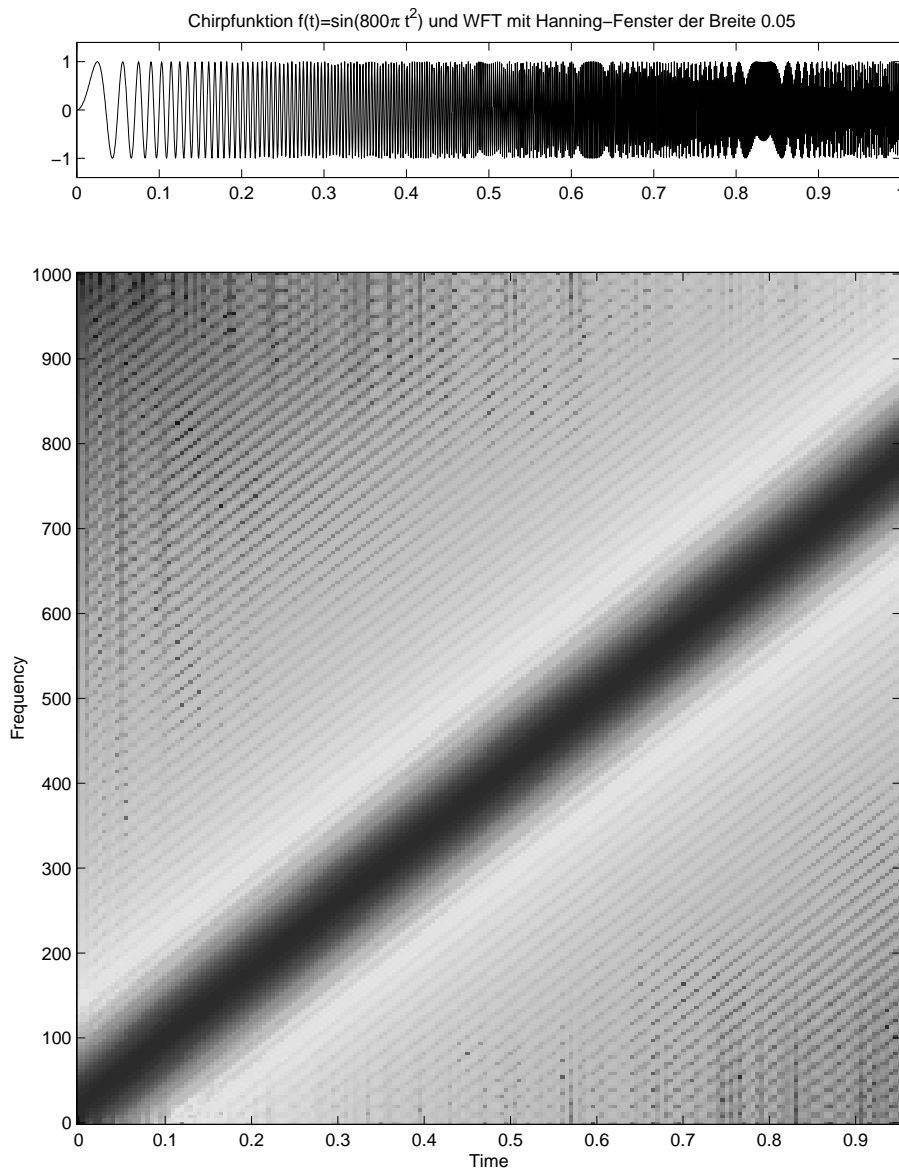


Abbildung 2.2: WFT mit dem Hanning-Fenster.

Die Abbildung 2.2 zeigt die Zeit-Frequenz-Darstellung des Chirpsignals

$$f(t) = \sin(800\pi t^2)$$

unter Benutzung der WFT mit dem Hanning-Fenster als Fensterfunktion  $g$ . Dabei werden die Werte

$$|\tilde{f}(\omega, t)| = |\langle f | g_{\omega, t} \rangle|$$

in  $(t, \omega)$  durch verschiedene Graustufen dargestellt, die für kleine Werte  $|\tilde{f}(\omega, t)|$  heller und große Werte  $|\tilde{f}(\omega, t)|$  dunkler sind. Wie man bei einer Zeit-Frequenz-Darstellung (oder Phasenraum-Darstellung) des Chirpsignals  $f$  erwartet, liegen

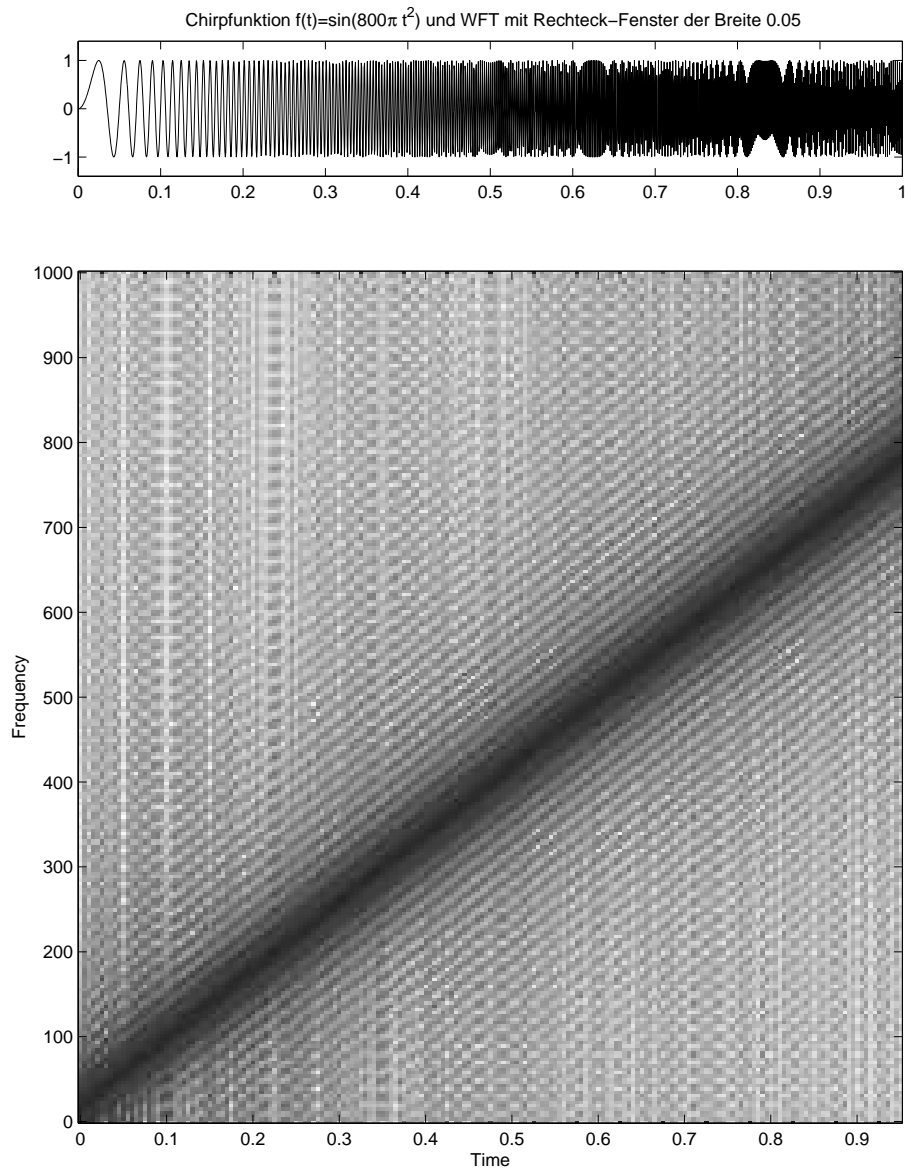


Abbildung 2.3: WFT mit dem Rechteck-Fenster.

die großen Werte von  $|\tilde{f}(\omega, t)|$  auf der Diagonalen  $\omega = 800 \cdot t$  (dies entspricht bis auf den Faktor  $2\pi$  der Ableitung der Phase). Man erkennt in dieser Abbildung außerdem „Nebendiagonalen“. Diese stellen kleine „Störfrequenzen“ dar, die auf die im ersten Kapitel angesprochene destruktive Interferenz zurückzuführen sind (siehe hierzu zum Beispiel auch Abbildung 1.3).

Die dunklen Bereiche links oben und rechts unten in der Abbildung 2.2 sind nicht im Signal  $f$  oder in der Fensterfunktion  $g$  begründet, sondern sind auf Approximationsfehler bei der Berechnung der WFT zurückzuführen. Bei der konkreten Berechnung der WFT mit dem Computer wurden die Integrale  $\langle f|g_{\omega,t} \rangle$  durch Riemann-Summen approximiert. Diese liefern umso schlechtere Approxi-

mationen für das Integral von  $f \cdot g_{\omega,t}$ , je mehr die Funktion  $f \cdot g_{\omega,t}$  oszilliert. Daher erhalten wir große Approximationsfehler in den oben erwähnten Bereichen: links oben (wegen der starken Oszillation von  $g_{\omega,t}$  für große  $\omega$ ) und rechts unten (wegen der starken Oszillation von  $f$  für große Zeiten).

In Abbildung 2.3 wurde anstelle des Hanning-Fensters das Rechteck-Fenster als Fensterfunktion  $g$  benutzt. Durch das abrupte Abschneiden des Signals  $f$  bei Fensterung mit dem Rechteck-Fenster  $g$  entstehen große Störfrequenzen in allen Frequenzbereichen. In Abbildung 2.3 verteilen sich die dunklen Bereiche und damit großen Werte von  $|\tilde{f}(\omega, t)|$  über den gesamten Zeit-Frequenz-Bereich, die großen Werte von  $|\tilde{f}(\omega, t)|$  sind also nicht mehr so gut in einem Bereich um die Diagonale  $\omega = 800 \cdot t$  konzentriert. Wir erhalten eine „schlechtere“ Zeit-Frequenz-Darstellung des Chirp-Signals.

### 2.2.3 WFT in Abhängigkeit von der Fensterbreite

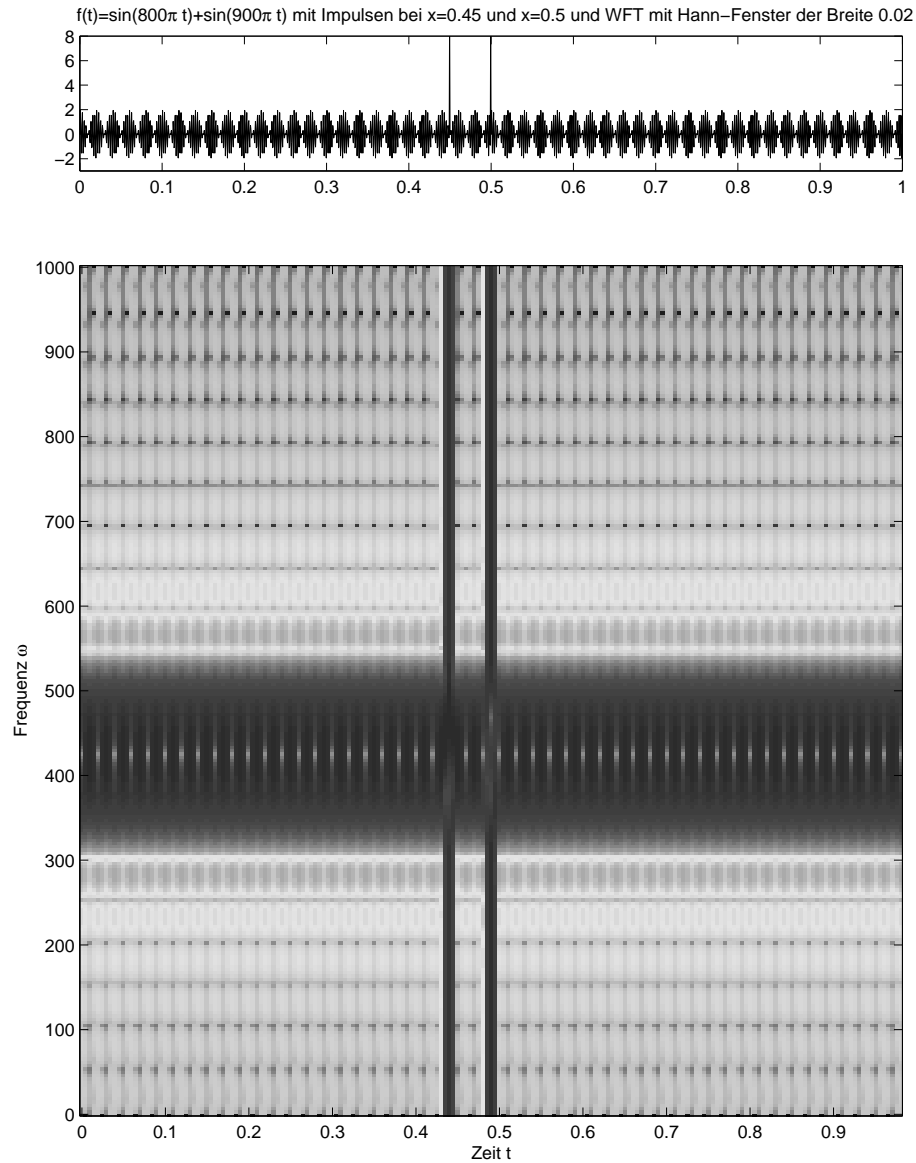


Abbildung 2.4: WFT bei kleiner Fensterbreite.

In diesem Unterabschnitt betrachten wir das auf  $[0, 1]$  dargestellte Signal  $f$  definiert durch

$$f(t) = \sin(800\pi t) + \sin(900\pi t) + c[\delta(t - 0.45) + \delta(t - 0.5)]$$

mit einer positiven Konstanten  $c \in \mathbb{R}$ .  $f$  ist eine Überlagerung von zwei reinen Sinusschwingungen der Frequenzen  $\omega_1 = 400$  und  $\omega_2 = 450$  und hat zwei zusätzliche Impulse bei  $t_1 = 0.45$  und  $t_2 = 0.5$ . Die Abbildung 2.4 und 2.5 sind jeweils Zeit-Frequenz-Darstellungen des Signals  $f$  unter Benutzung der WFT mit dem Hann-Fenster als Fensterfunktion  $g$ , allerdings mit unterschiedlichen

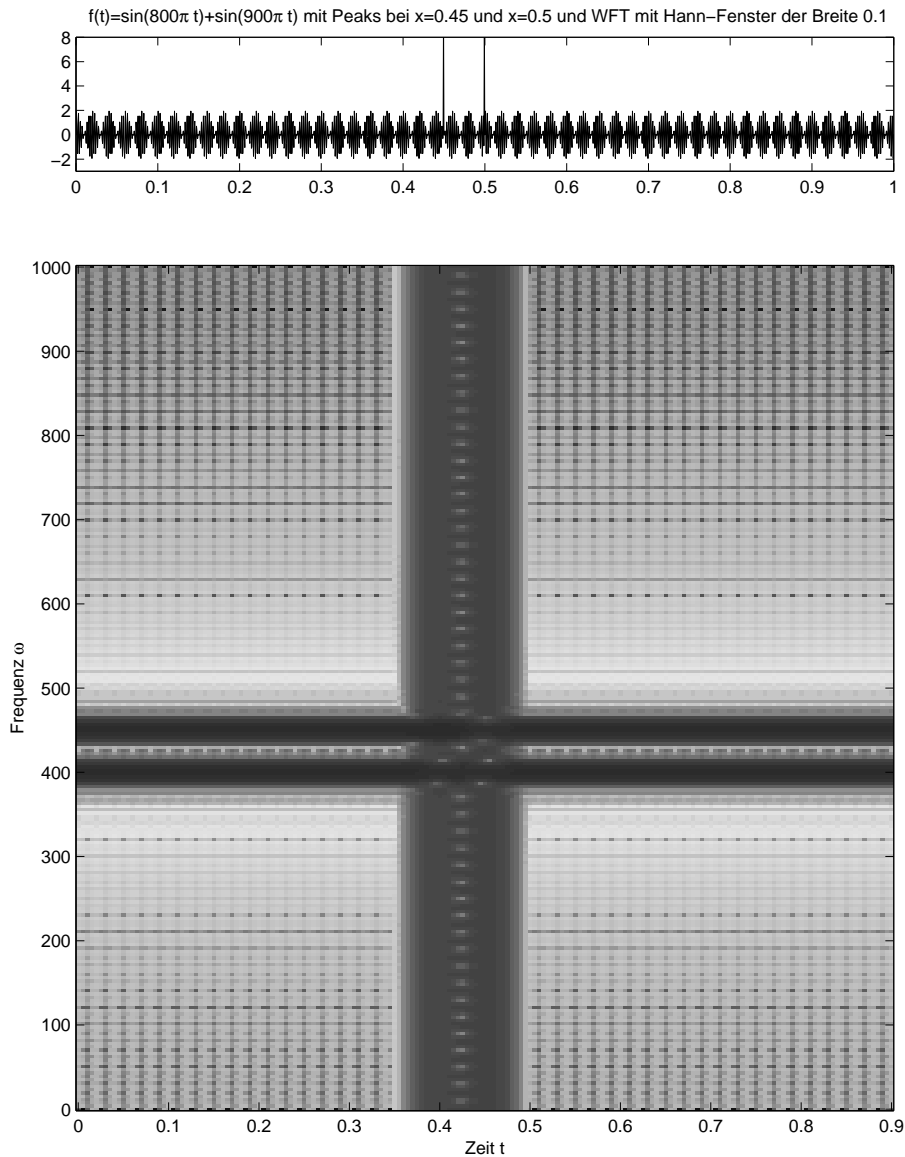


Abbildung 2.5: WFT bei großer Fensterbreite.

Fensterbreiten. Bei der größeren Fensterbreite von 0.1 (Abbildung 2.5) hat man eine gute Auflösung der beiden reinen Sinusschwingungen in der Zeit-Frequenz-Darstellung. Allerdings ist es kaum möglich, die beiden Peaks bei  $t_1$  und  $t_2$  zu trennen. Bei einer kleineren Fensterbreite von  $g$ , zum Beispiel 0.02 wie in Abbildung 2.4, kann man zwar die beiden Peaks sehr gut auseinanderhalten, aber dafür hat man eine „Verschmierung“ der beiden Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$ .

Dies ist ein allgemeines Prinzip: Eine Vergrößerung der Fensterbreite der Fensterfunktion  $g$  hat zur Folge, daß bei der Berechnung der WFT bzgl.  $g$  die Frequenzen des Signals  $f$  über einen größeren Zeitabschnitt „gemittelt“ berechnet werden. Dabei geht die Zeitinformation immer mehr verloren. (Der Grenzfall

einer unendlichen Fensterbreite führt uns wieder auf die übliche Fouriertransformation, bei der die Frequenzen gemittelt über den gesamten Zeitbereich  $\mathbb{R}$  berechnet werden.)

Bei einer Verkleinerung der Fensterbreite hat man zwar eine bessere zeitliche Auflösung, dafür dominiert die Fensterfunktion  $g$  immer mehr die tieferen Frequenzen des Signals  $f$ , was zu den oben genannten Verschmierungseffekten für niedrig-frequente Phänomene von  $f$  führt. (Im Grenzfall einer unendlich kleinen Fensterbreite wäre  $g$  ein Impuls und die WFT mit dieser „Fensterfunktion“ würde wiederum das Signal  $f$  ergeben: perfekte Zeitinformation ohne Frequenzinformation.)

## 2.3 Zeit-Frequenz-Lokalisierung der WFT

Wir wollen nun aus zwei verschiedenen Blickwinkeln die Koeffizienten  $\tilde{f}(\omega, t)$  interpretieren, und zwar zeit- und frequenzbasiert. Sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$  ein Signal und  $g \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\|g\|_2 \neq 0$  eine Fensterfunktion, dann besagt die Parsevalsche Identität

$$\tilde{f}(\omega, t) = \langle f | g_{\omega, t} \rangle = \langle \hat{f} | \widehat{g_{\omega, t}} \rangle.$$

Schreibt man dies aus, so ergeben sich die folgenden zwei Darstellungen von  $\tilde{f}(\omega, t)$ :

- (1)  $\tilde{f}(\omega, t) = \langle f | g_{\omega, t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \bar{g}(u - t) e^{-2\pi i \omega u} du$
- (2)  $\tilde{f}(\omega, t) = \langle \hat{f} | \widehat{g_{\omega, t}} \rangle = e^{-2\pi i \omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) \bar{\hat{g}}(v - \omega) e^{2\pi i v t} dv$

Hierbei wurden in (2) die Rechenregeln der Fouriertransformation verwendet. Diese zwei Darstellungen liefern die folgenden zwei Interpretationen:

- (1) Es sei  $t_0$  ein Zeitpunkt. Das Signal  $f$  wird mit der Funktion  $u \mapsto \bar{g}(u - t_0)$  gefenstert und dann fouriertransformiert. Dann enthält  $|\tilde{f}(\omega, t_0)|$  Information über die Größe der vorkommende Frequenzen von  $f$  in der Umgebung des Zeitpunktes  $t_0$ .
- (2) Es sei  $\omega_0$  eine Frequenz. Die Fouriertransformierte  $\hat{f}$  wird mit der Funktion  $v \mapsto \bar{\hat{g}}(v - \omega_0)$  gefenstert und dann invers fouriertransformiert. Dann enthält  $|\tilde{f}(\omega_0, t)|$  Informationen über die Zeitpunkte, in denen die Frequenzen von  $f$  in einem Frequenzband um  $\omega_0$  liegen.

Dabei ist die Größe des Zeitbereiches in (1) festgelegt durch die Lokalisierung der Fensterfunktion  $g$  um den Zeitpunkt  $t_0 = 0$ , und die Größe des Frequenzbandes in (2) festgelegt durch die Lokalisierung der Fensterfunktion  $\hat{g}$  um die Frequenz  $\omega_0 = 0$ . Will man also in Zeit und Frequenz eine gute Lokalisierung oder Auflösung von  $f$  erhalten, muß die Fensterfunktion  $g$  so gewählt werden, daß sie gleichzeitig möglichst gut in Zeit (über  $g$ ) und Frequenz (über  $\hat{g}$ ) lokalisiert. Diesem Wunsch sind jedoch durch die sogenannte *Heisenbergsche Unschärferelation* Grenzen gesetzt. Wir präzisieren dies im folgenden Abschnitt.

### 2.3.1 Heisenbergsche Unschärferelation

Formal definiert man die Lokalisierungseigenschaft der Fensterfunktion  $g \in L^2(\mathbb{R})$  mit  $\|g\| = 1$  über die Begriffe *Zentrum*  $t_0(g)$  und *Breite*  $T(g)$ , wobei

$$t_0(g) := \int_{-\infty}^{\infty} t |g(t)|^2 dt \quad \text{und} \quad T(g) := \left( \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Analog definiert man das Zentrum  $\omega_0(g)$  und die Breite  $\Omega(g)$  für die Fouriertransformierte  $\hat{g}$  durch

$$\omega_0(g) := \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \quad \text{und} \quad \Omega(g) := \left( \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ist die Fensterfunktion  $g$  aus dem Zusammenhang klar, so schreiben wir einfach  $t_0$ ,  $T$ ,  $\omega_0$  und  $\Omega$  ohne das Argument  $g$ . Mathematisch gesehen ist das Zentrum  $t_0$  der Erwartungswert und  $T$  die Standardabweichung der Zufallsvariablen  $t \mapsto |g(t)|^2$ . Im allgemeinen sind das Zentrum und die Breite für beliebige Funktionen  $g \in L^2(\mathbb{R})$  nicht definiert. (Diese Werte können unendlich sein!) Existieren Zentrum und Breite von  $g$ , so sagen wir, daß  $g$  um den Zeitpunkt  $t_0$  lokalisiert mit Fensterbreite  $T$ . Analog sagen wir, daß  $\hat{g}$  um die Frequenz  $\omega_0$  mit Frequenzbandbreite  $\Omega$  lokalisiert.

Nach vorherigem Abschnitt suchen wir eine Fensterfunktion, die sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich möglichst gut lokalisiert. Die folgende *Heisenbergsche Unschärferelation* besagt, daß dies gleichzeitig nicht beliebig gut möglich ist.

**Satz 2.3.1 (Heisenbergsche Unschärferelation)** *Es sei  $g \in L^2(\mathbb{R})$  mit  $\|g\| = 1$ , Zentrum  $t_0(g)$  und Breite  $T(g)$ . Weiterhin seien  $\omega_0(g)$  bzw.  $\Omega(g)$  das Zentrum bzw. die Breite von  $\hat{g}$ . Dann gilt*

$$T(g) \cdot \Omega(g) \geq \frac{1}{4\pi}.$$

*Ausgeschrieben bedeutet dies*

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |g(t)|^2 dt \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \right) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

**Beweis:** Wir beweisen die Aussage nur für  $g \in L^2(\mathbb{R})$ , die stetig differenzierbar sind und deren Ableitung  $g'$  wieder in  $L^2(\mathbb{R})$  liegen. Da solche Funktionen eine dichte Teilmenge in  $L^2(\mathbb{R})$  bilden, genügt ein Approximationsargument, um sich von dieser Annahme zu befreien. Hierfür verweisen wir auf die Literatur.

Ist  $T(g)$  oder  $\Omega(g)$  unendlich, so ist die Aussage des Satzes trivialerweise erfüllt. Wir können uns also auf Funktionen  $g \in L^2(\mathbb{R})$  beschränken, für die diese Werte endlich sind.

Als nächsten Reduktionsschritt wollen wir zeigen, daß es ausreicht, die Heisenbergsche Unschärferelation für  $g \in L^2(\mathbb{R})$  mit  $t_0(g) = 0$  und  $\omega_0(g) = 0$  zu zeigen. Sei dazu  $g \in L^2(\mathbb{R})$  beliebig. Wir definieren die Funktion

$$h(t) := e^{-2\pi i \omega_0 t} g(t + t_0).$$

Aus den Rechenregeln für die Fouriertransformierte ergibt sich

$$\hat{h}(\omega) = e^{2\pi i t_0 (\omega + \omega_0)} \hat{g}(\omega + \omega_0).$$

Man rechnet sofort nach, daß  $h$  zentriert ist, also  $t_0(h) = 0$  und  $\omega_0(h) = 0$  gilt. Weiterhin gilt die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} & \left( \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |h(t)|^2 dt \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{h}(\omega)|^2 d\omega \right) \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |g(t)|^2 dt \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \right). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß es ausreicht, die Heisenbergsche Unschärferelation für zentrierte Funktionen zu zeigen.

Es sei also nun  $g \in L^2(\mathbb{R})$  mit  $\|g\| = 1$ ,  $t_0(g) = 0$  und  $\omega_0(g) = 0$ . Weiterhin seien  $T(g)$  und  $\Omega(g)$  endlich und  $g$  differenzierbar mit  $g' \in L^2(\mathbb{R})$ . Dann folgt mit der Rechenregel  $\omega \hat{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \widehat{g'}(\omega)$  und der Parsevalschen Relation  $\|\hat{g}'\| = \|g'\|$

$$\begin{aligned} & \left( \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |g(t)|^2 dt \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \right) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |g(t)|^2 dt \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} |g'(t)|^2 dt \right) \geq \dots \end{aligned}$$

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung  $\|f_1\|^2 \|f_2\|^2 \geq |\langle f_1 | f_2 \rangle|^2$  folgt mit  $f_1(t) = |tg(t)|$  und  $f_2(t) = |g'(t)|$

$$\dots \geq \frac{1}{4\pi^2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |tg(t)g'(t)| dt \right)^2 \geq \dots$$

Für beliebige komplexe Zahlen  $a, b \in \mathbb{C}$  gilt  $|ab| = |a\bar{b}| \geq \operatorname{Re}(a\bar{b}) = \frac{1}{2}(a\bar{b} + \bar{a}b)$  und daraus folgt mit  $a = tg(t)$  und  $b = g'(t)$

$$\dots \geq \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (tg(t)g'(\bar{t}) + \overline{tg(\bar{t})}g'(t)) dt \right)^2 \geq \dots$$

Nun folgt aus  $\frac{d}{dt}|g(t)|^2 = g(t)\overline{g'(t)} + g'(t)\overline{g(t)}$  und partieller Integration unter Benutzung von  $\int_{-\infty}^{\infty} t|g(t)|^2 dt = 0$

$$\dots \geq \frac{1}{16\pi^2} \left( - \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \right)^2 = \frac{1}{16\pi^2} \|g\|^4.$$

Aus  $\|g\| = 1$  folgt dann die Behauptung. □

Diese Grenze wird tatsächlich auch angenommen. Diejenigen Funktionen, die mit minimaler Unschärfe um  $(t_0, \omega_0)$  konzentriert liegen, sind die Gaußschen Glockenkurven

$$g_{\omega_0, t_0}(t) := \pi^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2\pi i \omega_0 t} e^{-\pi(t-t_0)^2}.$$

Es gilt  $t_0(g_{\omega_0, t_0}) = t_0$ ,  $\omega_0(g_{\omega_0, t_0}) = \omega_0$  und  $T(g_{\omega_0, t_0}) \cdot \Omega(g_{\omega_0, t_0}) = \frac{1}{4\pi}$ . Man kann zeigen, daß dies die einzigen Funktionen sind, für die diese Grenze angenommen wird.

Die Heisenbergsche Unschärferelation hat ihren Ursprung in der Quantenphysik und besagt dort anschaulich, daß ein Elementarteilchen gleichzeitig keine präzise Position und präzisen Impuls hat. Signaltheoretisch läßt sie sich folgendermaßen interpretieren: Bei einem Signal läßt sich Zeitpunkt und Frequenz gleichzeitig nicht beliebig genau bestimmen. Wenn man sagen will, daß das Signal die Frequenz  $\omega_0$  habe, dann muß man das Signal mindestens für eine Periode beobachten, i.e.  $\Delta t \geq 1/\omega_0$ , damit diese Aussage Sinn macht. Daher kann man nicht von einem exakten Zeitpunkt sprechen, an dem das Signal die Frequenz  $\omega_0$  hat.

Damit ist der Zeitparameter  $t$  in der gefensternten Fouriertransformation  $\tilde{f}(\omega, t)$  nicht scharf, sondern repräsentiert ein Zeitintervall, das von der Fensterbreite der Fensterfunktion  $g$  abhängt. Analoges gilt für den Frequenzparameter  $\omega$ . Die Wahl der Fensterfunktion  $g$  bestimmt das „Auflösungsverhältnis“ zwischen Zeit und Frequenz.

### 2.3.2 Informationszellen

Bei allen Methoden der simultanen Zeit-Frequenz- oder Phasenraumanalyse eines Signals tritt das in der Heisenbergschen Unschärferelation begründete Problem auf. Will man eine gute Zeitinformation, so muß man sich mit einer ungenauen Frequenzinformation begnügen. Will man umgekehrt eine genaue Frequenzinformation, so darf man keine gute Zeitinformation erwarten. Dieser Kompromiß kann durch die sogenannte *Zeit-Frequenz-Ebene* oder den *Phasenraum* illustriert werden, bei der die horizontale Achse die Zeit und die vertikale Achse die Frequenz repräsentiert.

Sei  $g \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\|g\| = 1$ , eine um das Zentrum  $t_0$  lokalisierende Funktion mit Fensterbreite  $T$ , deren Fouriertransformierte  $\hat{g}$  um das Zentrum  $\omega_0$  mit Frequenzbandbreite  $\Omega$  lokalisiert. Dann stellen wir  $g$  in der Zeit-Frequenz-Ebene dar durch ein Rechteck der Seitenlängen  $T$  auf der Zeitachse sowie  $\Omega$  auf der Frequenzachse mit Schwerpunkt  $(t_0, \omega_0)$ . Ein solches Rechteck heißt *Informationszelle*, und wir bezeichnen es im folgenden mit  $\text{IZ}(g)$  (siehe Abbildung 2.6). Die Heisenbergsche Unschärferelation besagt in diesem Zusammenhang, daß die Fläche für jede solche Zelle mindestens  $1/4\pi$  beträgt:

$$\text{Fläche } \text{IZ}(g) \geq \frac{1}{4\pi}$$

Man rechnet leicht nach, daß die Informationszelle der zu  $g$ ,  $\|g\| = 1$ , assoziierten „musikalischen Note“  $g_{\omega,t} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g_{\omega,t}(u) := e^{2\pi i \omega u} g(u - t)$  ein Rechteck derselben Seitenlängen  $T$  und  $\Omega$  ist mit dem Schwerpunkt  $(t_0 + t, \omega_0 + \omega)$ . Die WFT eines Signals  $f \in L^2(\mathbb{R})$  bezüglich der Fensterfunktion  $g$

$$\tilde{f}(\omega, t) = \langle f | g_{\omega,t} \rangle$$

liefert eine Zeit-Frequenz-Analyse von  $f$  im Bereich der Informationszelle von  $g_{\omega,t}$ . Proportional zum Wert  $\langle f | g_{\omega,t} \rangle$  färbt man in einer graphischen Darstellung

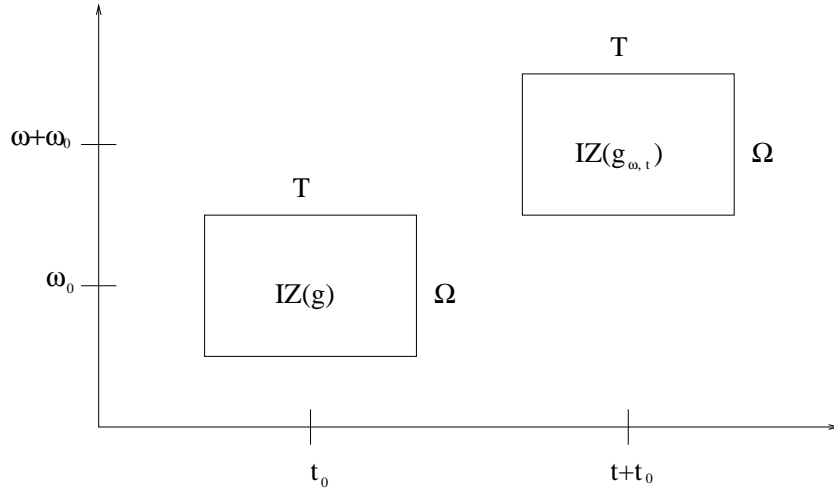


Abbildung 2.6: Informationszellen für  $g$  und  $g_{\omega, t}$ .

die entsprechende Informationszelle mit einem Grauton. Betrachtet man nun die WFT nur auf einem diskreten Gitter von Phasenraumpunkten der Zeit-Frequenz-Ebene, so erhält man eine Pflasterung der Zeit-Frequenz-Ebene mit (eventuell überlappenden) kongruenten Informationszellen, deren Farbtöne die Zeit-Frequenz-Information des Signals  $f$  wiedergibt.

## 2.4 Rekonstruktion des Signals aus seiner WFT

Es sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$  ein Signal mit WFT  $\tilde{f}(\omega, t)$  bezüglich der Fensterfunktion  $g \in L^2(\mathbb{R})$  mit  $\|g\| \neq 0$ . In diesem Abschnitt geht es darum, das Signal aus der WFT zu rekonstruieren. Wir haben in Abschnitt 2.1 den Koeffizienten  $\tilde{f}(\omega, t)$  interpretiert als Anteil  $\langle f | g_{\omega, t} \rangle$ , mit dem die Note  $g_{\omega, t}$  im Signal  $f$  enthalten ist. Daher sollte sich (intuitiv) das Signal  $f$  dadurch rekonstruieren lassen, indem man die durch  $\langle f | g_{\omega, t} \rangle$  gewichteten Noten  $g_{\omega, t}$  aufsummiert:

$$f(u) \sim \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle f | g_{\omega, t} \rangle g_{\omega, t}(u) d\omega dt.$$

Wir zeigen nun, daß dies bis auf einen Faktor tatsächlich gilt. Da nach Definition  $\tilde{f}(\omega, t) = \hat{f}_t(\omega)$  gilt, können wir die inverse Fouriertransformation bezüglich der Variablen  $\omega$  anwenden und erhalten

$$\bar{g}(u - t)f(u) = f_t(u) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\omega, t) e^{2\pi i \omega u} d\omega.$$

Wir können  $f(u)$  nicht einfach durch Division mit  $\bar{g}(u - t)$  zurückgewinnen, da diese Funktion verschwinden könnte (Division durch Null). Stattdessen multiplizieren wir beide Seiten mit  $g(u - t)$  und integrieren über  $t$ :

$$\int_{\mathbb{R}} |g(u - t)|^2 f(u) dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\omega, t) g(u - t) e^{2\pi i \omega u} d\omega dt.$$

Da aber  $\|g\| \neq 0$  vorausgesetzt ist, gilt die Rekonstruktionsformel

$$f(u) = \frac{1}{\|g\|^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\omega, t) g_{\omega, t}(u) d\omega dt.$$

Dies stimmt also für  $\|g\| = 1$  exakt mit unserer Intuition überein.

## 2.5 Diskrete Version der WFT

Die Syntheseformel bei der Rekonstruktion von  $f$  aus seiner WFT

$$f(u) = \frac{1}{\|g\|^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\omega, t) g_{\omega, t}(u) d\omega dt$$

liefert eine äußerst redundante Darstellung, da für jeden Zeitpunkt  $u$  über die gesamte Zeit-Frequenz-Ebene integriert wird. Da weiterhin in praktischen Berechnungen sowieso nur eine diskrete (sogar nur endliche) Menge von Werten  $\tilde{f}(\omega, t)$  berechnet werden kann, soll nun eine diskrete Version der WFT hergeleitet werden.

Wir machen hierzu die Voraussetzung, daß die Fensterfunktion  $g$  einen kompakten Träger im Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  hat. Dann ist das lokalisierte Signal  $f_t(u) := \bar{g}(u - t)f(u)$  zeitbegrenzt auf  $[a + t, b + t]$  und kann daher in diesem Bereich in eine Fourierreihe entwickelt werden:

$$f_t(u) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle f_t | \frac{1}{\sqrt{T}} e_{T, m} \rangle \frac{1}{\sqrt{T}} e_{T, m}(u),$$

wobei wir mit  $T := b - a$  für  $m \in \mathbb{Z}$  die Funktionen

$$e_{T, m}(u) := e^{2\pi i u m / T}$$

definieren. Dabei bildet  $(\frac{1}{\sqrt{T}} e_{T, m})_{m \in \mathbb{Z}}$  eine ONB in dem Hilbertraum  $L^2([a + t, b + t])$  mit Skalarprodukt  $\langle f | g \rangle = \int_{a+t}^{b+t} f(u) \overline{g(u)} du$ . Wir betonen, daß diese Gleichung nur für  $u \in [a + t, b + t]$  gilt. Es sei im folgenden  $\nu := \frac{1}{b-a} = \frac{1}{T}$  der Abstand zwischen zwei benachbarten analysierten Frequenzen, die sogenannte *Frequenzschrittweite*. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle f_t | e_{T, m} \rangle &= \int_{a+t}^{b+t} \bar{g}(u - t) f(u) e^{-2\pi i m \nu u} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(u - t) f(u) e^{-2\pi i m \nu u} du \\ &= \tilde{f}(m\nu, t). \end{aligned}$$

Wir multiplizieren nun beide Seiten der Fourierreihendarstellung mit  $g(u - t)$  und erhalten die für alle  $u \in \mathbb{R}$  gültige Gleichung

$$|g(u - t)|^2 f(u) = \nu \sum_{m \in \mathbb{Z}} g(u - t) \tilde{f}(m\nu, t) e^{2\pi i m \nu u}.$$

Das Ziel ist es nun,  $f(u)$  auf der linken Seite zu isolieren. Wir definieren mit der *Zeitschrittweite*  $\tau > 0$  die Hilfsfunktion

$$H_\tau(u) := \tau \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(u - n\tau)|^2.$$

Die Wohldefiniertheit von  $H_\tau$  folgt sofort aus der Kompaktheit der Träger von  $g$ . Für  $\tau \rightarrow 0$  gilt  $H_\tau(u) \rightarrow \|g\|^2$  (für Riemann-integrierbare  $g$  definiert  $H_\tau$  eine Riemann-Summe für  $\|g\|^2$ ). Summiert man also über  $n$  mit Schrittweite  $\tau$ , erhält man

$$H_\tau(u)f(u) = \tau\nu \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g(u - n\tau) \tilde{f}(m\nu, n\tau) e^{2\pi im\nu u}.$$

Um durch  $H_\tau$  dividieren zu können, muß offensichtlich  $H_\tau(u) \neq 0$  für fast alle  $u$  gelten. Es sei

$$A_\tau := \inf_{u \in \mathbb{R}} H_\tau(u) \quad \text{und} \quad B_\tau := \sup_{u \in \mathbb{R}} H_\tau(u).$$

Man kann nun zeigen, daß für „gutartige“ Fenster  $g$  für hinreichend kleine  $\tau$  und alle  $u \in \mathbb{R}$

$$0 < A_\tau \leq H_\tau(u) \leq B_\tau < \infty$$

gilt. Für diesen Fall erhält man die *diskrete WFT-Rücktransformation*

$$f(u) = \tau\nu \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{g(u - n\tau)}{H_\tau(u)} \tilde{f}(m\nu, n\tau) e^{2\pi im\nu u}.$$

Die Endlichkeit von  $B_\tau$  sichert dabei numerische Stabilität bei der Summation.

Abschließend soll kurz auf die durch die diskrete WFT entstehende Pflasterung der Zeit-Frequenz-Ebene eingegangen werden. Betrachtet man die Definition von  $H_\tau(u)$ , so erkennt man, daß  $0 < \tau \leq b - a$  zur Erfüllung von  $A_\tau > 0$  notwendig ist. Falls dies nämlich nicht erfüllt ist, gilt  $H_\tau(u) = 0$  für  $b < u < a + \tau$ . Mit  $0 < \tau \leq b - a$  und der Definition von  $\nu$  gilt

$$0 < \tau \cdot \nu \leq 1.$$

Definiert man durch

$$\rho(\nu, \tau) := \frac{1}{\nu \cdot \tau} = \frac{b - a}{\tau}$$

die *Sampledichte*, so hat man ein Maß für die Redundanz der Darstellung für  $f$ . Ist etwa  $b - a = 1024$  und die Schrittweite  $\tau = 256$ , so ist die Sampledichte 4, was in der Praxis bei Realzeitanwendungen eine gängige Größe ist. Das Extrembeispiel  $\tau \cdot \nu = 1$  führt wegen der fehlenden Redundanz der Darstellung in der Praxis zu numerisch instabilen und damit nicht praktikablen Algorithmen.

## 2.6 Schwachpunkte der WFT

Trotz der durch die Einführung von Fenstern zurückgewonnenen Zeitlokalisierung hat die WFT-Analyse Schwachpunkte, die wir im folgenden diskutieren wollen. Die Fensterfunktion  $g$  führt eine Art Skalierung im Zeit- und Frequenzbereich ein. Anders formuliert wird durch die Fensterfunktion  $g$  eine Informationszelle der Längen  $T$  bezüglich der Zeitachse und  $\Omega$  bezüglich der Frequenzachse festgelegt. Das Signal  $f$  wird nun durch die Noten  $g_{\omega,t}$  auf diesen Zeit-Frequenzbereichen mit Schwerpunkt  $(\omega, t)$  analysiert. Hat nun aber ein Signal in Bezug auf diese Fenstergröße starke lokale Schwankungen (also an diesen Stellen ein breites Frequenzband) oder globale Schwankungen, so ist die WFT ungeeignet. Wir wollen dies noch einmal mit anderen Worten zusammenfassen:

- (1) Wir betrachten bezüglich  $T$  zeitliche lokale Veränderungen, z. B. einen Peak der Breite  $\Delta u \ll T$  an der Stelle  $u = u_0$ . Ein solcher Peak wird bei der WFT-Synthese zusammengesetzt aus den Noten  $g_{\omega,t}$  der Länge  $T$ . Dies ist nur möglich, wenn viele Noten  $g_{\omega,t}$  mit  $t \approx u_0$  und vielen verschiedenen Frequenzen verwendet werden, wobei das Prinzip der konstruktiven und destruktiven Interferenz zugrunde liegt. Damit ist  $\tilde{f}(\omega, u_0)$  ausgeweitet in der Frequenz.

**Faustregel:** Eigenschaften von  $f$ , die wesentlich kürzer als  $T$  sind, werden im Frequenzbereich synthetisiert.

- (2) Wir betrachten nun bezüglich  $T$  große, globale Schwankungen  $\Delta u \gg T$ , z. B. ein Signal, das im wesentlichen aus einer niederfrequenten Sinusschwingung besteht. In diesem Fall werden viele niedrig-frequente Noten  $g_{\omega,t}$  über das Intervall  $\Delta u$  verteilt benötigt, um  $f$  zu synthetisieren. Damit ist  $\tilde{f}(\omega, t)$  ausgeweitet in der Zeit.

**Faustregel:** Eigenschaften von  $f$ , die wesentlich länger als  $T$  sind, werden im Zeitbereich synthetisiert.

In beiden Fällen werden also zur Synthetisierung von Eigenschaften eines Signals, die eigentlich sehr einfach sind (z. B. Peak oder niederfrequente Sinusschwingung), zur Synthetisierung viele Noten  $g_{\omega,t}$  oder mit anderen Worten viele Daten benötigt. Somit ist die WFT in diesen Fällen nicht effizient.

Die im folgenden Kapitel besprochene Waveletanalyse basiert auf einer anderen Einteilung der Zeit-Frequenz-Ebene und kann dadurch Phänome wie Peaks oder niederfrequente Schwingungen besser erkennen oder analysieren.

## Kapitel 3

# Kontinuierliche Wavelettransformationen (CWT)

Die Wavelettransformation liefert wie die gefensterte Fouriertransformation eine Zeit-Frequenz-Beschreibung eines Signals. Analog zur WFT definiert man die kontinuierliche Wavelettransformation (CWT) eines Signals  $f \in L^2(\mathbb{R})$  durch

$$\tilde{f}(s, t) := |s|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \bar{\psi} \left( \frac{u-t}{s} \right) du.$$

Dabei ist  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  eine geeignete Funktion, das sogenannte *Mutterwavelet*. Damit sind die WFT und die CWT in ihren Definitionen sehr ähnlich: beide Transformationen berechnen innere Produkte eines Signals  $f$  mit einer Familie von Funktionen indiziert durch zwei Parameter, nämlich

$$g_{\omega, t}(u) := e^{2\pi i \omega u} g(u-t)$$

bei der WFT und

$$\psi^{s, t}(u) := |s|^{-\frac{1}{2}} \psi \left( \frac{u-t}{s} \right)$$

bei der CWT. Dabei heißen die Funktionen  $\psi^{s, t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  *Wavelets*. Dies sind skalierte und translatierte Versionen des Mutterwavelets  $\psi$  (daher die Bezeichnungen  $s$  und  $t$  für die Parameter). Der fundamentale Unterschied zwischen der WFT und CWT besteht in dieser Skalierung: Bei der WFT haben die analysierenden Funktionen  $g_{\omega, t}$  konstante Fensterbreite, und  $\omega$  gibt die Frequenz, also die Anzahl der Oszillationen an. Bei der CWT sind die Anzahl der Oszillationen der analysierenden Funktionen  $\psi^{s, t}$  konstant, und  $s$  variiert die Fensterbreite. Dabei hat eine Erhöhung des Skalierungsparameters  $s$  eine Vergrößerung der Fensterbreite zur Folge, was bei konstanter Anzahl der Oszillationen eine Verringerung der Frequenz impliziert. Mit anderen Worten wird bei der WFT ein Signal durch Noten  $g_{\omega, t}$  verschiedener Tonhöhen aber gleicher Tondauer analysiert, während bei der CWT die analysierenden Noten  $\psi^{s, t}$

mit niedriger Frequenz eine lange Tondauer und die mit hoher Frequenz eine kurze Tondauer haben. Damit kann die CWT durch ihre kurzen hohen Noten zeitlich kurze aber hochfrequente Anteile eines Signals (wie z. B. Peaks) erkennen, aber ebenso durch ihre langen tiefen Noten die glatten niedrigfrequenten Eigenschaften des Signals effizient kodieren.

In diesem Kapitel soll die CWT analog zur WFT eingeführt und diskutiert werden. Auf der einen Seite sind nun die mathematischen Hintergründe wesentlich komplizierter als bei der WFT, so daß oft auf die Beweise und Motivation mathematisch-technischer Definitionen nicht eingegangen werden kann. Auf der anderen Seite soll auf die Exaktheit der mathematischen Definitionen und Argumentationen nicht verzichtet werden. Unser Ziel ist es, die Hauptideen der Wavelettransformation verständlich darzustellen und an einigen Stellen einen Einblick in die dahintersteckende Mathematik zu geben. Belohnt werden wir durch einen wunderschönen Algorithmus, die sogenannte *schnelle diskrete Wavelettransformation*, die wir im nächsten Kapitel vorstellen. Dieser Algorithmus berechnet die Wavelettransformation eines diskreten Signals der Länge  $n$  in einer Laufzeit von  $O(n)$  (im Vergleich zu  $O(n \log(n))$  bei der FFT) und läßt sich relativ einfach implementieren.

### 3.1 Definition der CWT

Bei der gefensternten Fouriertransformation oder WFT ist die Fensterfunktion  $g \in L^2(\mathbb{R})$  Ausgangspunkt der Analyse, die man sich als eine glockenförmig um den Nullpunkt lokalisierte reelle Funktion vorstellt. Vom mathematischen Standpunkt aus eignen sich als Fensterfunktion (im Sinne einer möglichen Rekonstruktion des Signals aus seiner WFT) alle Funktionen  $g \in L^2(\mathbb{R})$  mit  $\|g\| \neq 0$ . Ähnlich ist bei der *kontinuierlichen Wavelettransformation* oder CWT (continuous wavelet transformation) ein Wavelet  $\psi$  Ausgangspunkt der Analyse, das man sich im konkreten Fall als ein reelles, um den Nullpunkt lokalisiertes „Wellchen“ vorstellt. Vom mathematischen Standpunkt eignen sich nicht alle  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ , sondern man benötigt eine technische Voraussetzung an  $\psi$ , deren Bedeutung erst bei der Rekonstruktion des Signals aus seiner CWT klar wird. Dies führt zur folgenden Definition:

**Definition 3.1.1** Eine Funktion  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ , welche die Zulässigkeitsbedingung

$$0 < c_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

erfüllt, heißt Wavelet.

Wir wollen auf die Zulässigkeitsbedingung bis auf ein paar erklärende Bemerkungen nicht näher eingehen. Man kann zeigen, daß die Menge der Wavelets  $\{\psi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \psi \text{ ist zulässig}\}$  zusammen mit der Nullfunktion einen dichten linearen Teilraum von  $L^2(\mathbb{R})$  bildet, es gibt also eine „sehr große Auswahl“

an Wavelets. Weiterhin impliziert die Zulässigkeitsbedingung für Wavelets mit  $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , daß der Mittelwert von  $\psi$  verschwindet, also  $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$ , und  $\hat{\psi}(0) = 0$  gilt. Das bedeutet anschaulich, daß ein Wavelet eine um die  $x$ -Achse (Mittelwert ist Null!) oszillierende Kurve ist (beliebig niedrige Frequenzen kommen nicht vor!). Für weitere Details verweisen wir auf das Wavelet-Buch von [Louis/Maaß/Rieder].

Zum Wavelet  $\psi$  und  $s, t \in \mathbb{R}, s \neq 0$ , definieren wir die Funktionen

$$\psi^{s,t} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \psi^{s,t}(u) := |s|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{u-t}{s}\right).$$

Für eine Illustration der  $\psi^{s,t}$  siehe Abbildung 3.1. Dort sind auch die Auswirkungen des Skalierungsfaktors  $s$  im Frequenzbereich dargestellt, was auch Inhalt des nächsten Satzes ist.

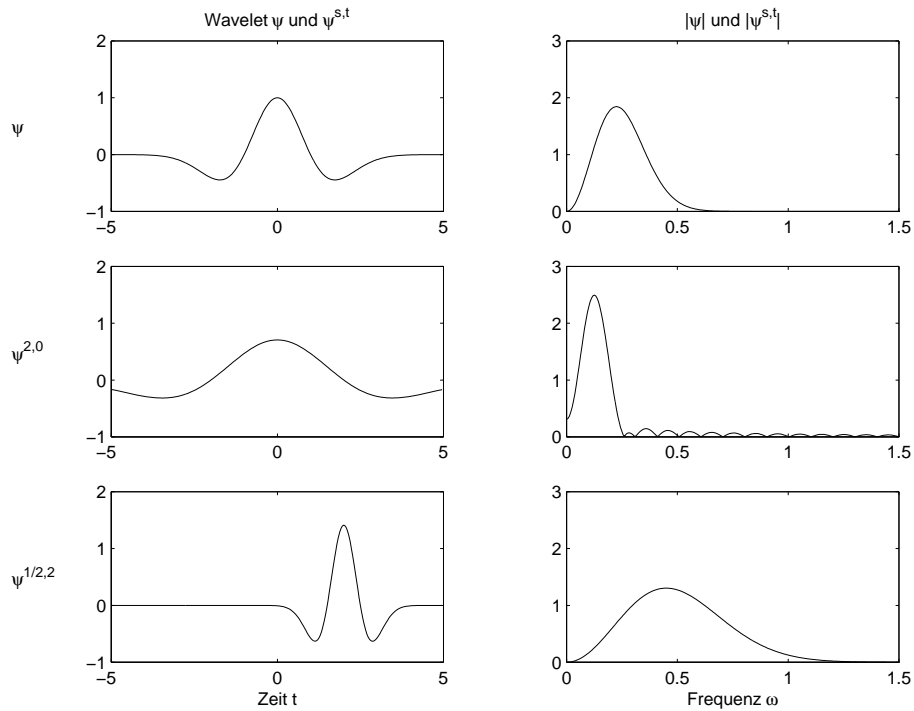


Abbildung 3.1: Skalierte und translatierte Versionen  $\psi^{s,t}$  des Wavelets  $\psi$ .

**Satz 3.1.2** *Ist  $\psi$  ein Wavelet,  $s, t \in \mathbb{R}, s \neq 0$ , dann ist auch  $\psi^{s,t}$  ein Wavelet. Genauer gilt*

$$\|\psi^{s,t}\| = \|\psi\|, \quad (3.1)$$

$$\widehat{\psi^{s,t}}(\omega) = |s|^{1/2} e^{-2\pi i \omega t} \hat{\psi}(\omega s), \quad (3.2)$$

$$c_{\psi^{s,t}} = |s| c_{\psi}. \quad (3.3)$$

**Beweis:** Die Aussage, daß  $\psi^{s,t}$  ein Wavelet ist, falls dies für  $\psi$  gilt, folgt sofort aus (3.1) und (3.3). Wir beweisen hier nur (3.2). Diese Aussagen (3.1) und (3.3)

folgen mit ähnlichen Rechnungen.

$$\begin{aligned}
 \widehat{\psi^{s,t}}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \psi^{s,t}(u) e^{-2\pi i \omega u} du \\
 &= |s|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{u-t}{s}\right) e^{-2\pi i \omega u} du \\
 &= |s|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |s| \psi(x) e^{-2\pi i \omega (xs+t)} dx \\
 &= |s|^{1/2} e^{-2\pi i \omega t} \widehat{\psi}(\omega s).
 \end{aligned}$$

□

**Definition 3.1.3** Die kontinuierliche Wavelettransformation oder CWT eines Signals  $f \in L^2(\mathbb{R})$  zum Wavelet  $\psi$  ist durch

$$\tilde{f}(s, t) := \langle f | \psi^{s,t} \rangle = |s|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \bar{\psi}\left(\frac{u-t}{s}\right) du,$$

$s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, t \in \mathbb{R}$ , definiert.

Wir verwenden für die WFT und CWT zwar dasselbe Symbol  $\tilde{f}$ , aus dem Zusammenhang und der Wahl der Parameter  $(\omega, t)$  bzw.  $(s, t)$  sollten daraus jedoch keine Verwechslungsprobleme aufkommen. Völlig analog zur WFT mißt das Skalarprodukt  $\langle f | \psi^{s,t} \rangle$  die Korrelation zwischen dem Signal  $f$  und der „musikalischen Note“  $\psi^{s,t}$ . Das Signal

$$u \mapsto \langle f | \psi^{s,t} \rangle \psi^{s,t}(u)$$

ist die „Projektion“ des Signals  $f$  auf die musikalische Note  $\psi^{s,t}$  und ergibt damit den Anteil, mit dem  $\psi^{s,t}$  in  $f$  enthalten ist.

## 3.2 Beispiele für Wavelets

### 3.2.1 Wavelets mit expliziten Formeln

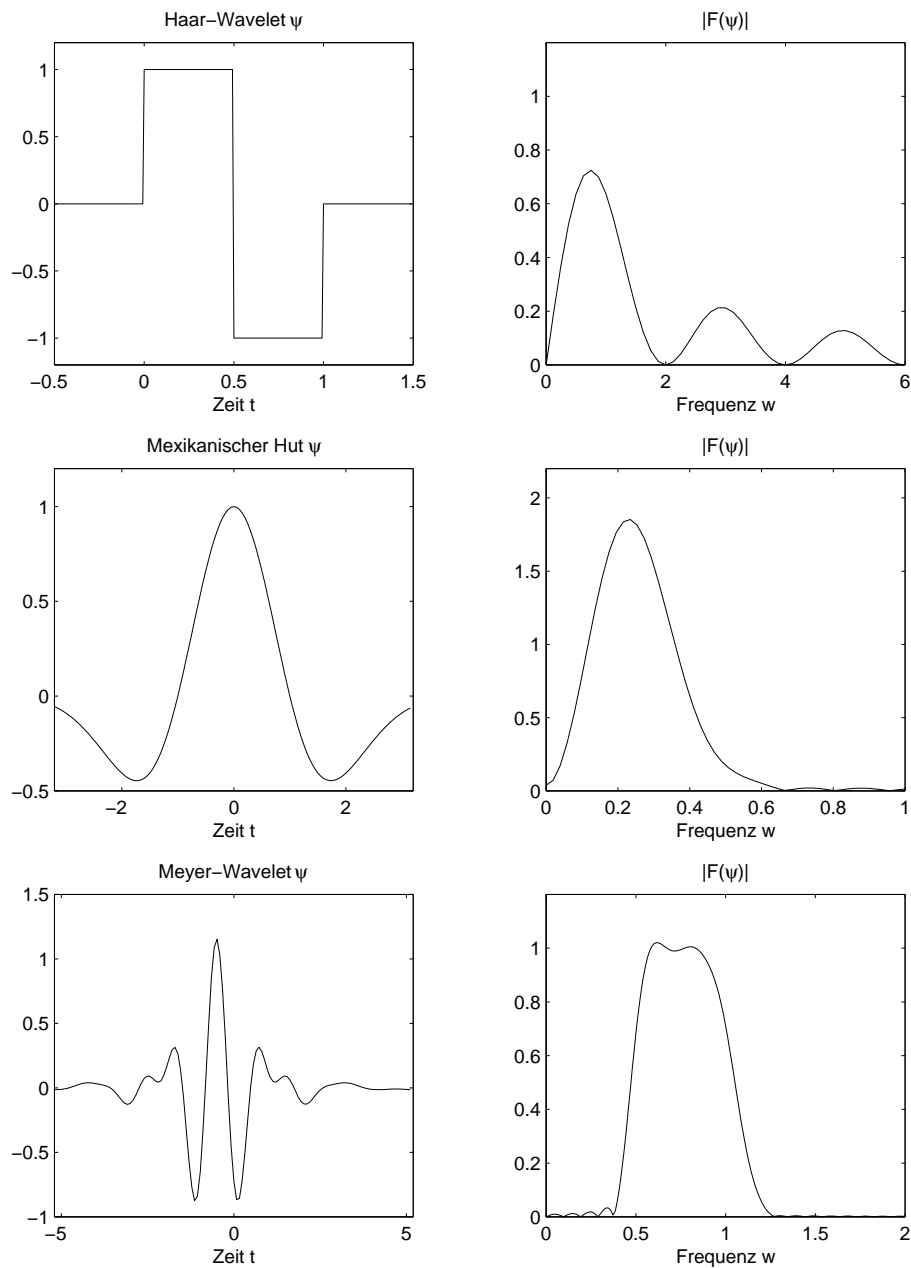


Abbildung 3.2: Wavelets mit expliziten Formeln.

In Abbildung 3.2 sind in der linken Spalte drei Wavelets und in der rechten Spalte die Beträge der zugehörigen Fouriertransformierten dargestellt. Um zu zeigen, daß es sich dabei tatsächlich um Wavelets handelt, wenden wir Kriterien an, die hinreichende Bedingung garantieren. Den Beweis für die Sätze findet

man u. a. in dem Buch von [Louis/Maaß/Rieder].

**Satz 3.2.1** *Es habe  $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  kompakten Träger. Dann gilt*

$$\psi \text{ Wavelet} \iff \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0.$$

Als Anwendungen dieses Satzes betrachten wir die durch

$$\psi(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion  $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . Da offensichtlich  $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$  gilt, ist  $\psi$  nach Satz 3.2.1 als Wavelet nachgewiesen. Dieses sogenannte *Haar-Wavelet* ist das einfachste Beispiel für ein Wavelet und wird uns zur Illustration durch die ganze Vorlesung hindurch begleiten.

**Satz 3.2.2** *Ist  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  stetig differenzierbar mit*

$$\psi := \phi' \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\},$$

*dann ist  $\psi$  ein Wavelet.*

Als Anwendung ergibt sich, daß der sogenannte *Mexikanische Hut*  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\psi(t) := -\frac{d^2}{dt^2} e^{-\frac{t^2}{2}} = (1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$$

als Wavelet nachgewiesen ist. Die Funktion  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\phi(t) := -\frac{d}{dt} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

genügt nämlich den Bedingungen von Satz 3.2.2. Die Funktion  $\phi$  ist bis auf das Vorzeichen die Ableitung der Gaußschen Funktion. Die Darstellung von  $\psi$  (bis auf eine andere Normierung) in Abbildung 3.2 verrät, wie dieses Wavelet zu seinem Namen gekommen ist. Im Gegensatz zum Haar-Wavelet ist der Mexikanische Hut eine  $C^\infty$ -Funktion und besitzt eine wesentlich bessere Lokalisierung im Frequenzbereich.

Das dritte Beispiel in Abbildung 3.2 ist ein sogenannte *Meyer-Wavelet*, das über die Fouriertransformierte definiert ist. Es sei

$$\hat{\psi}(y) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{\frac{iy}{2}} (w(y) + w(-y))$$

mit

$$w(y) := \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3y}{2\pi} - 1\right)\right) & \text{falls } \frac{2\pi}{3} \leq y < \frac{4\pi}{3}, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3y}{2\pi} - 1\right)\right) & \text{falls } \frac{4\pi}{3} \leq y < \frac{\pi}{3}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $\nu : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  eine glatte Funktion derart ist, daß  $\nu(y) = 0$  für  $y \leq 0$ ,  $\nu(y) = 1$  für  $y \geq 1$  und  $\nu(y) + \nu(1 - y) = 1$  sind. Die Zulässigkeitsbedingung für  $\psi$  ergibt sich leicht aus der expliziten Darstellung von  $\hat{\psi}$ .

**Bemerkung 3.2.3** Die in diesem Unterabschnitt behandelten Wavelets sind alle durch eine explizite Formel definiert. Wir werden zu einem späteren Zeitpunkt sehen, daß dies für die meisten gebräuchlichen Wavelets nicht der Fall ist. Meist sind die Wavelets implizit über die sogenannten Filterkoeffizienten der Skalierungsgleichung definiert, die wir im Kapitel über die Multiskalenanalyse behandeln. Die Wavelets lassen sich in diesen Fällen über eine Rekursionsformel konstruieren, eine explizite analytische Formel ist aber nicht angebar. Die wichtige Klasse der *Daubechies-Wavelets* ist ein Beispiel hierfür. Wegen ihrer zentralen Bedeutung in der Theorie der Wavelets, haben wir sie im nächsten Unterabschnitt dargestellt.

### 3.2.2 Daubechies-Wavelets

In Abbildung 3.3 sind die ersten fünf Wavelets der Familie der sogenannten *Daubechies-Wavelets* dargestellt. Dabei existiert für jede natürliche Zahl  $N \in \mathbb{N}$  ein Wavelet dieser Familie, das wir im folgenden auch mit  $dbN$  bezeichnen. Das Wavelet  $db1$  ist das Haar-Wavelet, alle anderen Daubechies-Wavelets haben keine explizite Formel, sondern können durch ein Iterationsverfahren konstruiert werden. Wie man auch der Abbildung entnehmen kann, nimmt die Regularität der Wavelets  $dbN$  (z. B. im Sinne der Differenzierbarkeit oder im Sinne einer Lokalisierung im Frequenzbereich) mit steigendem  $N$  zu. Die  $dbN$ -Wavelets haben einen kompakten Träger  $[0, 2N - 1]$ . Wir wollen in einem späteren Kapitel auf die Definition und Eigenschaften der Daubechies-Wavelets eingehen.

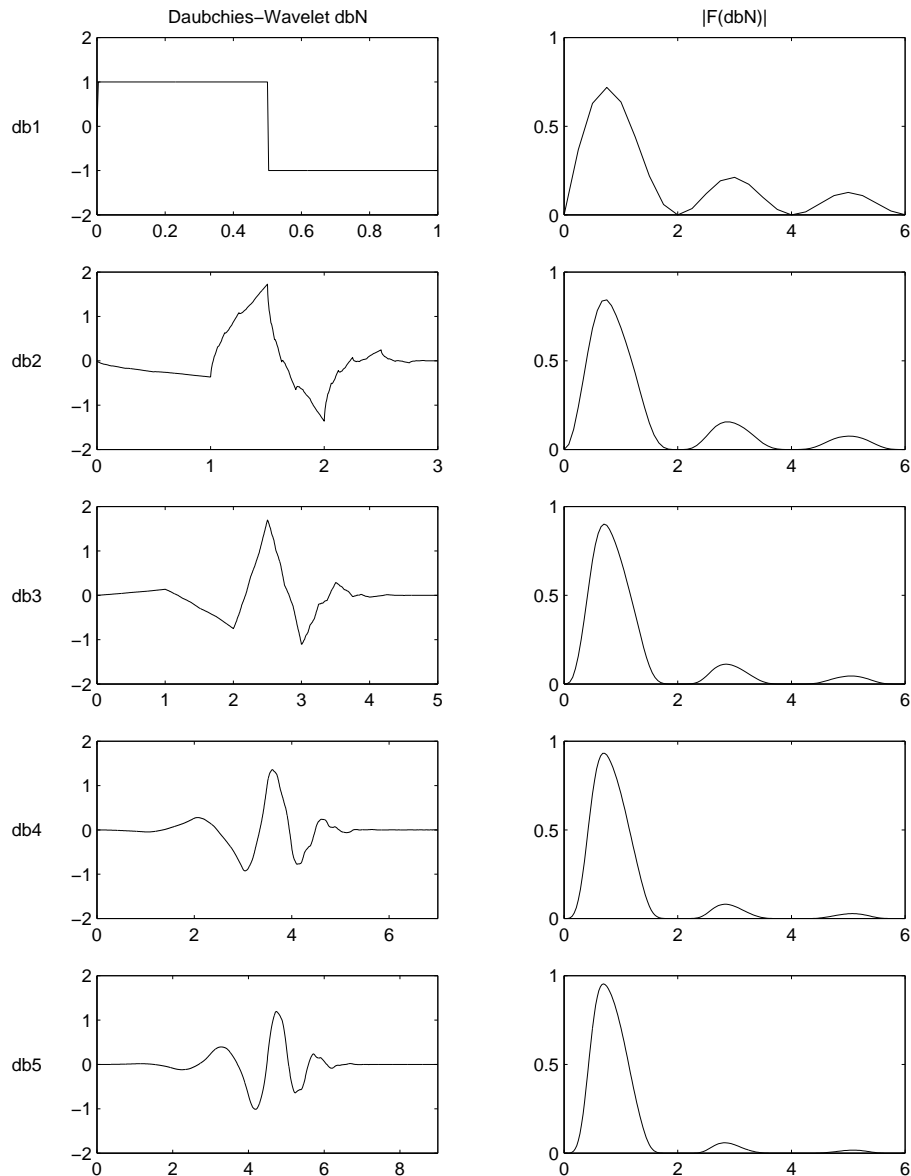


Abbildung 3.3: Daubechies-Wavelets.

### 3.3 Zeit-Frequenz-Lokalisierung der CWT

In ähnlicher Weise wie in Abschnitt 2.3 der Zeit-Frequenzlokalisierung der WFT, in dem wir die WFT  $\tilde{f}(\omega, t)$  eines Signals  $f$  als Zeit-Frequenz-Darstellung (oder Phasenraumdarstellung) des Signals interpretiert haben, wollen wir nun die CWT  $\tilde{f}(s, t)$  interpretieren. Es sei im folgenden  $f \in L^2(\mathbb{R})$  ein Signal und  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  ein Wavelet, das wir als normiert annehmen, also  $\|\psi\| = 1$ . Wie in Abschnitt 2.3.1 bezeichne  $t_0(\psi)$  das Zentrum und  $T(\psi)$  die Breite von  $\psi$  und  $\omega_0(\psi)$  das Zentrum und  $\Omega(\psi)$  die Breite von  $\hat{\psi}$ . Wir nehmen an, daß alle Werte endlich sind. Dann kann man, wie im Abschnitt 2.3.2 über die Informationszel-

len, das Skalarprodukt

$$\langle f | \psi \rangle$$

interpretieren als Zeit-Frequenz-Analyse von  $f$  im Bereich der durch die Parameter  $t_0(\psi)$ ,  $\omega_0(\psi)$ ,  $T(\psi)$  und  $\Omega(\psi)$  definierten Informationszelle  $IZ(\psi)$ . Der folgende Satz besagt, wie sich die von  $\psi$  definierte Informationszelle unter Translation und Skalierung verhält.

**Satz 3.3.1** *Es sei  $\psi$  ein Wavelet mit  $\|\psi\| = 1$  und endlicher Informationszelle  $IZ(\psi)$ . Dann gilt für  $t, s \in \mathbb{R}$ ,  $s \neq 0$ :*

$$t_0(\psi^{s,t}) = s \cdot t_0(\psi) + t \quad \text{und} \quad T(\psi^{s,t}) = |s| \cdot T(\psi), \quad (3.4)$$

sowie

$$\omega_0(\psi^{s,t}) = \frac{1}{s} \omega_0(\psi) \quad \text{und} \quad \Omega(\psi^{s,t}) = \frac{1}{|s|} \Omega(\psi). \quad (3.5)$$

**Beweis:** Die Aussagen ergeben sich unter Verwendung von  $\|\psi\| = \|\psi^{s,t}\|$  durch Integralsubstitution. Wir beweisen nur die Aussage für  $t_0(\psi^{s,t})$ , die anderen Aussagen ergeben sich ähnlich.

$$\begin{aligned} t_0(\psi^{s,t}) &= \int_{\mathbb{R}} u |\psi^{s,t}(u)|^2 du \\ &= \frac{1}{|s|} \int_{\mathbb{R}} u \left| \psi \left( \frac{u-t}{s} \right) \right|^2 du \\ &= \frac{1}{|s|} \int_{\mathbb{R}} (vs+t) |\psi(v)|^2 \cdot |s| dv \\ &= s \int_{\mathbb{R}} v |\psi(v)|^2 dv + t \|\psi\|^2 \\ &= s \cdot t_0(\psi) + t \end{aligned}$$

□

Die Breite der Informationszelle von  $\psi^{s,t}$  in Zeitrichtung verhält sich also proportional zum Skalierungsfaktor  $s$ , während sie sich in Frequenzrichtung reziprok zu  $s$  verhält. Die „Zeit-Frequenz-Fenster“ einer CWT haben also eine von  $s$  variable Gestalt bei gleicher Fläche (siehe Abbildung 3.4).

Wir wollen uns das Ergebnis intuitiv klar machen. Die Skalierung eines Wavelets durch den Faktor  $s > 0$  bedeutet, es durch diesen Faktor zu strecken oder zu stauchen. Je größer der Faktor  $s$  ist, desto ausgedehnter ist das Wavelet, und je kleiner der Faktor  $s$  ist, desto schmaler ist es. Da sich durch Skalierung die Anzahl der Oszillationen der Wavelets nicht verändert, haben ausgedehnte Wavelets ein niedriges aber schmales Frequenzspektrum und gestauchte Wavelets ein hohes aber breites Frequenzspektrum. Genau dieses Phänomen spiegelt sich in den Informationszellen der  $\psi^{s,t}$  wider: Für große Parameter  $s$  ist die Informationszelle in Zeitrichtung ausgedehnt mit Breite  $sT$  um das Zentrum  $t + st_0$  und in Frequenzrichtung gestaucht mit Breite  $\frac{1}{s}\Omega$  um das Zentrum  $\frac{1}{s}\omega_0$ .

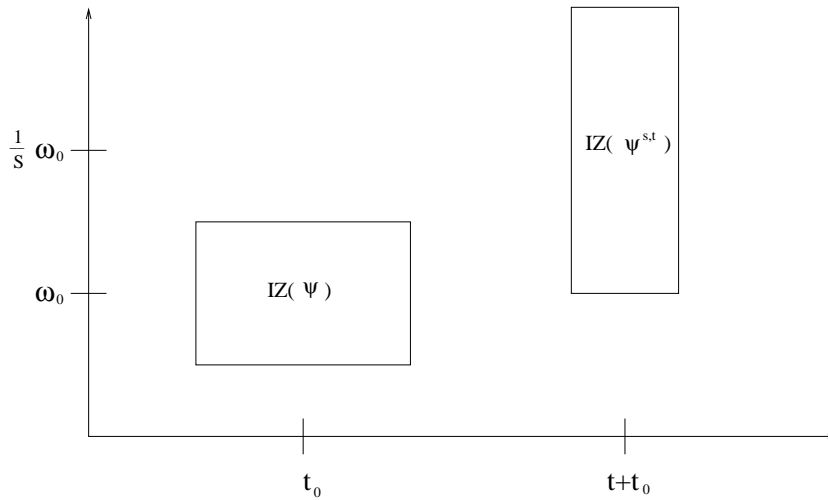


Abbildung 3.4: Informationszellen für  $\psi$  und  $\psi^{s,t}$  für  $s = \frac{1}{2}$ .

Dies entspricht also einer langen Note niedriger Frequenz. Das Skalarprodukt  $\langle f | \psi^{s,t} \rangle$  liefert damit eine Zeit-Frequenz-Analyse von  $f$  bezüglich einer langen Zeitspanne im unteren Frequenzbereich, erkennt also globale, niedrigfrequente Eigenschaften von  $f$ . Analog liefert für kleine Parameter  $s$  das Skalarprodukt  $\langle f | \psi^{s,t} \rangle$  eine Zeit-Frequenz-Analyse von  $f$  bezüglich einer kurzen Zeitspanne im oberen Frequenzbereich, erkennt also plötzliche hochfrequente Ereignisse von  $f$  wie z. B. Peaks oder hochfrequentes Rauschen.

**Merkregel:** Der Skalierungsparameter  $s$  verhält sich reziprok zur Frequenz  $\omega$ . Hat die Note  $\psi$  die Tonhöhe (also die Frequenz)  $\omega_0$ , so hat die Note  $\psi^{s,t}$  die Frequenz  $\frac{\omega_0}{s}$ .

**Bemerkung:** Die obige Definition der Lokalisierung im Frequenzbereich um  $\omega_0$  ist oft für die Wavelet-Transformationen nicht angebracht, da  $\hat{\psi}$  für eine Vielzahl von gebräuchlichen Wavelets eine gerade Funktion ist, die zudem jeweils genau ein ausgeprägtes Maximum für positive bzw. negative Frequenzen besitzt. Sei deshalb

$$\omega_0^+ := \int_0^\infty \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \quad \text{und} \quad \omega_0^- := \int_{-\infty}^0 \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega.$$

Wir sagen, daß  $\psi$  um  $(t_0, \omega_0^\pm)$  lokalisiert. Die Parameter  $\omega_0^\pm$  verhalten sich unter Translation und Skalierung des Wavelets völlig analog zu  $\omega_0$  und die Interpretation bleibt dieselbe. Für weitere Einzelheiten verweisen wir auf S. 31 von [Louis/Maaß/Rieder].

## 3.4 Beispiele zur CWT

### 3.4.1 CWT des Chirpsignals

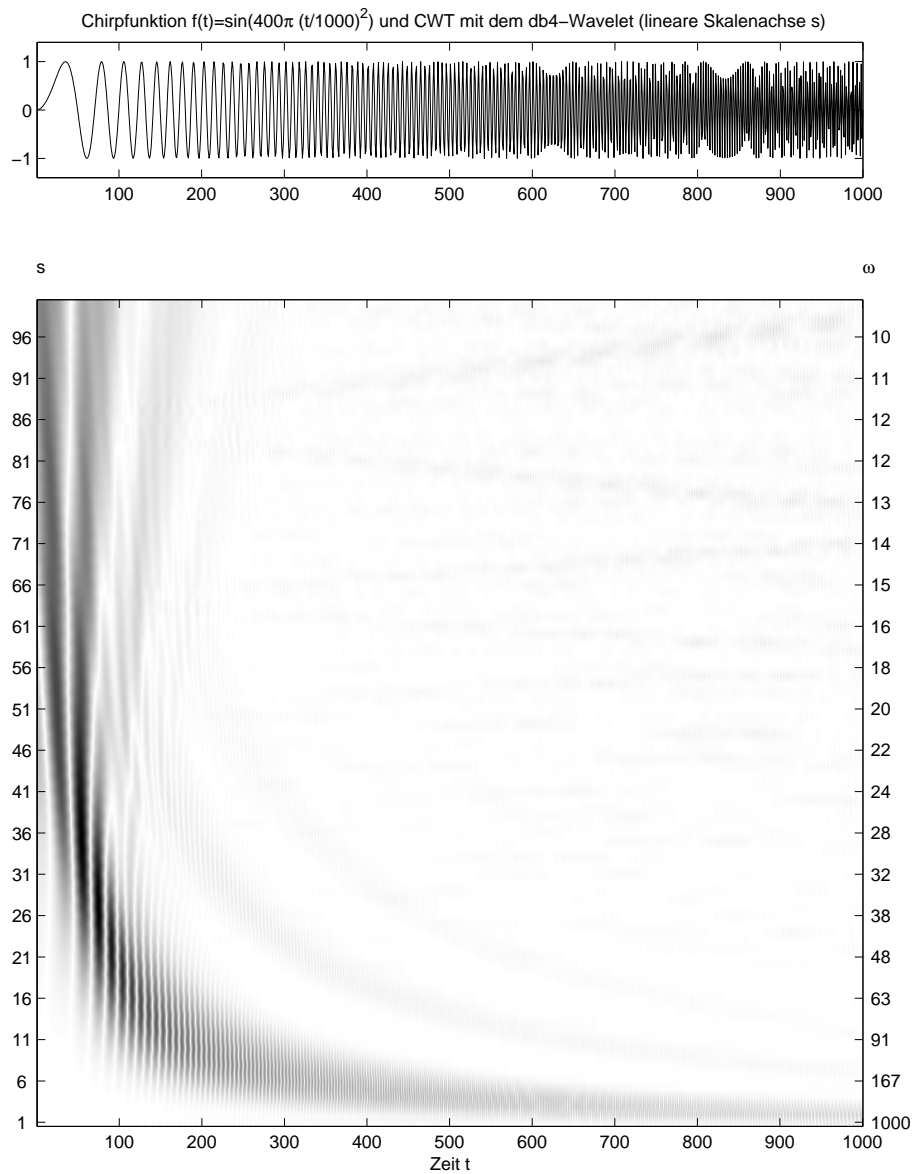


Abbildung 3.5: Zeit-Skalen-Darstellung der CWT einer Chirpfunktion.

Die Abbildung 3.5 zeigt die Zeit-Skalen-Darstellung der CWT eines Chirpsignals  $f$  bezüglich des db4-Wavelets, wobei analog zu den Darstellungen der WFT in Abschnitt 2.2 die Werte

$$|\tilde{f}(s, t)| = |\langle f | \psi^{s,t} \rangle|$$

proportional zu ihren Größen durch verschiedene Graustufen dargestellt sind. Wie wir in Abschnitt 3.3 bewiesen haben, verhält sich der Skalierungsparameter

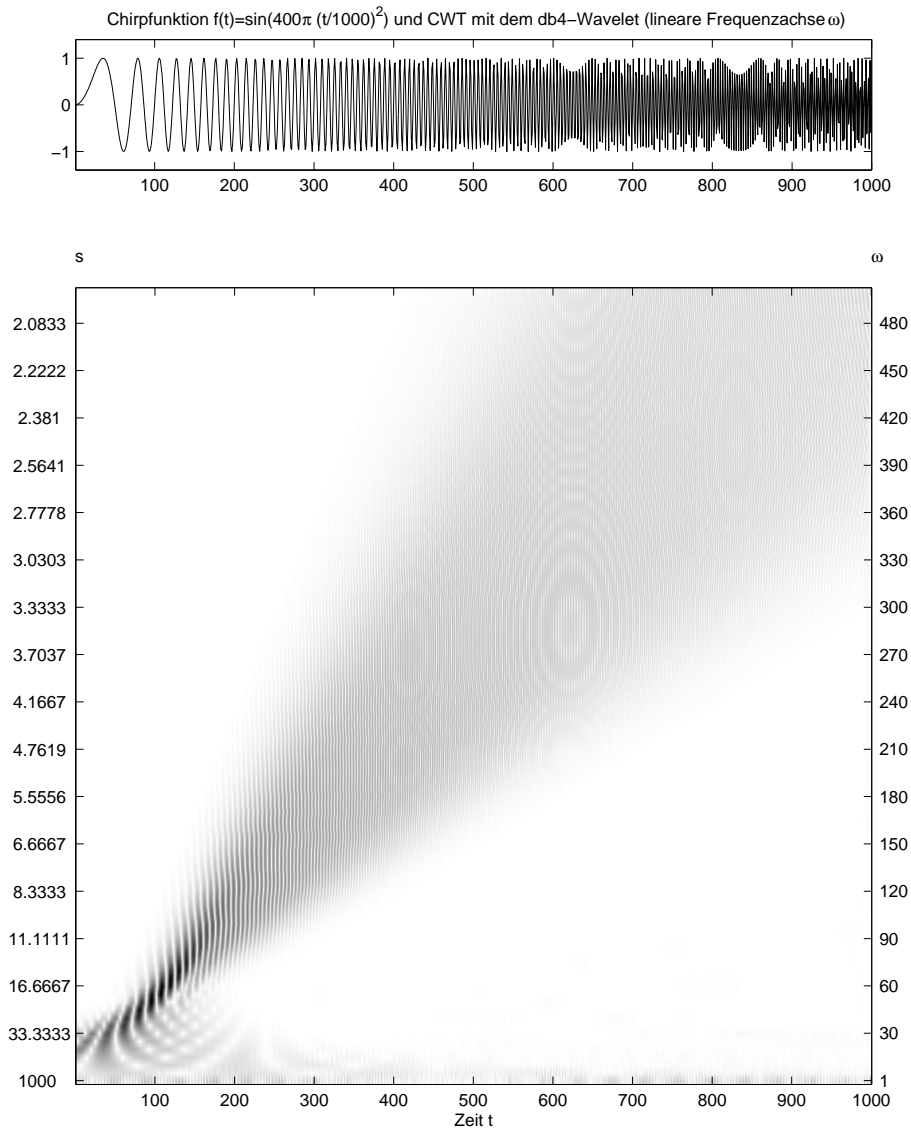


Abbildung 3.6: Zeit-Skalen-Darstellung bei linearer Frequenzaufteilung.

$s$  antiproportional zur analysierten Frequenz  $\omega$ . Da die Chirpfunktion für kleine Zeitpunkte  $t$  niederfrequent ist, hat man eine starke Korrelation zu Wavelets  $\psi^{s,t}$  mit großem Skalierungsfaktor  $s$  zu erwarten. In Abbildung 3.5 hat man daher dunkle Bereiche für kleine  $t$  und große  $s$ . Mit zunehmender Zeit  $t$  steigt die Frequenz  $\omega$  des Chirpsignals, so daß man große Werte  $|\langle f|\psi^{s,t} \rangle|$  für fallendes  $s$  erwartet. Da die Frequenzzunahme des Chirpsignals  $f$  linear ist, hat man einen hyperbel-förmigen dunklen Bereich in der Zeit-Skalen-Darstellung der CWT von  $f$ .

In unserem Beispiel wurden die zu den Skalierungswerten  $s$  korrespondierenden Frequenzen  $\omega$  berechnet und auf der rechten Seite der Darstellung in den Abbildungen als weitere Achsenbeschriftung angebracht. Um nun einen besseren

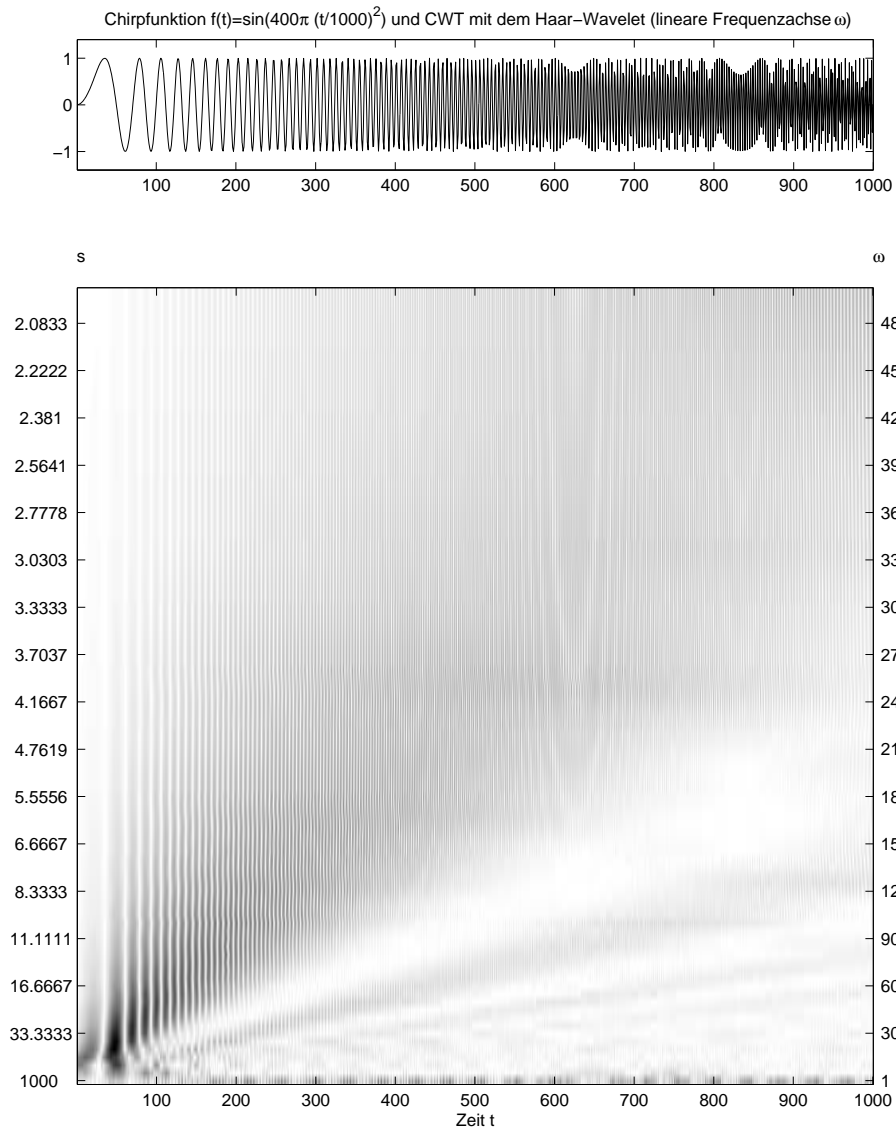


Abbildung 3.7: Verschmierungseffekte bei Verwendung des Haar-Wavelets.

Vergleich zu der gewohnten Zeit-Frequenz-Darstellung zu erhalten (z. B. wie in den Abbildungen 2.2 bis 2.5 der WFT) wurde eine lineare Frequenzaufteilung gewählt, die zugehörigen Skalenwerte  $s$  berechnet (also eine hyperbel-artige Aufteilung der Skalenachse) und so in Abbildung 3.6 dargestellt. Hier erkennen wir wieder die Diagonale völlig analog zu Abbildung 2.2, in der die Zeit-Frequenz-Darstellung eines Chirpsignals bezüglich der WFT dargestellt ist.

Allerdings werden, wie Abbildung 3.6 zeigt, insbesondere die hohen Frequenzen des Chirpsignals durch die CWT nicht gut lokalisiert, man hat eine „Verschmierung“ der hohen Frequenzen. Dieser Effekt tritt noch stärker hervor, wenn anstelle des db4-Wavelets das unstetige Haar-Wavelet zur CWT-Analyse gewählt wird (siehe Abbildung 3.7). Die durch das Haar-Wavelet eingebrachten

Unstetigkeitsstellen führen zu Störfrequenzen in allen Frequenzbereichen.

### 3.4.2 CWT einer überlagerten Sinusschwingung mit Impulsen

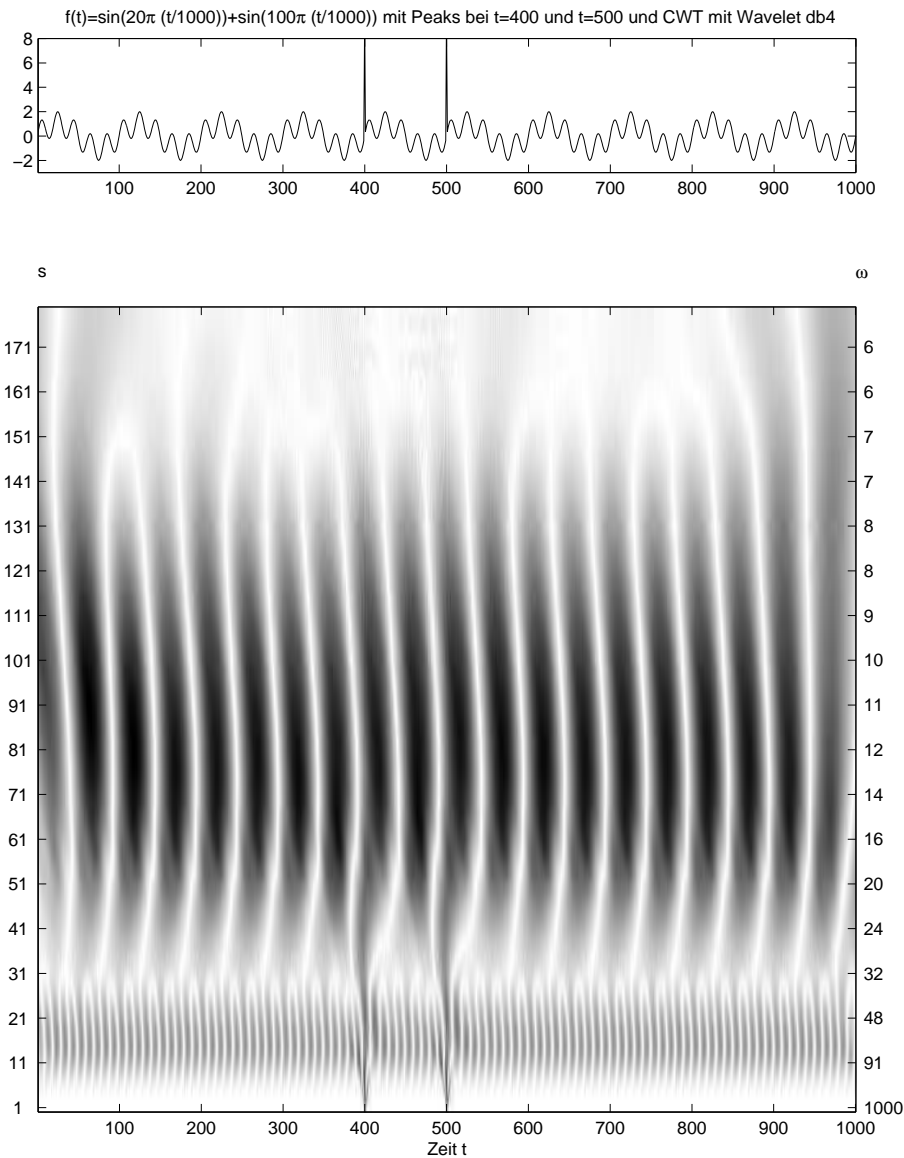


Abbildung 3.8: Zeit-Skalen-Darstellung der CWT einer überlagerten Sinusschwingung mit zwei Impulsen.

Analog zum vorherigen Abschnitt zeigen die Abbildungen 3.8 und 3.9 die Zeit-Skalen-Darstellung der CWT (mit db4) einer überlagerten Sinusschwingung der beiden Frequenzen  $\omega_1 = 10$  und  $\omega_2 = 50$  (bis auf den Faktor  $1/1000$ ) mit zwei Impulsen, einmal mit linearer Skalenaufteilung, das andere mal mit linearer Frequenzauftellung. In einer Zeit-Frequenz-Darstellung unseres Signals  $f$  würde man wie in Abbildung 2.5 zwei horizontale dunkle Streifen erwarten, die den

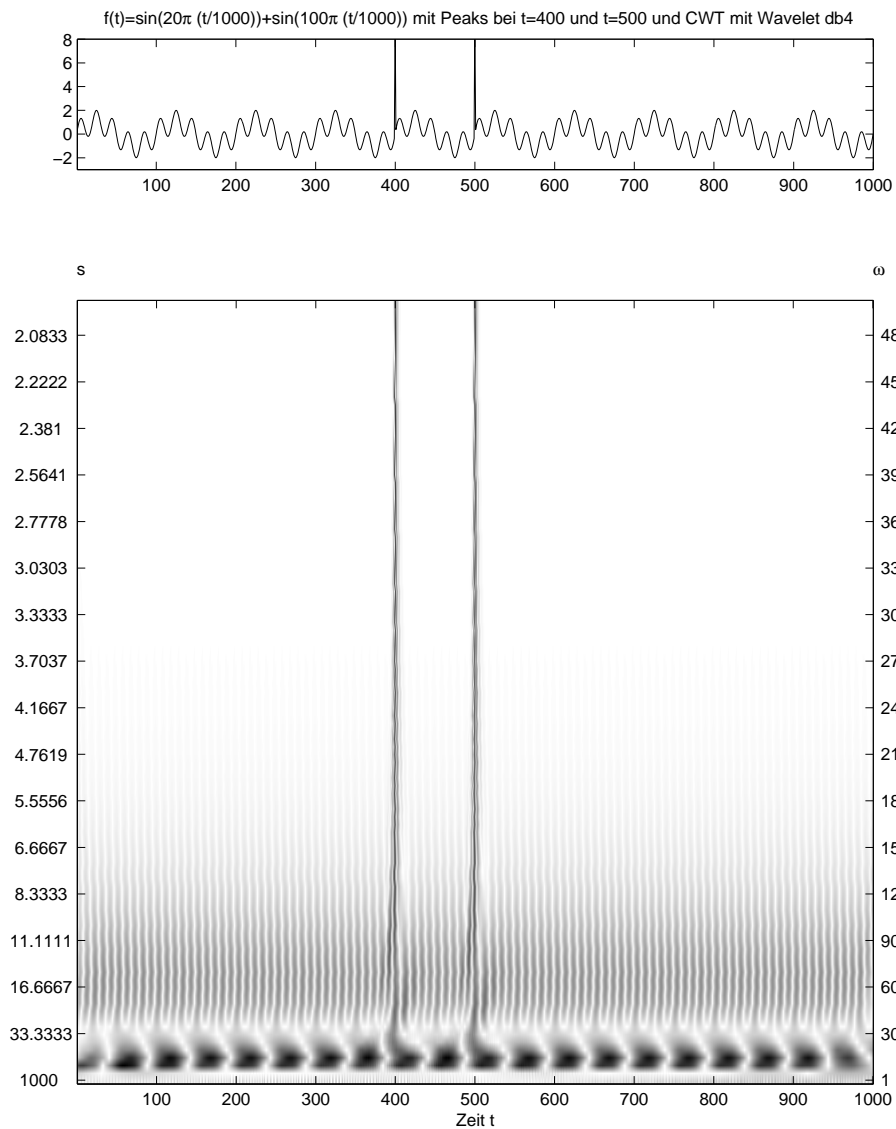


Abbildung 3.9: Zeit-Skalen-Darstellung bei linearer Frequenzaufteilung.

beiden vorkommenden Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  der Sinusschwingungen des Signal entsprechen. Auch in Abbildung 3.8 kann man mit ein bißchen Phantasie diese zwei Querstreifen erahnen, und zwar ungefähr für die Skalen  $s = 100$  (naja, eigentlich eher  $s = 80$ ) und  $s = 20$ , was den beiden Frequenzen  $\omega_1 = 10$  und  $\omega_2 = 50$  der Sinusschwingungen des Signals  $f$  entspricht. Allerdings sind diese „Querstreifen“ sehr in Frequenzrichtung „verschmiert“ und nicht durchgehend, sondern periodisch durch „weiße Linien“ unterbrochen. Wir wollen im folgenden nur auf dieses Phänomen eingehen und überlassen Ihnen die Interpretation der anderen Phänomene (erklären Sie sich z. B., wie die beiden Impulse von  $f$  durch die CWT erkannt werden).

Wir fixieren im folgenden einen Skalenwert  $s = s_0$  und einen Zeitpunkt  $t =$

$t_1$ , so daß der Waveletkoeffizient  $\langle f|\psi^{s_0,t_1} \rangle$  betragsmäßig groß und (ohne Einschränkung) positiv ist, also z. B.  $s_0 = 100$  und  $t_1 = 575$ . Das Wavelet  $\psi^{s_0,t_1}$  und die Funktion  $f$  haben dann einen hohen Übereinstimmungsgrad um den Lokalisationspunkt  $t_0(\psi^{s_0,t_1}) = t_1$ . Dort wo  $f$  positiv ist, ist auch  $\psi^{s_0,t_1}$  meist positiv, dort wo  $f$  negativ ist, ist auch  $\psi^{s_0,t_1}$  meist negativ, mit anderen Worten schmiegt sich  $\psi^{s_0,t_1}$  der Funktion  $f$  an (und zwar der niederfrequenten Sinusschwingung  $\omega_1 = 10$  von  $f$ ), was zu dem großen positiven Waveletkoeffizient  $\langle f|\psi^{s_0,t_1} \rangle$  führt (siehe Abbildung 3.10 (a)). Betrachten wir nun den Zeitpunkt  $t_1 = 625$ , was einer Verschiebung des Wavelets um eine halbe Periode  $\psi^{s_0,t_1}$  der niederfrequenten Sinusschwingung des Signals  $f$  entspricht. Dann ist  $\psi^{s_0,t_2}$  meist negativ, wo  $f$  positiv ist und umgekehrt. Daher hat der Waveletkoeffizient  $\langle f|\psi^{s_0,t_2} \rangle$  einen betragsmäßig großen, aber negativen Wert (siehe Abbildung 3.10 (b)). Man kann nun zeigen, daß die Funktion  $t \mapsto \langle f|\psi^{s_0,t} \rangle$  eine stetige Funktion ist, die sowohl positive Werte (z. B. in  $t_1$ ) als auch negative Werte (z. B. in  $t_1$ ) annimmt. Nach dem Zwischenwertsatz hat sie daher auch Nullstellen, also z. B. auch eine Nullstelle  $t_{\text{Null}} \approx 600$  zwischen  $t_1$  und  $t_2$  (siehe Abbildung 3.10 (c)). Dies erklärt die periodische Unterbrechung (und zwar in doppelter Periode wie die der niederfrequenten Sinusschwingung mit Frequenz  $\omega = 10$  von  $f$ ) der schwarzen „Querlinien“ in vertikaler Richtung durch „weiße Linien“.

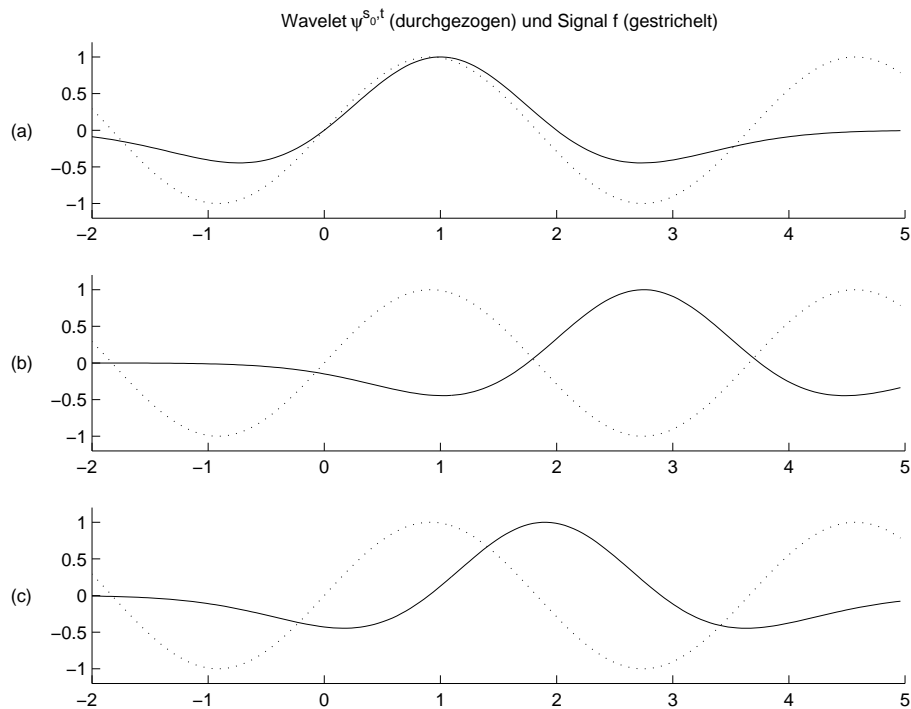


Abbildung 3.10: Starke positive, negative und schwache Korrelation des Wavelets  $\psi^{s_0,t}$  mit dem Signal  $f$ .

### 3.5 Rekonstruktion der CWT

Es sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$  ein Signal mit CWT  $\tilde{f}(s, t)$  bezüglich des Wavelets  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  mit der Zulässigkeitskonstanten

$$0 < c_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty.$$

Wir wollen in diesem Abschnitt das Signal  $f$  aus der CWT rekonstruieren. Im vorherigen Abschnitt haben wir die Koeffizienten  $\tilde{f}(s, t)$  als Anteil interpretiert, mit dem die Note  $\psi^{s,t}$  im Signal  $f$  enthalten ist. Hat die Note  $\psi$  die Tonhöhe (also die Frequenz)  $\omega_0$ , so hat die Note  $\psi^{s,t}$  die Frequenz  $\frac{\omega_0}{s}$ . Das Signal  $f$  sollte sich intuitiv dadurch rekonstruieren lassen, indem wir die Noten  $\psi^{\frac{\omega_0}{s}, t}$  der Frequenz  $\omega$  durch  $\tilde{f}(\frac{\omega_0}{s}, t)$  gewichten und aufsummieren:

$$f(u) \sim \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}\left(\frac{\omega_0}{s}, t\right) \psi^{\frac{\omega_0}{s}, t}(u) d\omega dt = \omega_0 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(s, t) \psi^{s,t}(u) \frac{1}{s^2} ds dt,$$

wobei sich die letzte Gleichung durch die Substitution  $s = \frac{\omega_0}{s}$  ergibt. Wir werden im folgenden sehen, daß diese Rekonstruktionsformel bis auf einen konstanten Faktor gilt.

Für unsere späteren Rechnungen benötigen wir die Fouriertransformierte  $\widehat{\psi^{s,t}}$  von  $\psi^{s,t}$ . Es gilt nach (3.2) von Satz 3.1.2:

$$\widehat{\psi^{s,t}}(\omega) = e^{-2\pi i \omega t} |s|^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}(s\omega). \quad (3.6)$$

Aus der Parsevalschen Gleichung unter Verwendung von obiger Darstellung von  $\widehat{\psi^{s,t}}$  folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s, t) &= \langle f | \psi^{s,t} \rangle = \langle \hat{f} | \widehat{\psi^{s,t}} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} |s|^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i \omega t} \overline{\hat{\psi}(s\omega)} \hat{f}(\omega) d\omega \\ &= |s|^{\frac{1}{2}} \left( \overline{\hat{\psi}(s \cdot)} \hat{f}(\cdot) \right)^\vee(t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Wendet man auf beiden Seiten die Fouriertransformation an, so ergibt sich hieraus:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \omega t} \tilde{f}(s, t) dt = |s|^{\frac{1}{2}} \overline{\hat{\psi}(s\omega)} \hat{f}(\omega) \quad (3.8)$$

Wenn es uns nun gelänge, auf der rechten Seite  $\hat{f}(\omega)$  zu isolieren, so würde man durch erneute Fouriertransformation  $f(\cdot)$  erhalten und damit hätte man  $f$  rekonstruiert. Allerdings kann man nicht einfach durch  $|s|^{\frac{1}{2}} \overline{\hat{\psi}(s\omega)}$  teilen, da dieser Wert verschwinden könnte. Stattdessen wird nun implizit die Zulässigkeitsbedingung von  $\psi$  ausgenutzt. Um eine befriedigende Motivation für die Definition dieser Zulässigkeitsbedingung zu erhalten, müsste man im folgendem Schritt mit einer allgemeinen Gewichtsfunktion arbeiten, aus der sich dann als hinreichende Bedingung die Zulässigkeitsbedingung ergäbe. Für diese Vorgehensweise

verweisen wir auf das Buch von [Kaiser]. Wir beschränken uns darauf, unter Voraussetzung der Zulässigkeitsbedingung die Rekonstruktion von  $f$  nachzurechnen. Wir multiplizieren nun beide Seiten von (3.8) mit  $\hat{\psi}(s\omega)|s|^{-\frac{3}{2}}$  und integrieren über  $s$ :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(s\omega)|s|^{-\frac{3}{2}} e^{-2\pi i\omega t} \tilde{f}(s, t) ds dt = \int_{\mathbb{R}} |s|^{-1} |\hat{\psi}(s\omega)|^2 \hat{f}(\omega) ds \quad (3.9)$$

Unter Benutzung der Zulässigkeitsbedingung  $0 < c_\psi < \infty$  mit

$$c_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(s\omega)|^2}{|s|} ds$$

(benutze Substitution  $\xi = s\omega$ ) erhält man aus (3.9) durch Division mit  $c_\psi$  und anschließender Benutzung von (3.6) die Rekonstruktion von  $\hat{f}$ :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(s, t) \hat{\psi}(s\omega) |s|^{-\frac{3}{2}} e^{-2\pi i\omega t} ds dt \\ &= \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(s, t) \widehat{\psi^{s,t}}(\omega) |s|^{-2} ds dt. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Durch inverse Fouriertransformation erhält man hieraus die Rekonstruktionsformel für das Signal  $f$ :

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(s, t) \widehat{\psi^{s,t}}(\omega) e^{2\pi i\omega u} \frac{1}{s^2} d\omega ds dt \\ &= \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(s, t) \psi^{s,t}(u) \frac{1}{s^2} ds dt. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Wir fassen das Ergebnis in folgendem Satz zusammen.

**Satz 3.5.1** *Sei  $\psi$  ein Wavelet, also  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  mit Zulässigkeitsbedingung*

$$0 < c_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty.$$

*Dann kann ein Signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  aus seiner CWT  $\tilde{f}(s, t)$  rekonstruiert werden durch*

$$f(u) = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(s, t) \psi^{s,t}(u) \frac{1}{s^2} ds dt.$$

## 3.6 Diskrete Version der CWT

Die in den vorausgegangenen Abschnitten dargestellte kontinuierliche Theorie dient hauptsächlich dem Verständnis und der „richtigen“ Interpretation der Wavelettransformation. Wir wollen uns im folgenden mit den Problemen befassen, die auftauchen, wenn man mit der Wavelettransformation konkret rechnen möchte. Das sind

- (1) die effiziente Berechnung der Transformation,
- (2) die effiziente Rekonstruktion von Signalen aus ihren Transformaten (Inversion der Wavelettransformation).

### 3.6.1 An die CWT angepaßte Gitter

Ein Signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  besitzt nach Satz 3.5.1 die Darstellung

$$f(u) = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(s, t) \psi^{s, t}(u) \frac{1}{s^2} ds dt$$

mit der Wavelettransformierten  $\tilde{f}$  zum Wavelet  $\psi$ . Wir stellen uns hier die Frage, ob  $\tilde{f}(s, t)$  wirklich an jedem Punkt  $(s, t) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$  bekannt sein muß, um  $f$  zurückzuerhalten. Es wird sich zeigen, daß obige Integraldarstellung von  $f$  hochgradig redundant ist und daß analog zur diskreten Version der WFT (Abschnitt 2.5) das Integral ohne Informationsverlust durch eine Doppelsumme ersetzt werden kann.

**Ein Wort zur Warnung:** Das Wort „diskret“ bezieht sich nicht auf die Wavelets selbst (diese sind immer Funktionen in  $L^2(\mathbb{R})$ , im konkreten Fall sogar meist stetig und reell), sondern immer auf eine diskrete Anzahl an Punkten der Zeit-Frequenz-Ebene an denen die Wavelettransformation ausgewertet wird.

Natürlich wird dies nicht für jedes Wavelet und jede beliebige diskrete Teilmenge von  $\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$  zutreffen. Bei der diskreten Version der WFT hatten wir zum Beispiel nur Fensterfunktionen  $g$  mit kompaktem Träger zugelassen, und das Signal  $f$  aus den WFT-Koeffizienten  $\tilde{f}(\omega, t)$  rekonstruiert, wobei wir aber nur  $(\omega, t)$  eines „hinreichend“ feinen in Zeit- und Frequenzrichtung äquidistanten Gitters benutzt haben (Frequenzschrittweite  $\nu$  und Zeitschrittweite  $\tau$ ). Ähnliches kann man nun auch für die CWT zeigen. Allerdings betrachtet man in diesem Fall nicht mehr äquidistante Gitter, sondern Gitter der Form

$$\{(a^m, nba^m) | m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \quad (3.12)$$

mit  $a > 1, b > 0$  und die zugehörige Funktionenmenge

$$\left\{ \psi_{m,n}^{(a,b)} := \psi^{a^m, nba^m} = a^{-m/2} \psi(a^{-m} \cdot -nb) | m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Das Gitter steht in engem Zusammenhang zur Phasenrauminterpretation (Zeit-Frequenz-Lokalisierung) der Wavelettransformation in Abschnitt 3.3. Sei  $\psi$  ein

Wavelet mit  $\|\psi\| = 1$  und der durch die Zentren  $t_0(\psi), \omega_0(\psi)$  und Breiten  $T(\psi), \Omega(\psi)$  definierten Informationszelle  $\text{IZ}(\psi)$ . Wir betrachten den Fall  $t_0 = 0$  und  $\omega_0 > 0$ . Dann sind die Schwerpunkte der Informationszellen  $\text{IZ}(\psi_{m,n}^{a,b})$  der Noten  $\psi_{m,n}^{a,b}$  nach 3.4 gegeben durch

$$(a^{-m}\omega_0, nba^m)$$

und für die Breiten ergeben sich nach 3.5 die Werte

$$T(\psi_{m,n}^{(a,b)}) = a^m T(\psi) \quad \text{bzw.} \quad \Omega(\psi_{m,n}^{(a,b)}) = a^{-m} \Omega(\psi).$$

Mit wachsender Frequenz ( $m \rightarrow -\infty$ ) liegen die Funktionen  $\{\psi_{m,n}^{(a,b)} | n \in \mathbb{Z}\}$  dichter im Zeitbereich (siehe Abbildung 3.11). Der Zoom-Effekt der kontinuierlichen Wavelettransformation bleibt bei dieser Diskretisierung erhalten. Daher sind Gitter wie in (3.12) optimal für Wavelettransformationen.

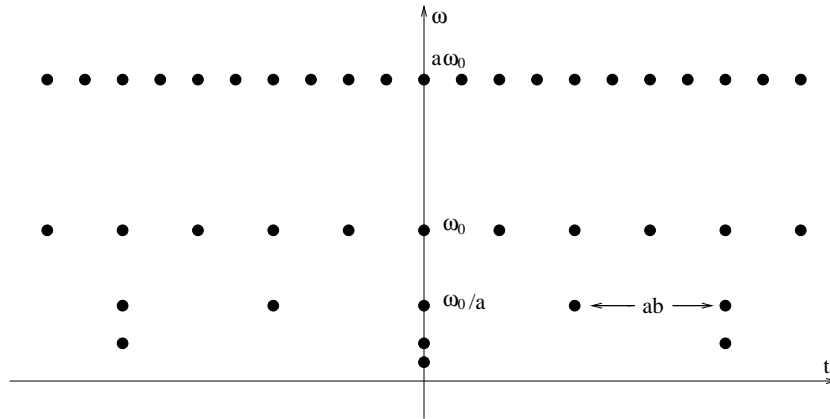


Abbildung 3.11: Verteilung der Phasenraumpunkte  $(nba^m, a^{-m}\omega_0)$  für  $a = 2$  und  $b = 1$  in der Zeit-Frequenz-Ebene.

### 3.6.2 Wavelet-Frames

Die weitere Untersuchung der Wavelettransformation auf solchen Gittern führt auf die sogenannten *Wavelet-Frames*, auf die wir nun eingehen wollen.

**Definition 3.6.1** Seien  $a > 1, b > 0$  und  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ . Das Funktionensystem

$$\left( \psi_{m,n}^{(a,b)} \right)_{m,n \in \mathbb{Z}}$$

bildet ein Wavelet-Frame für  $L^2(\mathbb{R})$ , wenn es Konstanten  $A, B > 0$  gibt, so daß für alle  $f \in L^2(\mathbb{R})$  gilt:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f | \psi_{m,n}^{(a,b)} \rangle|^2 \leq B\|f\|^2. \quad (3.13)$$

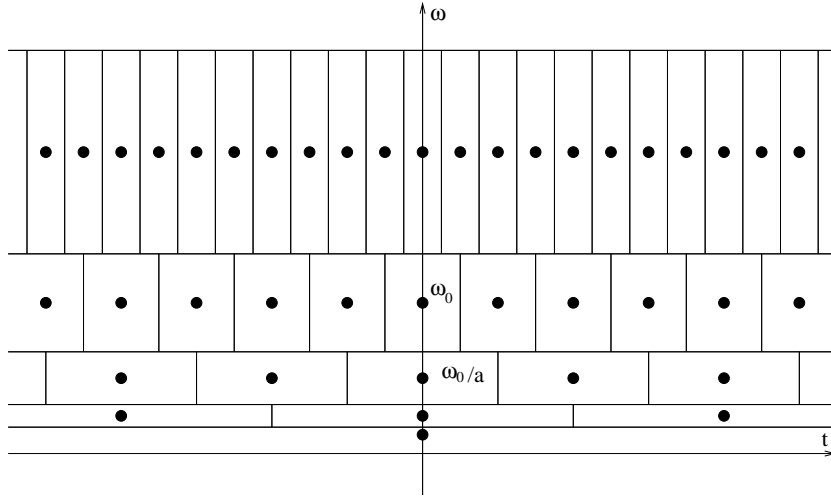


Abbildung 3.12: Ideale Überdeckung der Zeit-Frequenz-Ebene durch Informationszellen einer diskreten Wavelettransformation bezüglich derselben Gitterpunkte wie in Abbildung 3.11.

Man sagt dann, daß  $(\psi, a, b)$  den Frame erzeugt. Die Konstanten  $A$  und  $B$  heißen *Frameschranken*. Im Fall  $A = B$  heißt der Frame *bündig*. Wavelet-Frames verallgemeinern ON-Basen:

**Satz 3.6.2** *Ein bündiger Wavelet-Frame  $(\psi, a, b)$  mit Schranken  $A = B = 1$  und  $\|\psi\| = 1$  erzeugt eine ON-Basis des  $L^2(\mathbb{R})$ .*

**Beweis** Die Normiertheit folgt aus

$$\|\psi_{m,n}^{(a,b)}\| = \|\psi\| = 1$$

für alle  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Wegen  $A = B = 1$  hat man Gleichheit in (3.13) und für alle  $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$  folgt

$$1 = \|\psi_{\mu,\nu}^{(a,b)}\| = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle \psi_{\mu,\nu}^{(a,b)} | \psi_{m,n}^{(a,b)} \rangle|^2 \quad (3.14)$$

$$= \|\psi\|^2 + \sum_{m,n \in \mathbb{Z}, (m,n) \neq (\mu,\nu)} |\langle \psi_{\mu,\nu}^{(a,b)} | \psi_{m,n}^{(a,b)} \rangle|^2 \quad (3.15)$$

Aus  $\|\psi\| = 1$  folgt daraus  $\langle \psi_{\mu,\nu}^{(a,b)} | \psi_{m,n}^{(a,b)} \rangle = 0$ , falls  $(m, n) \neq (\mu, \nu)$  und damit die Orthogonalität. Die Vollständigkeit des Systems folgt aus der Parsevalschen Gleichung und (3.13) mit  $A = B = 1$ .  $\square$

In der Praxis ist es häufig sehr schwer nachzuweisen, ob ein Wavelet-Frame vorliegt. Für hinreichende Bedingungen hierfür verweisen wir auf das Buch von [Louis/Maaß/Rieder]. Dort wird unter anderem gezeigt, daß das Meyer-Wavelet  $\psi$  (siehe Unterabschnitt 3.2.1) mit  $a = 2$  und  $b = 1$  einen bündigen Wavelet-Frame bildet. Aus dem Satz 3.6.2 folgt also:

**Korollar 3.6.3** *Der durch das Meyer-Wavelet  $\psi$  erzeugte Frame  $(\psi, 2, 1)$  ist eine ON-Basis des  $L^2(\mathbb{R})$ .*

Jedes Wavelet-Frame  $(\psi, a, b)$  definiert einen linearen Operator

$$\begin{aligned} T : L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow \ell(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \\ f &\mapsto (\langle f | \psi_{m,n}^{(a,b)} \rangle)_{m,n \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Dieser Operator erfüllt

$$A^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2} \leq \|Tf\|_{\ell^2} \leq B^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2}. \quad (3.16)$$

$T$  ist somit stetig, da beschränkt:

$$\|T\| := \sup_{\|f\|=1} \|Tf\| \leq B^{\frac{1}{2}}.$$

Wegen  $A > 0$  ist  $T$  injektiv und auf seinem Bilde stetig invertierbar, denn

$$\|T^{-1}|_{\text{Bild } T}\| \leq A^{-\frac{1}{2}}.$$

In diesem Fall kann  $f$  aus seinen diskreten Werten  $(Tf)_{m,n \in \mathbb{Z}}$  rekonstruiert werden.

Wir wollen darauf in einem allgemeineren Rahmen näher eingehen. Es sei  $H$  ein (separabler) Hilbertraum und  $\Phi = (\varphi_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  ein Frame, d. h.  $\exists A, B > 0 \forall v \in H$ :

$$A \|v\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle v | \varphi_j \rangle|^2 \leq B \|v\|^2. \quad (3.17)$$

Wir definieren zu  $\Phi$  den Frame-Operator  $S : H \rightarrow H$  durch

$$Sv := \frac{2}{A+B} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle v | \varphi_j \rangle \varphi_j.$$

**Lemma 3.6.4**  *$S$  ist ein positiver, beschränkter, stetig invertierbarer Operator mit*

$$\frac{2A}{A+B} \|v\|^2 \leq \langle Sv | v \rangle \leq \frac{2B}{A+B} \|v\|^2 \quad (3.18)$$

für alle  $v \in H$ . Zusätzlich gilt

$$\|I - S\| \leq \rho := \frac{B-A}{A+B} < 1. \quad (3.19)$$

**Beweis** Zum Beweis der Wohldefiniertheit von  $S$  definieren wir für  $N \in \mathbb{N}$  die Operatoren  $S_N$  durch

$$S_N(v) := \sum_{|j| \leq N} \langle v | \varphi_j \rangle \varphi_j$$

für  $v \in H$ . Unter Benutzung der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und der Frameschranke  $B$  zeigt man, daß die Folge  $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist und

daher gegen einen stetigen Operator konvergiert. Dieser ist gerade  $S$ . Wir verzichten hier auf die Einzelheiten. Die Ungleichungen in (3.18) folgen sofort aus der Definition von  $S$  und der Framebedingung (3.17). Wir zeigen nur noch (3.19). Aus (3.18) folgt:

$$\left(1 - \frac{2B}{A+B}\right) \|v\|^2 \leq \langle (I-S)v|v \rangle \leq \left(1 - \frac{2A}{A+B}\right) \|v\|^2$$

und daraus

$$|\langle (I-S)v|v \rangle| \leq \frac{B-A}{A+B} \|v\|^2 = \rho \|v\|^2.$$

Daraus folgt (3.19) unter Verwendung von folgender Tatsache (für einen Beweis verweisen wir auf die gängige Literatur der Funktionalanalysis):

$$\|I-S\| = \sup_{\|v\|=1} |\langle (I-S)v|v \rangle|.$$

□

Wichtig für die konkrete Konstruktion der Inversen  $S^{-1}$  von  $S$  ist Eigenschaft (3.19). Die sogenannte *Neumannsche Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (I-S)^k$$

konvergiert wegen  $\rho < 1$  gegen  $S^{-1}$ , und damit konvergiert die Folge

$$v_n := \sum_{k=0}^n (I-S)^k S v$$

gegen  $v$ . Außerdem genügt  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der folgenden Iteration:

$$v_{n+1} = S v + (I-S) \sum_{k=1}^{n+1} (I-S)^{(k-1)} S v = S v + (I-S) v_n \quad (3.20)$$

und der Fehlerabschätzung

$$\|v - v_n\| = \|(I-S)^{n+1} v\| \leq \rho^{n+1} \|v\|. \quad (3.21)$$

Das Iterationsverfahren (3.20) ist in der Praxis zur Approximation von  $S^{-1}$  ein bewährtes Verfahren. Falls die Frameschranken  $A$  und  $B$  ungefähr gleich sind, also  $B/A \approx 1$  ist, reichen wegen  $\rho \approx 0$  wenige Schritte des Iterationsverfahren aus, um eine akzeptable Approximation an  $v$  zu garantieren.

Zurück zu unserer Situation! Wir haben diskutiert, daß es Wavelet-Frames  $(\psi, a, b)$  gibt und in diesen Fällen läßt sich jedes Signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  aus seinen Waveletkoeffizienten

$$\tilde{f}(a^{-m}, nba^{-m}), m, n \in \mathbb{Z}$$

vollständig rekonstruieren. Beschränkt man sich auf eine endliche Anzahl an Gitterpunkten (die wesentlichen Gitterpunkte, an denen die Waveletkoeffizienten  $\tilde{f}(a_0^{-m}, nb_0 a_0^m)$  „groß“ sind), so läßt sich das Signal daraus gut genug approximieren, so daß sich folgender primitiver „Algorithmus“ zur Berechnung der Wavelettransformation ergibt:

Man nehme ein geeignetes Wavelet-Frame  $(\psi, a, b)$  und berechne für alle „wesentlichen“ Gitterpunkte (z. B. durch zwei geeignete Schleifen über  $n$  und  $m$ ) die Zahlen

$$\tilde{f}(a^m, nba^m) = \langle f | \psi_{m,n}^{(a,b)} \rangle,$$

die angeben, wie sehr das Wavelet  $\psi_{m,n}^{(a,b)}$  mit dem Signal  $f$  korreliert ist. Dabei muß man diese Zahl, die durch ein Integral definiert ist, z. B. durch endliche Riemann-Summen approximieren.

Dieser „Algorithmus“ bei dem für alle notwendigen Punkte der Zeit-Frequenz-Ebene alle relevanten Integrale  $\langle f | \psi_{n,m}^{(a_0,b_0)} \rangle$  direkt berechnet werden müssen, ist für eine konkrete Implementation ungeeignet. Zum einen müßte eine endliche Auswahl von Gitterpunkten signalunabhängig getroffen werden, so daß eine zufriedenstellende Approximation bei Rekonstruktion des Signals aus diesen Gitterpunkten a priori nicht garantiert werden kann. Aber vor allem wäre die Laufzeit eines solchen Algorithmus viel zu schlecht.

Erst als im Jahre 1986 die Verbindung der sogenannten *Multiskalenanalyse* mit der Wavelettransformation erkannt wurde, kam es zu radikal neuen Methoden der sogenannten *schnellen diskreten Wavelettransformation* und *schnellen diskreten Waveletrekonstruktion*. Diese Methoden sind *rekursiv* und eignen sich damit in idealer Weise für Implementationen. Wir beschäftigen uns damit im nächsten Kapitel.

## Kapitel 4

# Multiskalenanalyse (MRA) und Wavelettransformationen

Ausgehend von zwei verschiedenen Richtungen - der reinen Mathematik und Bildverarbeitung - haben Stéphane Mallat und Yves Meyer (sprich: Mejähr) die Theorie der sogenannten *Multiskalenanalyse* oder MRA (multiresolution analysis) begründet. Ein Resultat ihrer Arbeit waren die schnellen Wavelettransformationen, die wir in diesem Kapitel behandeln wollen. Ein weiteres Resultat war die Theorie der orthogonalen Wavelets, auf die wir in Kapitel 7 eingehen werden. Eine MRA ermöglicht es, ein Signal in verschiedenen Auflösungen zu betrachten, die sich jeweils um einen Faktor zwei unterscheiden. Dabei kann die Differenz zweier solcher Auflösungen als Folge von Waveletkoeffizienten (einer diskreten orthogonalen Wavelettransformation) kodiert werden, für deren Berechnung es schnelle Algorithmen gibt. Wir befassen uns zunächst mit der Multiskalenanalyse.

### 4.1 Multiskalenanalyse (MRA)

#### 4.1.1 Motivierende Analogie zur MRA

Wir wollen zunächst die Grundidee der Multiskalenanalyse (MRA) anhand einer MRA-ähnlichen Situation veranschaulichen. Dabei sei betont, daß sich die folgende Analogie zur MRA nur auf einige Teilaspekte dieser Theorie bezieht und ausschließlich zur Motivation dienen soll.

Hierfür betrachten wir die Dualdarstellung einer reellen Zahl  $f \in \mathbb{R}$  (das Symbol  $f$  soll an ein Signal erinnern) auf folgende Weise: Für  $m \in \mathbb{Z}$  sei

$$V_m := 2^m \mathbb{Z}.$$

Dann gilt:

$$\{0\} \subset \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \subset \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

$$\overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m} = \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

$$\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\}, \quad (4.3)$$

$$f \in V_m \iff f \cdot 2^{-m} \in V_0. \quad (4.4)$$

Hat die positive reelle Zahl  $f$  die Dualdarstellung

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_n 2^n, \quad w_n \in \{0, 1\},$$

so ist die „Projektion“  $P_i f$  von  $f$  auf  $V_i$  gegeben durch

$$P_i f := \sum_{n \geq i} w_n 2^n.$$

Mit anderen Worten werden bei  $P_i f$  die Stellen von  $f$  bis zur Position  $i - 1$  abgeschnitten, also auf Null gesetzt. Bei steigendem bzw. fallendem  $i$  entsteht damit eine vergrößernde bzw. verfeinernde Auflösung von  $f$ . In der Praxis ist die Dualdarstellung von  $f$  (in angenäherter Form) das Ziel, wobei  $f$  in anderer Form beschrieben sei. Man startet dann mit einer Approximation eines  $P_i f$  (oft  $i = 0$ ) und berechnet sukzessive die  $w_n, n = i, i + 1, i + 2, \dots$ . Dabei merkt man sich beim Übergang von Stufe  $j$  zu Stufe  $j + 1$  das „Detail“  $w_j 2^j$  mit  $w_j \in \{0, 1\}$ .

#### 4.1.2 Definition der MRA

Bevor wir auf die mathematische Definition der *Multiskalenanalyse* oder MRA (multiresolution analysis) eingehen, wollen wir die Hauptidee darstellen. Wir wollen ein Signal  $f$  aus einem Unterraum  $V_{-1}$  des  $L^2(\mathbb{R})$  in seine hoch- und niederfrequenten Anteile aufspalten. Den glatten (niederfrequenten) beschreiben wir durch die orthogonale Projektion  $P_0 f$  auf einen kleineren Raum  $V_0$ , der die „glatten“ Funktionen von  $V_{-1}$  enthält. Das orthogonale Komplement von  $V_0$  in  $V_{-1}$  bezeichnen wir mit  $W_0$ . Dieser Raum umfaßt aufgrund seiner Konstruktion die „rauen“ (hochfrequenten) Elemente. Es sei die Projektion von  $f$  auf  $W_0$  mit  $Q_0 f$  bezeichnet, dann ist

$$\begin{aligned} f &= P_0 f + Q_0 f, \\ V_{-1} &= V_0 \oplus W_0. \end{aligned}$$

Analog verfahren wir nun mit  $P_0f$ , indem wir  $V_0$  darstellen als orthogonale Summe der Räume  $V_1$  („glatte“ Elemente) und  $W_1$  („rauhe“ Elemente). Die zugehörigen Projektoren heißen  $P_1$  und  $Q_1$ . Wegen  $P_1P_0f = P_1f$  sowie  $Q_1Q_0f = Q_1f$  gelangen wir zu

$$P_0f = P_1f + Q_1f$$

und damit zu

$$f = P_1f + Q_1f + Q_0f. \quad (4.5)$$

Rekursiv kann nun  $P_1$  weiter zerlegt werden in  $P_2f$  und  $Q_2$  usw.

$$\begin{array}{ccccccc} L^2(\mathbb{R}) & \dots & \longrightarrow & V_{-1} & \xrightarrow{P_0} & V_0 & \xrightarrow{P_1} & V_1 & \dots & \longrightarrow & \{0\} \\ & & & & & \searrow^{Q_0} & & \searrow^{Q_1} & & & \\ & & & \dots & & W_0 & & W_1 & \dots & & \end{array}$$

$P_1f$  repräsentiert die niederfrequenten, glatten Anteile von  $f$ , enthält somit Details von  $f$  ab einer bestimmten Größe.  $Q_0f$  und  $Q_1f$  beinhalten Anteile von  $f$  zu bestimmten Frequenzbändern. Dabei entspricht  $Q_0f$  einer höheren Frequenz als  $Q_1f$ . Die Gleichung (4.5) kann verstanden werden als Zerlegung eines Signals in Frequenzbänder hoher Frequenzen und ein Frequenzgemisch niedriger Frequenzen (für Beispiele siehe Abbildungen 4.3 und 4.4).

Dieser Zerlegungsprozeß läßt sich mathematisch exakt durch die Multiskalenanalyse beschreiben.

**Definition 4.1.1** Eine Multiskalenanalyse (MRA) des  $L^2(\mathbb{R})$  ist eine aufsteigende Folge abgeschlossener Unterräume  $V_m \subset L^2(\mathbb{R})$

$$\{0\} \subset \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R}), \quad (4.6)$$

so daß gilt:

$$\overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m} = L^2(\mathbb{R}), \quad (4.7)$$

$$\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\}, \quad (4.8)$$

$$f(\cdot) \in V_m \iff f(2^m \cdot) \in V_0. \quad (4.9)$$

Weiterhin fordert man die Existenz einer Funktion  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ , der sogenannten Skalierungsfunktion, deren ganzzahligen Translate eine Orthonormalbasis von  $V_0$  erzeugen, d. h.

$$V_0 = \overline{\text{span}\{\varphi(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}}. \quad (4.10)$$

Das einfachste Beispiel für eine MRA ist die sogenannte *Haar-Multiskalenanalyse*, die wir in Abschnitt 4.4 behandeln. Wir diskutieren nun Definition 4.1.1 und fassen ein paar unmittelbare Folgerungen zusammen:

- (1) Die Forderungen (4.7) und (4.8) werden von vielen Familien von Räumen  $\{V_m | m \in \mathbb{Z}\}$  erfüllt. Die Eigenschaft (4.9) zeichnet eine MRA aus: Die Räume  $V_m$  sind skalierte Versionen des Grundraumes  $V_0$ , der durch Translationen der Skalierungsfunktion  $\varphi$  aufgespannt wird (4.10).
- (2) Für  $m \rightarrow \infty$  werden die Funktionen aus  $V_m$  gestreckt und immer breiter, ihre Details aufgebläht. Strebt  $m$  hingegen gegen  $-\infty$ , so enthalten die Räume  $V_m$  immer kleinere Strukturen. Es bezeichne  $P_m$  den Orthogonalprojektor auf  $V_m$ . Dann präzisieren die Grenzübergänge

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|P_m f\| = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{m \rightarrow -\infty} \|P_m f - f\| = 0$$

diese Interpretation. Folgende Sprechweise hat sich eingebürgert, sie ist mehr suggestiv als exakt:  $P_m f$  ist die Darstellung von  $f$  auf der „Skala“  $V_m$  und enthält alle Details von  $f$  bis zur Größe  $2^m$ .

- (3) Wegen (4.10) ist  $V_0$  translationsinvariant, d. h.

$$f \in V_0 \iff f(\cdot - k) \in V_0 \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Mit (4.9) folgt

$$f \in V_m \iff f(\cdot - 2^m k) \in V_m \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- (4) Der Raum  $V_m$  wird von den Funktionen

$$\varphi_{m,k}(x) := 2^{-m/2} \varphi(2^{-m}x - k)$$

aufgespannt, also

$$V_m = \overline{\text{span}\{\varphi_{m,k} | k \in \mathbb{Z}\}}.$$

Dies beruht auf (4.9) und (4.10). Weiterhin gilt  $\|\varphi_{m,k}\| = \|\varphi\|$ .

- (5) Bei der Definition einer MRA findet man häufig auch die Forderung, daß die Translate der Skalierungsfunktion  $\varphi$  eine sogenannte *Rieszbasis* bilden müssen, was scheinbar eine schwächere Forderung ist, als die Orthogonalität in unserer Definition. Man kann aber zeigen, daß man ausgehend von einer Rieszbasis eine Orthonormalbasis mit denselben Eigenschaften konstruieren kann, so daß unsere Definition keine Einschränkung bedeutet.

Wie in unserer einführenden Darstellung der Hauptidee definieren wir die Räume  $W_m$  als orthogonale Komplemente von  $V_m$  in  $V_{m-1}$ ,

$$V_{m-1} = W_m \oplus V_m, \quad V_m \perp W_m \tag{4.11}$$

und die Operatoren  $Q_m$  als orthogonale Projektoren von  $L^2(\mathbb{R})$  in  $W_m$ ,

$$P_{m-1} = Q_m + P_m. \tag{4.12}$$

Dann gilt

$$V_m = \bigoplus_{j \geq m+1} W_j \quad \text{und damit} \quad L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j. \tag{4.13}$$

Die Räume  $W_m$  erben die Skalierungseigenschaft der Räume  $V_m$  (4.9)

$$f(\cdot) \in W_m \iff f(2^m \cdot) \in W_0. \quad (4.14)$$

Eine Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  läßt sich nach (4.13) zerlegen durch

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f = \sum_{j \geq m+1} Q_j f + \sum_{j \leq m} Q_j f = P_m f + \sum_{j \leq m} Q_j f. \quad (4.15)$$

Die eben hergeleitete Gleichung erklärt im nachhinein die Bezeichnung *Multiskalenanalyse*.  $P_m f$  repräsentiert  $f$  auf der Skala  $m$ , was der Anwendung eines *Tiefpaßfilters* entspricht, der mit wachsendem  $m$  einen kleineren Durchlaßbereich hat. Der verbleibende Rest aus dem Hochfrequenzbereich wird in seine Anteile zu verschiedenen Frequenzbändern  $Q_j f$ ,  $-\infty < j \leq m$  aufgeteilt. Dabei enthält  $Q_j$  nur die Details, die  $P_{j-1}$  von  $P_j$  unterscheidet:

$$Q_j = P_{j-1} - P_j.$$

## 4.2 MRA und Wavelets

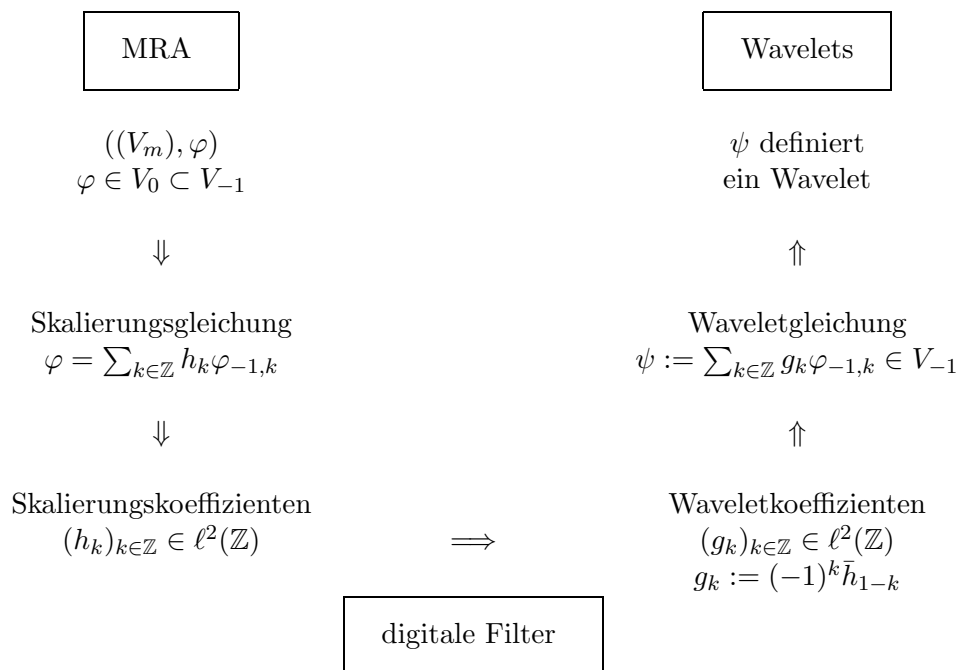
Was bisher bezüglich der MRA ausgeführt wurde, hatte nichts mit Wavelets geschweige denn einer Wavelettransformation zu tun. Daher wollen wir auf das Hauptergebnis dieses Abschnittes vorgreifen. Es erscheint zunächst wie ein kleines Wunder:

**Hauptergebnis:** Zu jeder MRA existiert ein Wavelet  $\psi$ , dessen translatierte und dilatierte Versionen

$$\psi_{m,k}(x) := 2^{-m/2} \psi(2^{-m}x - k)$$

für festes  $m \in \mathbb{Z}$  eine Orthonormalbasis (ONB) für den Raum  $W_m$  bilden. Darüber hinaus läßt sich das Wavelet aus der Skalierungsfunktion  $\varphi$  explizit konstruieren.

Bei der Konstruktion dieser Wavelets  $\psi$  aus der Skalierungsfunktion  $\varphi$  der MRA spielen in überraschender Weise digitale Filter  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  und  $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  eine Rolle, die nicht nur den Zusammenhang zwischen Multiskalenanalyse und Wavelettheorie herstellen, sondern auch den Zusammenhang zwischen der kontinuierlichen und diskreten Signaltheorie. Wir geben im folgenden Schaubild einen ersten Überblick:



#### 4.2.1 Filterkoeffizienten der Skalierungsgleichung

Wir gehen in diesem Abschnitt von einer MRA mit Skalierungsfunktion  $\varphi$  wie in Definition 4.1.1 aus und benutzen die dort eingeführten Bezeichnungen.

**Lemma 4.2.1** *Die Skalierungsfunktion  $\varphi$  erfüllt eine sogenannte Skalierungsgleichung, d. h. es gibt eine Folge  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  reeller Zahlen mit*

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k). \quad (4.16)$$

**Beweis:** Aus der Inklusion  $\varphi \in V_0 \subset V_{-1} = \overline{\text{span}\{\sqrt{2}\varphi(2 \cdot -k) \mid k \in \mathbb{Z}\}}$  folgt das obige Lemma. □

In der einfachen Gleichung (4.16) liegt der Schlüssel zur Konstruktion sowohl orthonormaler Waveletbasen als auch schneller Algorithmen. Die Koeffizienten  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  treten immer mehr in den Vordergrund und die erzeugende Skalierungsfunktion  $\varphi$  wird nur noch indirekt interessieren.

**Lemma 4.2.2** *Die skalierten und translatierten Versionen  $\varphi_{m,k}$  der Skalierungsfunktion  $\varphi$  erfüllen die Skalierungsgleichung*

$$\varphi_{m,k} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_j \varphi_{m-1, 2k+j}. \quad (4.17)$$

**Beweis:** Dies ergibt sich sofort aus der Skalierungsgleichung (4.16) und der Definition der  $\varphi_{m,k}$ :

$$\begin{aligned}
\varphi_{m,k}(x) &= 2^{-m/2}\varphi(2^{-m}x - k) \\
&\stackrel{(4.16)}{=} 2^{-m/2}2^{1/2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_j \varphi(2(2^{-m}x - k) - j) \\
&= 2^{-(m-1)/2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_j \varphi(2^{-(m-1)}x - (2k + j)) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_j \varphi_{m-1,2k+j}.
\end{aligned}$$

□

**Lemma 4.2.3** Die Koeffizienten  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  der Skalierungsgleichung (4.16) erfüllen eine Orthogonalitätsbeziehung:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \bar{h}_{k+2m} = \delta_{0,m}. \tag{4.18}$$

**Beweis:** Dies ergibt sich aus der Orthonormalität der Translate der Skalierungsfunktion:

$$\begin{aligned}
\delta_{0,m} &= \langle \varphi(\cdot) | \varphi(\cdot + m) \rangle \\
&\stackrel{(4.16)}{=} 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_k \bar{h}_l \langle \varphi(2 \cdot -k) | \varphi(2 \cdot -l + 2m) \rangle \\
&= 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_k \bar{h}_{l+2m} \langle \varphi(2 \cdot -k) | \varphi(2 \cdot -l) \rangle \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_k \bar{h}_{l+2m} \delta_{k,l} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \bar{h}_{k+2m}
\end{aligned}$$

□

Wir wollen im folgenden annehmen, daß  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  eine Folge in  $\ell^1(\mathbb{Z})$  ist. (Da man es in der Praxis meist mit endlichen Folgen zu tun hat, ist dies keine wesentliche Einschränkung.) Dann kann man die Folge der Skalierungskoeffizienten  $h := (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  als Faltungsfiler auffassen, das ein LTI-System (lineares, zeitinvariantes digitales Filter) definiert:

$$T : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z}), \quad T[x] := h * x.$$

Wegen  $h = T[\delta]$ , wobei  $\delta$  den Einheitsimpuls bezeichne, nennt man  $h$  auch die Impulsantwort des Systems. Die Fouriertransformierte  $H$  der Folge  $h$ , genannt auch Frequenzantwort des Systems  $T$ , ist definiert durch

$$H(\omega) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-2\pi i k \omega}.$$

**Lemma 4.2.4** Die Fouriertransformation überführt die Skalierungsgleichung (4.16) in das einfache Produkt

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2} H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (4.19)$$

**Beweis:** Wir wenden die Fouriertransformation auf beide Seiten der Skalierungsgleichung

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k)$$

an, und berechnen die rechte Seite:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k) e^{-2\pi i x \omega} dx \\ &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \varphi(x) e^{-2\pi i \left(\frac{x+k}{2}\right) \omega} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-2\pi i k \frac{\omega}{2}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-2\pi i x \frac{\omega}{2}} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \end{aligned}$$

□

Das Produkt (4.19) ist analytischen Methoden leichter zugänglich als die Skalierungsgleichung (4.16). Die Betrachtung der Frequenzantwort  $H$  liefert Aussagen über die Filtereigenschaften des Filters  $T$  definiert durch  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ . Der folgende Satz liefert für die weitere Interpretation von  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  die mathematische Grundlage.

**Satz 4.2.5** Sei  $\varphi$  die Skalierungsfunktion einer MRA. Dann erfüllt das Fourierfilter  $H$  die Orthogonalitätsbedingung

$$|H(\omega)|^2 + |H\left(\omega + \frac{1}{2}\right)|^2 = 2. \quad (4.20)$$

Die Frequenzantwort nimmt folgende Werte an:

$$H(0) = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad H\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (4.21)$$

das bedeutet

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = H(0) = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_k = H\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (4.22)$$

**Beweis:** Wir verweisen auf S. 114 des Buches von [Louis/Maaß/Rieder] und auf das Buch von [Burrus/Gopinath/Guo]. □

In konkreten Fällen ist die Skalierungsfunktion  $\varphi$  eine reelle Funktion, die Skalierungskoeffizienten  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  reelle Zahlen und  $H$  eine (1-periodische) stetige

Funktion. Die Werte von (4.21) implizieren dann, daß  $H$  in einer Umgebung von  $\omega = \frac{1}{2}$  sehr klein ist und in einer Umgebung von  $\omega = 0$  nahe bei Eins ist. Das bedeutet aber gerade, daß das durch die  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  definierte diskrete Filter  $T$  tiefe Frequenzen (Umgebung von  $\omega = 0$ ) fast unvermindert durchläßt, während hohe Frequenzen (Umgebung von  $\omega = \frac{1}{2}$ ) eliminiert werden. Mit anderen Worten kann man die Skalierungskoeffizienten  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  als Filterkoeffizienten eines Tiefpaßfilters interpretieren. Wir verweisen auf Abschnitt 7.1 für weitere Einzelheiten.

Zu dem Tiefpaßfilter  $T$  mit Filterkoeffizienten  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  gibt es einen assoziierten Hochpaßfilter  $S$  mit Filterkoeffizienten  $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  definiert durch

$$g_k := (-1)^k \bar{h}_{1-k}. \quad (4.23)$$

Sei  $G$  die Frequenzantwort zu  $S$ , dann folgt

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{-2\pi i k \omega} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \bar{h}_{1-k} e^{-2\pi i k \omega} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{1-k} e^{-2\pi i k (\omega + \frac{1}{2})} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{h}_k e^{-2\pi i (1-k) (\omega + \frac{1}{2})} \\ &= e^{-2\pi i (\omega + \frac{1}{2})} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{h_k e^{-2\pi i k (\omega + \frac{1}{2})}} \\ &= -e^{-2\pi i \omega} \overline{H(\omega + \frac{1}{2})}. \end{aligned}$$

Hiermit folgt aus Satz 4.2.5 sofort

**Korollar 4.2.6** *Die Frequenzantworten  $G$  und  $H$  stehen in folgender Relation:*

$$|H(\omega)|^2 + |G(\omega)|^2 = 2. \quad (4.24)$$

*Die Frequenzantwort  $G$  nimmt folgende Werte an:*

$$G(0) = 0, \quad G\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}, \quad (4.25)$$

Damit ist das Filter  $S$  als Hochpaßfilter nachgewiesen. Die Gleichung (4.24) bedeutet, daß das Filter  $S$  genau die Frequenzen durchläßt, die das Filter  $T$  eliminiert und umgekehrt.

## 4.2.2 Filterkoeffizienten und Wavelets

Ausgangspunkt unserer bisherigen Untersuchungen war der Wunsch nach der Konstruktion einer orthogonalen Waveletbasis für die Räume  $W_m$ . Mit folgendem Satz, der auch das am Anfang dieses Abschnittes formulierte Hauptergebnis umschließt, wird diesem Wunsch entsprochen.

**Satz 4.2.7** Sei  $\{V_m | m \in \mathbb{Z}\}$  eine MRA mit Skalierungsfunktion  $\varphi \in V_0$ . Die Funktion  $\psi \in V_{-1}$  definiert durch

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2x - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi_{-1,k}(x), \quad (4.26)$$

$$g_k = (-1)^k \bar{h}_{1-k}, \quad (4.27)$$

wobei  $\{h_k | k \in \mathbb{Z}\}$  die Koeffizienten der Skalierungsgleichung (4.16) sind, besitzt die folgenden Eigenschaften

- (i)  $\{\psi_{m,k}(\cdot) := 2^{-m/2} \psi(2^{-m} \cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$  ist eine ONB für  $W_m$ .
- (ii)  $\{\psi_{m,k} | m, k \in \mathbb{Z}\}$  ist eine ONB für  $L^2(\mathbb{R})$ .
- (iii)  $\psi$  ist ein Wavelet mit  $c_\psi = \int_{\mathbb{R}} |\omega|^{-1} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega = 2 \ln 2$ .

**Beweis:** In einem ersten Schritt zeigen wir, daß  $\psi \in W_0 \subset V_{-1}$  ist:

$$\begin{aligned} \langle \psi(\cdot) | \varphi(\cdot - n) \rangle &\stackrel{(4.16)}{=} 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_k \bar{h}_l \langle \varphi(2 \cdot - k) | \varphi(2 \cdot - 2n - l) \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_k \bar{h}_l \delta_{k, 2n+l} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{2n+l} \bar{h}_l \\ &\stackrel{(4.27)}{=} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l \bar{h}_{1-(2n+l)} \bar{h}_l \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{1-2(n+l)} \bar{h}_{2l} - \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{-2(n+l)} \bar{h}_{2l+1} \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{1+2\lambda} \bar{h}_{-2(\lambda+n)} - \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{-2(n+l)} \bar{h}_{2l+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung unter Verwendung von (4.18) verifiziert die Orthonormalität von  $\{\psi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$ . Zum endgültigen Beweis von (i) und (ii) fehlt uns nur noch die Vollständigkeit von  $\{\psi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$  in  $W_0$ . Hierfür überprüfen wir die Vollständigkeit des orthonormalen Systems  $\{\varphi(\cdot - k), \psi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$  in  $V_{-1}$ , denn  $V_0 \oplus W_0 = V_{-1}$ . Dafür wiederum genügt die Darstellbarkeit von  $\varphi_{-1,0} = \sqrt{2} \varphi(2 \cdot)$  durch  $\{\varphi(\cdot - k), \psi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$ . Wir benutzen (4.16) und (4.26) und rechnen die Parsevalsche Identität nach:

$$\begin{aligned} &2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (|\langle \varphi(2 \cdot) | \varphi(\cdot - k) \rangle|^2 + |\langle \varphi(2 \cdot) | \psi(\cdot - k) \rangle|^2) \\ &= 4 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \langle \varphi(2 \cdot) | \varphi(2 \cdot - 2k - l) \rangle \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l \langle \varphi(2 \cdot) | \psi(2 \cdot - 2k - l) \rangle \right|^2 \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \delta_{0, 2k+l} \right|^2 + \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l h_{1-l} \delta_{0, 2k+l} \right|^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k}^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k+1}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^2 \\
&\stackrel{(4.18)}{=} 1 \\
&= \|\varphi_{-1,0}\|^2.
\end{aligned}$$

Der Beweis von (iii) ist umfangreicher, und wir verweisen auf die Literatur [Louis/Maaß/Rieder].  $\square$

**Lemma 4.2.8** *Die skalierten und translatierten Versionen  $\psi_{m,k}$  des Wavelets  $\psi$  erfüllen die Skalierungsgleichung*

$$\psi_{m,k} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_j \varphi_{m-1,2k+j}. \quad (4.28)$$

**Beweis:** Dies ergibt sich sofort aus der Skalierungsgleichung (4.26) völlig analog zu Lemma 4.2.2.  $\square$

Wir bezeichnen im folgenden die Koeffizienten  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  als die *Skalierungskoeffizienten* und die Koeffizienten  $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  als die *Waveletkoeffizienten* assoziiert zu der MRA. Wir sprechen in diesem Zusammenhang auch von den Filtern  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  und  $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  und meinen eigentlich damit die durch diese Koeffizienten definierten Filter. Für ein Beispiel der bisher behandelten Theorie verweisen wir auf Abschnitt 4.4, wo die Haar-MRA ausführlich besprochen wird.

**Bemerkung 4.2.9** Das zu einer MRA assoziierte Wavelet ist nicht eindeutig bestimmt. Definieren wir das Wavelet  $\psi$  durch (4.26) und (4.27), so hat man die für die praktische Implementation wichtige Eigenschaft, daß  $\psi$  eine reelle Funktion ist, falls die Skalierungsfunktion  $\varphi$  reell ist. Für weitere Einzelheiten siehe S. 117 von [Louis/Maaß/Rieder].

### 4.3 Schnelle Waveletalgorithmen

Aus der Multiskalenanalyse mit der Verbindung zur Wavelettheorie ergibt sich die *schnelle diskrete Wavelettransformation*, auf die wir in diesem Abschnitt ausführlich eingehen wollen. Eine kuriose Konsequenz der Existenz einer MRA ist, daß eine Wavelettransformation eines Signals durchgeführt werden kann, ohne daß die Wavelets oder Skalierungsfunktionen explizit bekannt sein müssen. Alles was benötigt wird, ist die Kenntnis des zur Skalierungsfunktion  $\varphi$  assoziierten Filters  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ , das durch die Skalierungsgleichung (4.16) definiert ist. Anstatt nun einen Waveletkoeffizienten  $\langle f | \psi^{s,t} \rangle$  durch das durch ein Integral definierte innere Produkt auszurechnen, macht man etwas wesentlich einfacheres: Das Signal (bzw. eine diskretisierte Form des Signals) wird mit dem Tiefpaßfilter  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  (Skalierungskoeffizienten) und dem Hochpaßfilter  $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  (Waveletkoeffizienten) gefaltet. Bevor durch ungenaue Andeutungen noch mehr Verwirrung gestiftet wird, wollen wir uns sogleich in „medias res“ begeben.

### 4.3.1 Schnelle Diskrete Wavelettransformation (FDWT)

Wir führen in diesem Unterabschnitt den Algorithmus zur schnellen Berechnung der diskreten Wavelettransformation ein. Zentrales Hilfsmittel hierbei ist die Multiskalenanalyse, darauf aufbauend läßt sich der Algorithmus elegant und einfach aus der Skalierungsgleichung (4.16) ableiten.

Betrachten wir dazu eine Funktion  $f$  in  $V_0$ , dem Grundraum der Multiskalenanalyse zu einer Skalierungsfunktion  $\varphi$ . (Dies ist der eigentliche Diskretisierungsschritt! Mehr dazu später.) Die Funktion besitzt aufgrund der Definition 4.1.1 eine Entwicklung

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k^0 \varphi(x - k) \quad (4.29)$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$v^0 = (v_k^0)_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Wie bisher bezeichne  $\psi$  das zu  $\varphi$  gehörende orthonormale Wavelet (siehe (4.26)), demnach bildet

$$\{\psi_{m,k} = 2^{-m/2} \psi(2^{-m} \cdot -k) \mid m, k \in \mathbb{Z}\}$$

eine Orthonormalbasis des  $L^2(\mathbb{R})$ . Jetzt können wir mit der Berechnung der diskreten Wavelettransformation, d. h. mit der Auswertung der Skalarprodukte

$$\tilde{f}(2^m, 2^m k) = \langle f \mid \psi_{m,k} \rangle, \quad m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}, \quad (4.30)$$

beginnen. Da wir  $f \in V_0$  vorausgesetzt haben und nach (4.13)

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{V_0 \oplus \bigoplus_{j \leq 0} W_j}$$

gilt, folgt  $\langle f \mid \psi_{m,k} \rangle = 0$  für  $m \leq 0$ , es genügt also in (4.30) die Skalarprodukte für  $m \in \mathbb{N}$  zu berechnen. Dazu führen wir die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} w_k^m &:= \langle f \mid \psi_{m,k} \rangle, & w^m &= (w_k^m \mid k \in \mathbb{Z}) \in \ell^2(\mathbb{Z}), \\ v_k^m &:= \langle f \mid \varphi_{m,k} \rangle, & v^m &= (v_k^m \mid k \in \mathbb{Z}) \in \ell^2(\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

ein. Aus den Skalierungsgleichungen (4.28) und (4.17) ergeben sich damit die Darstellungen

$$w_k^m = \langle f \mid \psi_{m,k} \rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{g}_l \langle f \mid \varphi_{m-1, 2k+l} \rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{g}_{l-2k} v_l^{m-1}, \quad (4.31)$$

$$v_k^m = \langle f \mid \varphi_{m,k} \rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{h}_l \langle f \mid \varphi_{m-1, 2k+l} \rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{l-2k} v_l^{m-1}. \quad (4.32)$$

Damit ist der Zerlegungsalgorithmus bereits fertig: Ausgehend von der Folge  $v^0$  können wir die diskrete Waveletzerlegung rekursiv durch diskrete Faltungen berechnen. Das kontinuierliche Signal  $f$  ist dabei in den Hintergrund getreten, alle Operationen werden diskret auf den Koeffizienten  $v^m$  bzw.  $w^m$  ausgeführt.

Durch die Annahme  $f \in V_0$  wurde implizit eine Diskretisierung des kontinuierlichen Signals  $f$  durchgeführt. Wir wollen später diskutieren, wie man dies in die Praxis umsetzt und welche Probleme sich daraus ergeben.

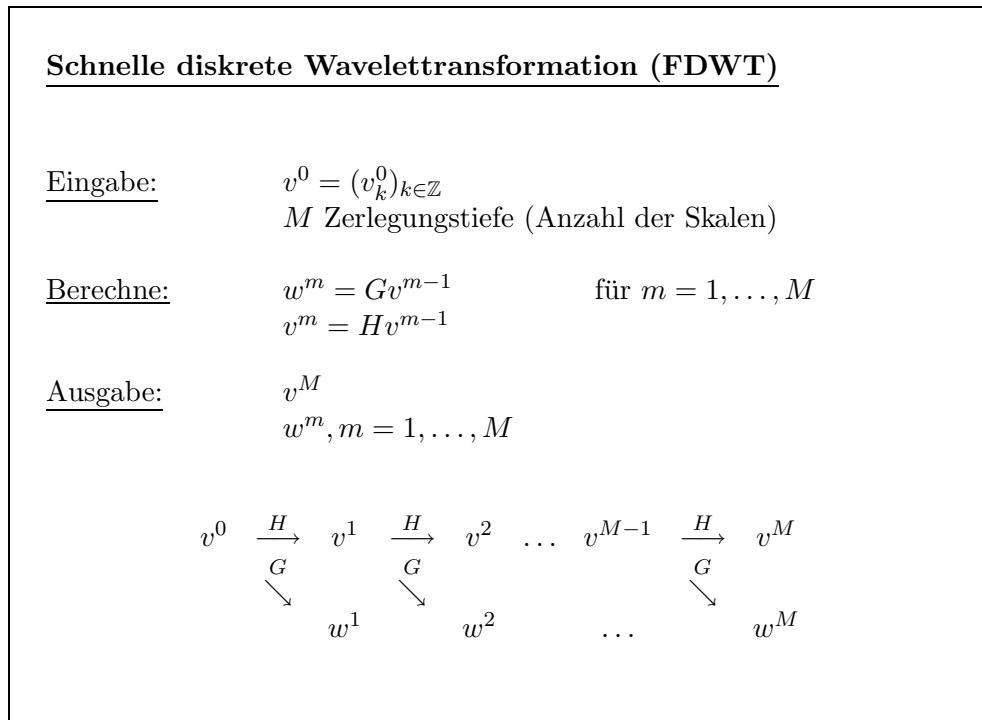
Wir wollen uns die Rechengvorgänge in (4.31) und (4.32) näher anschauen, die man mit Hilfe der Zerlegungsoperatoren  $H$  und  $G$  ausdrücken kann. Wir definieren:

$$\begin{aligned} H : \ell^2(\mathbb{Z}) &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ v &\mapsto \left( (Hv)_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{l-2k} v_l \right)_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} G : \ell^2(\mathbb{Z}) &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ v &\mapsto \left( (Gv)_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{g}_{l-2k} v_l \right)_{k \in \mathbb{Z}}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

wobei wie üblich  $h = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  bzw.  $g = (g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  die Folge der Skalierungskoeffizienten bzw. die Folge der Waveletkoeffizienten bezeichnen. Die Operatoren  $H$  und  $G$  sind nicht die üblichen diskreten Faltungen - zum einen ist die Faltung nur an jedem zweiten Index auszuwerten und zum anderen hat der Index  $l - 2k$  umgekehrtes Vorzeichen. In der Sprache der Signalverarbeitung wird dies als „Faltung mit anschließender Dezimierung“ (downsampling um den Faktor 2) bezeichnet. Wir verweisen auf Abschnitt 7.1 für eine ausführliche Diskussion dieser Interpretation.

Für diesen Algorithmus erhalten wir das folgende einfache Schema zur Berechnung der diskreten Wavelettransformation auf den ersten  $M$  Skalen:



Bei diesem Algorithmus erfolgt also die Analyse ausgehend von einer feinen

Skala (hier  $V_0$ ) in Richtung größer werdenden Skalen. Dabei ist die Wahl der Anfangsskala  $V_0$  willkürlich, man könnte ebenso mit der Skala  $V_{-1254}$  starten.

### 4.3.2 Schnelle diskrete Waveletrekonstruktion (FIDWT)

Wir wenden uns nun der Rekonstruktion der Ausgangsfolge  $c^0$  aus den berechneten Koeffizientenfolgen  $\{v^m, w^m | m = 1, \dots, M\}$  zu. Betrachten wir zunächst den Vorgang, wie wir aus  $v^1$  und  $w^1$  die Folge  $v^0$  rekonstruieren können. Dazu verwenden wir die orthogonale Zerlegung von  $V_0$  in die beiden Unterräume  $V_1$  und  $W_1$ . Demnach gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k^0 \varphi_{0,k} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j^1 \varphi_{1,j} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} w_j^1 \psi_{1,j} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j^1 \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \varphi_{0,2j+l} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} w_j^1 \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l \varphi_{0,2j+l}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Skalierungsgleichungen (4.17) und (4.28) verwendet. Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$v_k^0 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j^1 h_{k-2j} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} w_j^1 g_{k-2j} \quad (4.35)$$

Ebenso können wir ausgehend von  $w^M$  und  $v^M$  zunächst  $v^{M-1}$  rekonstruieren. Rekursiv werden dann die Zerlegungskoeffizienten  $w^m$  auf den Skalen  $M, \dots, 1$  eingearbeitet. Der Rekonstruktionsalgorithmus läßt sich wiederum mit Hilfe von Operatoren schreiben. Dazu führen wir die zu  $H$  und  $G$  adjungierten Operatoren  $H^*$  und  $G^*$  ein:

$$\begin{aligned} H^* : \ell^2(\mathbb{Z}) &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ v &\mapsto ((H^*v)_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_{k-2j} v_j | k \in \mathbb{Z}), \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} G^* : \ell^2(\mathbb{Z}) &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ w &\mapsto ((G^*w)_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_{k-2j} w_j | k \in \mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Man rechnet durch geeignete Umsortierung der Summen nach, daß die definierenden Eigenschaften der adjungierten Operatoren  $\langle Hv|w \rangle = \langle v|H^*w \rangle$  und  $\langle Gv|w \rangle = \langle v|G^*w \rangle$  tatsächlich gelten. Momentan ist für uns allerdings der Begriff des adjungierten Operators nicht weiter wichtig, und wir können (4.36) und (4.37) einfach als Definitionen von  $H^*$  und  $G^*$  auffassen.

Ein einzelner Rekonstruktionsschritt wird demnach beschrieben durch

$$v^{m-1} = H^*v^m + G^*w^m. \quad (4.38)$$

### Schnelle diskrete Waveletrekonstruktion

Eingabe:  $M$   
 $v^M, w^m, m = 1, \dots, M$

Berechne:  $v^{m-1} = H^*v^m + G^*w^m$  für  $m = M, \dots, 1$

Ausgabe:  $v^0$

$$\begin{array}{ccccccc}
 v^M & \xrightarrow{H^*} & v^{M-1} & \xrightarrow{H^*} & v^{M-2} & \dots & v^1 & \xrightarrow{H^*} & v^0 \\
 & \nearrow G^* & & \nearrow G^* & & & & \nearrow G^* & \\
 w^M & & w^{M-1} & & \dots & & w^1 & & 
 \end{array}$$

Bei diesem Algorithmus erfolgt also die Synthese ausgehend von der größten Skala  $V_M$  in Richtung im feiner werdenden Skalen bis schließlich  $V_0$  erreicht ist.

### 4.3.3 Aufwandsanalyse der FDWT und FIDWT

Wir wollen nun den Aufwand der schnellen diskreten Wavelettransformation (FDWT) bestimmen.

Dazu benötigen wir den Begriff der Länge  $\ell(x)$  einer endlichen Folge  $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ , also einer Folge mit nur endlich vielen Folgengliedern ungleich Null. Es sei  $a \in \mathbb{Z}$  der kleinste Folgenindex mit  $x_a \neq 0$  und  $b \in \mathbb{Z}$  der größte Folgenindex mit  $x_b \neq 0$ , dann definieren wir  $\ell(x) := b - a + 1$ . Mit anderen Worten ist  $\ell(x)$  die Länge des Trägers der Folge  $x$ .

Wir gehen davon aus, daß die Eingabefolge  $v^0 = (v_k^0)_{k \in \mathbb{Z}}$  eine endliche Länge

$$N := \ell(v^0)$$

hat. Desweiteren wollen wir uns auf den Fall endlicher Filter  $h = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  und  $g = (g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  beschränken. Dies ist insbesondere für die Filter des Haar-Wavelets und der orthogonalen Daubechies-Wavelets der Fall. Nach Definition (4.27) von  $g$  gilt  $\ell(g) = \ell(h)$ . Bei der Waveletzerlegung werden sukzessiv für  $m = 1, \dots, M$  die Koeffizientenfolgen

$$w^m = Gv^{m-1} \quad \text{und} \quad v^m = Hv^{m-1}$$

berechnet. Dabei sind die Operatoren  $H$  und  $G$  „Faltungen“ mit anschließender 2-Dezimierung. Die Länge der Faltung zweier Folgen  $x$  und  $y$  ist die Summe der Länge der Folgen, also

$$\ell(x * y) = \ell(x) + \ell(y).$$

Durch die 2-Dezimierung wird die Länge der Faltungsfolge von Skala zu Skala in etwa um den Faktor 2 halbiert. Damit erhalten wir für  $m = 1, \dots, M$

$$\begin{aligned}\ell(v^m) &\leq \lceil \frac{1}{2}(\ell(v^{m-1}) + \ell(h)) \rceil \leq \frac{1}{2}(\ell(v^{m-1}) + \ell(h) + 1) \\ \ell(w^m) &\leq \lceil \frac{1}{2}(\ell(v^{m-1}) + \ell(g)) \rceil \leq \frac{1}{2}(\ell(v^{m-1}) + \ell(h) + 1)\end{aligned}$$

Induktiv folgen hieraus sofort die Abschätzungen

$$\ell(v^m) \leq 2^{-m}\ell(v^0) + \ell(h) + 1, \quad (4.39)$$

$$\ell(w^m) \leq 2^{-m}\ell(v^0) + \ell(h) + 1. \quad (4.40)$$

Weiterhin sieht man, daß der Algorithmus terminiert, falls  $M \geq \log_2 N$  gilt. Die Anzahl der maximal zu berechnenden Skalen  $M$  kann also durch  $\log_2 N$  abgeschätzt werden.

Mit einem primitiven Faltungsalgorithmus kann man die Faltung  $x * y$  zweier endlicher Folgen  $x$  und  $y$  mit maximal  $2\ell(x)\ell(y)$  Operationen (Additionen und Multiplikationen) bewerkstelligen. Damit kann der Gesamtaufwand  $GA$  für die Berechnung der Folgen  $v^m$  und  $w^m$  für die Skalen  $m = 1, \dots, M$  abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned}GA &\leq \sum_{m=1}^M (2\ell(v^m)\ell(h) + 2\ell(w^m)\ell(g)) \\ &\leq \sum_{m=1}^M 4(2^{-m}\ell(v^0)\ell(h) + \ell(h)^2 + \ell(h)) \\ &\leq 4\ell(v^0)\ell(h) + 4M(\ell(h)^2 + \ell(h)).\end{aligned}$$

Da  $M$  die Größenordnung  $\log_2 N$  hat, kann man das Ergebnis wie folgt zusammenfassen.

**Satz 4.3.1** *Es sei  $V_0$  der Grundraum einer MRA mit Skalierungsfunktion  $\varphi$ , assoziiertem Wavelet  $\psi$  und Filterkoeffizienten  $h = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  endlicher Länge  $\ell(h)$ . Weiterhin sei  $f \in V_0$  ein Signal, also  $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k^0 \varphi(x - k)$ , so daß die Koeffizientenfolge  $v_0 = (v_k^0)_{k \in \mathbb{Z}}$  endliche Länge  $N = \ell(v_0)$  habe. Dann hat der Gesamtaufwand  $GA$  der Berechnung der schnellen diskreten Wavelettransformation von  $f$  bezüglich des Mutterwavelets  $\psi$  den Gesamtaufwand*

$$GA = O(N).$$

*Genauer kann  $GA$  abgeschätzt werden durch  $c_{\ell(h)}N$ , wobei  $c_{\ell(h)}$  eine von der Filterlänge  $\ell(h)$  abhängige Konstante ist. Diese Abhängigkeit ist linear in  $\ell(h)$ .*

Der Aufwand der schnellen diskreten Waveletrekonstruktion läßt sich analog bestimmen, und liefert ein analoges Ergebnis zu Satz 4.3.1.

### 4.3.4 Diskretisierungsschritt des Signals

Wir wollen noch einmal betonen, daß bei den schnellen diskreten Waveletalgorithmen weder die analysierenden Wavelets  $\psi^{s,t}$  noch das zu analysierende Signal  $f$  diskret sind. Diskret ist nur das Gitter, an dem die Waveletkoeffizienten  $w_k^m = \langle f | \psi_{m,k} \rangle$  berechnet werden. Hierbei handelt es sich um Integrale

$$\langle f | \psi_{m,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(u) \psi_{m,k}(u) du,$$

die jedoch bei den schnellen DWT-Algorithmen nicht direkt, sondern über eine Rekursion über den Skalenparameter  $m$  berechnet werden. Nun stellt sich die berechnete Frage, wie es überhaupt möglich sein kann, daß Integrale zeitkontinuierlicher Funktionen „diskret“ berechnet werden können. Wo liegt der eigentliche Diskretisierungsschritt, der Übergang von zeitkontinuierlichen Größen (das Signal  $f$  und die Wavelets  $\psi_{m,k}$ ) zu zeitdiskreten Größen (die Wavelet- und Skalierungskoeffizienten)?

Der eigentliche Diskretisierungsschritt liegt in der Annahme (4.29), daß unser Signal  $f$  im Grundraum  $V_0$  der MRA liegt, also eine Entwicklung der folgenden Form hat:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k^0 \varphi(x - k)$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$v^0 = (v_k^0 = \langle f | \varphi(\cdot - k) \rangle)_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Die Folge der Skalierungskoeffizienten  $v_0$  ist der Rekursionsanfang der schnellen DWT (siehe Unterabschnitt 4.3.1). In der Theorie ist der hergeleitete Algorithmus mit den „richtigen“ Voraussetzungen sehr elegant, für die Praxis stellen sich jedoch einige Fragen:

- Wie erhält man aus dem zeitkontinuierlichen Originalsignal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  ein Signal im Grundraum  $V_0$ , das für den Rekursionsanfang unseres DWT-Algorithmus benötigt wird? Welchen Fehler muß man dabei in Kauf nehmen?
- Die Annahme  $f \in V_0$  garantiert uns zwar die Existenz der Folge der Skalierungskoeffizienten  $v^0 = (v_k^0)_{k \in \mathbb{Z}}$ , wie kann diese aber bei einer konkreten Implementation des Algorithmus aus  $f$  berechnet werden? Aus mathematischer Sicht müßten die Integrale  $\langle f | \varphi(\cdot - k) \rangle$  bestimmt werden, deren Berechnung (numerisch durch Approximationen) äußerst kostenintensiv sind. Kommt man auf einem anderen, einfacheren Wege an die Koeffizienten  $v_k^0$ , zumindest wenn man einen kleinen Fehler in Kauf nimmt?
- In der digitalen Audiosignalverarbeitung haben wir es nicht mit zeitkontinuierlichen Signalen  $f \in L^2(\mathbb{R})$  zu tun, sondern die Signale sind zeitdiskret, liegen also z. B. in gesampelter Form  $(f(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  vor. Wie läßt sich der schnelle DWT-Algorithmus auf solche diskrete Signale anwenden?

In der Praxis gibt es eine ganz einfache „Lösung“ auf die in den Fragen formulierten Probleme: Man verwendet einfach die Samplewerte  $(f(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  anstelle der Skalierungskoeffizienten  $(v_k^0)_{k \in \mathbb{Z}}$ . Diese Vorgehensweise macht erst einmal streng gesehen keinen Sinn, von der die Autoren in ihrem Buch [Strang/Nguyen] sagen:

„... Is this legal [die Zahlen  $f(k)$  anstelle der  $(v_k^0)$  zu verwenden]? **No. It is a wavelet crime.** Some can't imagine doing it, others can't imagine not doing it. Is this crime convenient? **Yes.** We may not know the whole function  $t \mapsto f(t)$ , it may not be a combination of  $(\varphi(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ , and computing the true coefficients  $(v_k^0)_{k \in \mathbb{Z}}$  may take too long. But the crime cannot go unnoticed - we have to discuss it.“

Für eine ausführlichere Diskussion verweisen wir auf S. 232 dieses Buches. Wir beschränken uns hier auf ein paar Bemerkungen. Die grundlegende Annahme bei dieser Vorgehensweise ist die Annahme

$$v_k^0 \approx f(k) \quad (4.41)$$

für  $k \in \mathbb{Z}$ . Diese begründet sich darauf, daß viele Skalierungsfunktionen  $\varphi$  bzw. deren Translate  $\varphi(\cdot - k)$  sich ähnlich wie die „Dirac-Funktion“  $\delta$  bzw.  $\delta(\cdot - k)$  um den Zeitpunkt  $t = 0$  bzw.  $t = k$  konzentrieren und daher auch die inneren Produkte eines Signals  $f$  mit  $\varphi(\cdot - k)$  und  $\delta(\cdot - k)$  zu ähnlichen Zahlen führen:

$$v_k^0 = \langle f | \varphi(\cdot - k) \rangle \approx \langle f | \delta(\cdot - k) \rangle = f(k).$$

Im konkreten Fall (abhängig von der verwendeten MRA und den zugehörigen Wavelets) ist es wichtig zu überprüfen, ob diese Approximationseigenschaft auch tatsächlich gegeben ist. Falls dies nicht der Fall ist, müssen die Samplewerte geeignet (durch sogenannte *Präfilter*) „vorverarbeitet“ werden, bevor Sie anstelle der  $(v_k^0)_{k \in \mathbb{Z}}$  für den Start des DWT-Algorithmus verwendet werden können.

**Fazit:** Da in vielen Fällen  $v_k^0 \approx f(k)$  gilt, können bei der konkreten Implementation der schnellen DWT-Algorithmen die Samplewerte  $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  (evtl. vorverarbeitet) anstelle der Koeffizienten  $(v_k^0)_{k \in \mathbb{Z}}$  als Startwerte benutzt werden. Allerdings handelt man sich dabei fehlerbehaftete Waveletkoeffizienten  $w_k^m$  ein, obwohl die schnellen DWT-Algorithmen an sich exakt sind! Das Originalsignal  $f$  läßt sich damit nur noch approximativ aus den Koeffizienten zurückgewinnen.

### 4.3.5 $P_m, Q_m$ und Waveletkoeffizienten

Die schnelle DWT von Unterabschnitt 4.3.1 berechnet ausgehend von der Folge der Skalierungskoeffizienten  $v^0 = (v_k^0)_{k \in \mathbb{Z}}$  eines Signals  $f \in V_0$  die Folgen der Waveletkoeffizienten  $w^m = (w_k^m)_{k \in \mathbb{Z}}$  auf den Skalen  $m = 1, \dots, M$  und die Folge der Skalierungskoeffizienten  $v^M = (v_k^M)_{k \in \mathbb{Z}}$  auf der  $M$ -ten Skala. Mit diesen Daten lassen sich sofort die Projektionen

$$Q_m(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f | \psi_{m,k} \rangle \psi_{m,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_k^m \psi_{m,k}$$

für die Skalen  $m = 1, \dots, M$  des Signals  $f$  auf  $W_m$  und die Projektion

$$P_M(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f | \varphi_{M,k} \rangle \varphi_{M,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k^M \varphi_{M,k}$$

von  $f$  auf  $V_M$  angegeben. Analog liefert die schnelle diskrete Waveletrekonstruktion die Folgen der Skalierungskoeffizienten  $v^m$  für die Skalen  $m = M, \dots, 1$ , mit denen sich die Projektionen  $P_m(f)$  angeben lassen.

Da in der Praxis meist weder die Skalierungsfunktion  $\varphi$  noch das Mutterwavelet  $\psi$  explizit bekannt sind, lassen sich die Projektionen trotz der Kenntnis der Koeffizienten oft nicht so leicht angeben. „Waveletspezialisten“ lesen die Eigenschaften des Signals  $f$  oft unmittelbar an den Waveletkoeffizienten ab. Für eine graphische Darstellung der Waveletkoeffizienten im endlichen Fall (d. h. die Folge  $v^0$  hat endliche Länge  $N$ ) faßt man die  $M$  Folgen  $w^1, \dots, w^M$  und  $v^M$  zu einer Folge

$$w(f) := (v^M, w^M, w^{M-1}, \dots, w^1) \quad (4.42)$$

zusammen. Diese Darstellung wird uns im Kapitel 5 über Anwendungen der DWT begegnen (siehe z. B. Abbildung 5.4).

In der konkreten Anwendung ist die Länge  $N = \ell(v^0)$  der Ausgangsfolge, die ja auch die Komplexität der schnellen DWT-Algorithmen bestimmt, wesentlich größer als die Filterlängen  $\ell(h) = \ell(g)$ , z. B. gilt häufig  $N > 10^4$ , während  $\ell(h) \leq 8$  ist. Daher folgt aus den Abschätzungen (4.39) und (4.40):

$$\ell(w(f)) \approx N.$$

Durch eine kleine Modifikation des DWT-Algorithmus für Signale  $f \in V_0$  mit  $\ell(v^0) = N \in \mathbb{N}$ ,  $N$  eine 2-er Potenz, kann man erreichen, daß die analog zu (4.42) definierte Folge  $w(f)$  der modifizierten Waveletkoeffizienten für die Skalen  $m = 1, \dots, M = \log(N)$  ebenfalls genau die Länge  $N$  hat. Wir verweisen für Einzelheiten auf das Buch von [Strang/Nguyen] in dem Kapitel über Periodisierung und Spiegelung. Die modifizierte schnelle DWT, die den  $N$  Koeffizienten  $v^0$  die  $N$  Koeffizienten  $w(f)$  zuordnet, wird dabei durch eine orthonormale  $N \times N$ -Matrix realisiert.

**Warnung:** Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir nochmal eine unserer periodisch wiederholten Warnungen bzgl. der  $L^2$ -Norm aussprechen. Wie wir gesehen haben, läßt sich jedes beliebige Signal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  darstellen als

$$f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f | \psi_{m,k} \rangle \psi_{m,k}.$$

Diese Gleichung gilt jedoch wieder nur im  $L^2$ -Sinne! Es ist wichtig sich diesen Sachverhalt klar zu machen, da es sonst zu einer scheinbar paradoxen Aussage kommt. Wir wollen dies im folgenden erläutern. Es sei für  $n \in \mathbb{N}$

$$f_n := \sum_{-n \leq m \leq n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f | \psi_{m,k} \rangle \psi_{m,k}.$$

Da für alle Wavelets  $\psi_{m,k}$ ,  $m, k \in \mathbb{Z}$ , der Mittelwert  $\int_{\mathbb{R}} \psi_{m,k}(t) dt$  Null ist, gilt dasselbe für die Funktionen  $f_n$ . Da sich  $f$  als Grenzwert der  $f_n$  ergibt, könnte man meinen, daß auch der Mittelwert von  $f$  verschwinden müßte, obwohl diese Forderung an  $f$  nicht gestellt wurde. Hier wird die Tatsache entscheidend, daß die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht in der  $L^1$ -Norm (in diesem Fall müßte tatsächlich auch der Mittelwert von  $f$  verschwinden) sondern in der  $L^2$ -Norm gegen  $f$  konvergiert. Mit anderen Worten ist es also möglich, eine beliebige Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  als  $L^2$ -Grenzwert einer Funktionenfolge zu erhalten, deren Mittelwerte verschwinden.

## 4.4 Beispiel: Haar-MRA

In diesem Abschnitt wollen wir die in den vorherigen Abschnitten behandelte Theorie an dem konkreten Beispiel des Haar-Wavelets nachvollziehen. Schon im Jahr 1910 zeigte Haar, daß eine Rechteckfunktion mit gewissen Translaten und skalierten Versionen eine Basis des  $L^2(\mathbb{R})$  aufspannt. Erst sehr viel später wurde erkannt, daß Haars System ein Waveletsystem (und zwar das einfachste) definiert.

Wir besprechen nun die von Haar angegebene MRA. Sei  $V_0$  der Raum aller Funktionen in  $L^2(\mathbb{R})$ , die konstant auf den Einheitsintervallen  $[k, k+1]$ ,  $k \in \mathbb{N}$  sind. Diese Funktionen  $f$  sind durch ihre Werte  $f(k)$  an allen ganzzahligen Zeiten  $t = k$  festgelegt. Die Funktion  $t \mapsto f(2t)$  ist dann konstant auf allen Halbinsintervallen und definieren den Raum  $V_{-1}$ . Analog ist der Raum  $V_{-j}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , definiert als Raum der auf den sogenannten *dyadischen Intervallen* der Länge  $2^{-j}$  konstanten Funktionen. Dabei ist ein dyadisches Intervall der Länge  $2^{-j}$  und  $k \in \mathbb{N}$  definiert durch

$$I_{-j,k} := [k \cdot 2^{-j}, (k+1) \cdot 2^{-j}].$$

Es gelten offensichtlich die Inklusionen

$$\{0\} \subset \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R}),$$

da jede auf den Intervallen der Länge  $2^{-j}$  konstante Funktion auch konstant ist auf Intervallen halber Länge. Die Eigenschaften

$$\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\} \quad \text{und} \quad f(\cdot) \in V_m \iff f(2^m \cdot) \in V_0$$

sind leicht zu überprüfen. Die eigentliche Leistung von Haar bestand darin, die Gültigkeit von

$$\overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m} = L^2(\mathbb{R})$$

zu zeigen. Mit anderen Worten bedeutet dies, daß die auf den dyadischen Intervallen konstanten  $L^2$ -Treppenfunktionen dicht in  $L^2(\mathbb{R})$  sind, jede Funktion

in  $L^2(\mathbb{R})$  läßt sich also beliebig genau durch solche Treppenfunktionen approximieren (und zwar im  $L^2$ -Sinne). Für einen Beweis dieser Aussage verweisen wir auf die Literatur.

Damit haben wir bis auf die Existenz einer Skalierungsfunktion  $\varphi$  alle Eigenschaften von Definition 4.1.1 einer MRA nachgewiesen. Wir definieren die Rechteckfunktion

$$\varphi(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Rechteckfunktion  $\varphi$  ist offensichtlich orthogonal zu seinen ganzzahligen Translaten  $t \mapsto \varphi(t - k), k \in \mathbb{Z}$  (machen Sie sich das klar!) und diese Funktionen bilden eine ONB von  $V_0$ . Damit definiert  $\varphi$  die für eine MRA geforderte Skalierungsfunktion (siehe Abbildung 4.1).

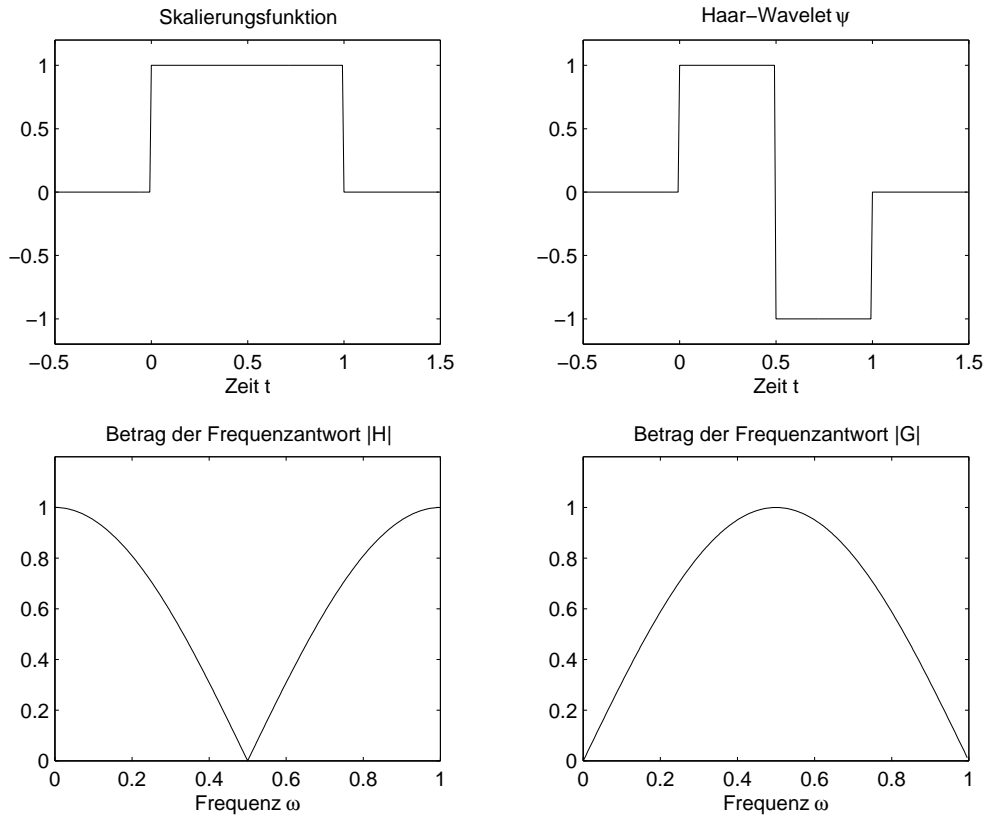


Abbildung 4.1: Frequenzantworten H und G zur Haar-MRA.

Wir fassen nun die aus der allgemeinen Theorie gewonnenen Ergebnisse von Abschnitt 4.1 für unser konkretes Beispiel zusammen. Die Existenz einer Skalierungsgleichung ist garantiert durch Lemma 4.2.1. In unserem Beispiel kann man die Skalierungskoeffizienten raten. Es gilt

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4.43)$$

und alle weiteren Koeffizienten sind Null. Die Frequenzantwort  $H$  des Filters

$h := (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  ist

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2\pi i \omega} = e^{-\pi i \omega} \sqrt{2} \cos(\pi \omega).$$

Dies ist also bis auf einen Faktor und eine Modulation eine Cosinusfunktion (siehe Abbildung 4.1). Wie schon in Satz 4.2.5 allgemein hergeleitet wurde, gilt  $H(0) = \sqrt{2}$  und  $H(\frac{1}{2}) = 0$ .

Die  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  definieren einen Tiefpaßfilter. Der zu diesem Filter assoziierte Hochpaßfilter  $g = (g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  ist definiert durch

$$g_0 = \bar{h}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, g_1 = (-1)\bar{h}_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4.44)$$

und alle weiteren Koeffizienten sind Null. Das zur MRA gehörige Mutterwavelet  $\psi$  ist nach Satz 4.2.7 definiert durch

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2x - k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies ist das Haar-Wavelet, das uns schon häufiger in Beispielen begegnet ist (siehe auch Abbildung 3.2 und 4.1). Nun lassen wir die ganze hergeleitete mathematische Maschinerie wirken. Aus Satz 4.2.7 folgt, daß  $\psi$  tatsächlich ein Wavelet im Sinne von Definition 3.1.1 ist. Die  $\{\psi_{m,k} | k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , bilden eine ONB von  $W_m$  und  $\{\psi_{m,k} | n, k \in \mathbb{Z}\}$  eine ONB von  $L^2(\mathbb{R})$ . Unter anderem folgt, daß das Mutterwavelet  $\psi \in W_0$  orthogonal zur Skalierungsfunktion  $\varphi \in V_0$  und deren Translate ist, was in diesem Beispiel unmittelbar einsichtig ist.

Wir wollen nun die schnelle DWT von Unterabschnitt 4.3.1 bezüglich des Haar-Wavelets  $\psi$  an einem konkreten Beispiel durchführen. Das in Abbildung 4.2 dargestellte Signal  $f \in V_0$  ist gegeben durch

$$f(t) = 1 \cdot \varphi(t) + 1 \cdot \varphi(t-1) + (-1) \cdot \varphi(t-2) + (-1) \cdot \varphi(t-3) \\ + (-1) \cdot \varphi(t-4) + (-1) \cdot \varphi(t-5) + (-2) \cdot \varphi(t-6) + 2 \cdot \varphi(t-7).$$

Damit ist also mit den Bezeichnungen von Unterabschnitt 4.3.1 die Koeffizientenfolge  $v^0 = (v_k^0)_{k \in \mathbb{Z}}$  von  $f$  gegeben durch  $v^0 = (1, 1, -1, -1, -1, -1, -2, 2)$  (alle weiteren Koeffizienten sind Null und wir schreiben im folgenden nur die wesentlichen Koeffizienten). Mit den Filtern  $h$  und  $g$  (siehe (4.43) und (4.44)) berechnen sich rekursiv für  $m = 1, \dots, M$  die Folge  $v^m$  der Skalierungskoeffizienten durch

$$v_k^m = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{h}_{l-2k} v_l^{m-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_{2k}^{m-1} + \frac{1}{\sqrt{2}} v_{2k+1}^{m-1}$$

und die Folge  $w^m$  der Waveletkoeffizienten durch

$$w_k^m = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{g}_{l-2k} v_l^{m-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_{2k}^{m-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} v_{2k+1}^{m-1}.$$

Bei der DWT mit dem Haar-Wavelet sind die Koeffizienten der  $m$ -ten Skala also mit  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  gewichtete Summen- bzw. Differenzen zweier benachbarter Koeffizienten der  $(m - 1)$ -ten Skala. Damit ergibt sich für unser Signal  $f$  folgendes Berechnungsschema:

$v^0$	1	1	-1	-1	-1	-1	-2	2
$v^1$		$\sqrt{2}$		$-\sqrt{2}$		$-\sqrt{2}$		0
$w^1$		0		0		0		$-2\sqrt{2}$
$v^2$			0				-1	
$w^2$			2				-1	
$v^3$					$\frac{-1}{\sqrt{2}}$			
$w^3$					$\frac{1}{\sqrt{2}}$			

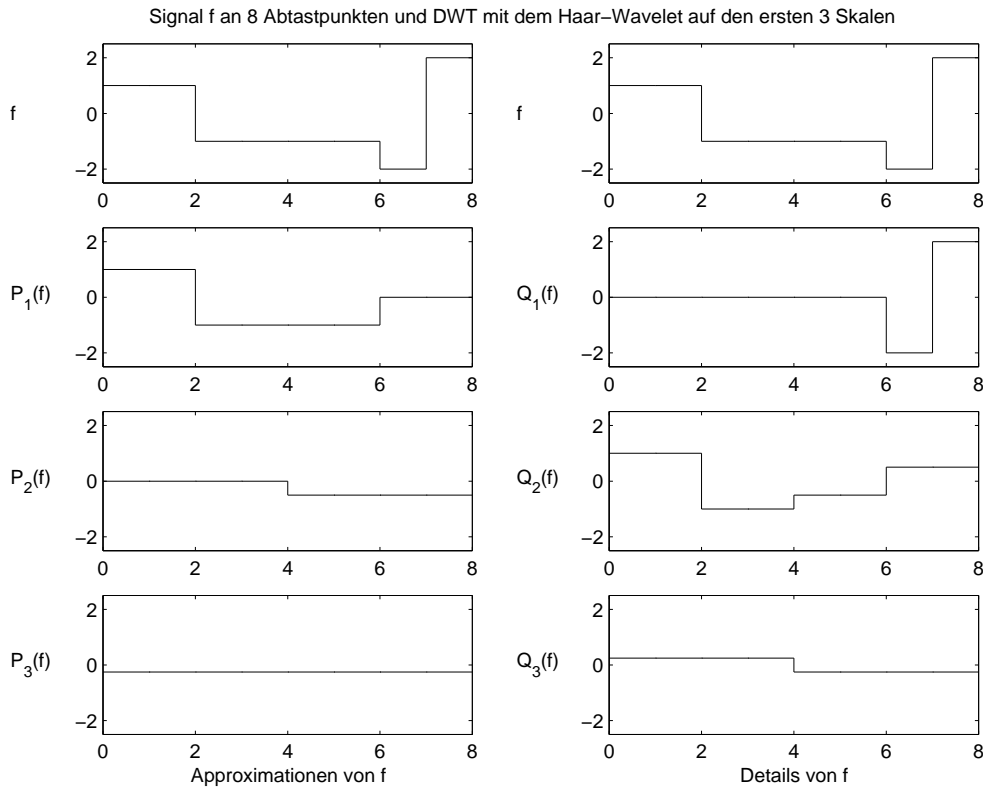


Abbildung 4.2: Beispiel für die DWT mit dem Haar-Wavelet eines Signals  $f$

In Abbildung 4.2 ist das Signal  $f$  mit seinen Projektionen  $P_i(f)$  bzw.  $Q_i(f)$  auf die Unterräume  $V_i$  bzw.  $W_i$  für  $i = 1, 2, 3$  dargestellt. Dabei berechnet sich zum Beispiel die Projektion  $Q_2(f)$  aus der Folge  $w^2$  der Waveletkoeffizienten durch

$$Q_2(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_k^2 \psi_{2,k} = 2\psi_{2,0} - 1\psi_{2,1} = \psi\left(\frac{\cdot}{4}\right) - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{\cdot-4}{4}\right).$$

Wir wollen uns abschließend noch die DWT mit dem Haar-Wavelet zweier uns schon bekannter Signale anschauen.

Chirpfunktion  $f(t)=\sin(20\pi (t/N)^2)$ ,  $N=128$ , und DWT mit dem Haar-Wavelet auf den ersten 7 Skalen

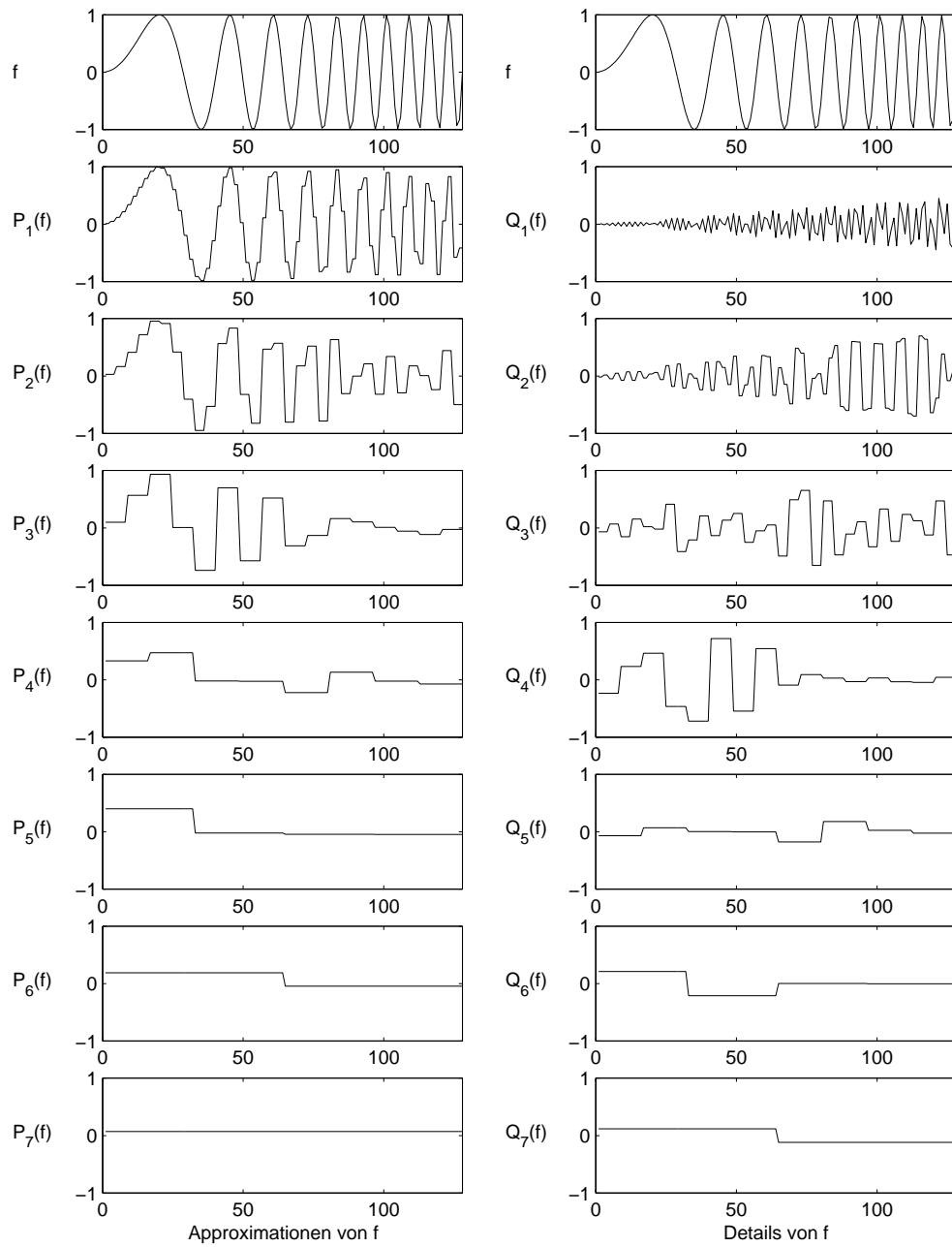


Abbildung 4.3: DWT des Chirpsignals

In Abbildung 4.3 sind die Projektionen des Chirpsignals

$$f(t) = \sin(20\pi(t/N)^2)$$

auf die Räume  $V_i$  und  $W_i$  für die Skalen  $i = 1, 2, \dots, M$ ,  $M = 7$ , dargestellt. Dabei wurde  $f$  an den Zeitpunkten  $t = 1, 2, \dots, N$ ,  $N = 128$ , abgetastet, und die Folge der Abtastwerte des Signals wurde als Folge  $v^0$  von Skalierungskoeff-

fizienten interpretiert, also

$$v_{k-1}^0 \approx f(k) \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Wir erinnern, daß dies eigentlich mathematisch nicht korrekt ist, aber eine in der Praxis gängige Vorgehensweise ist. Für eine Diskussion hierfür siehe Abschnitt 4.3.4.

An diesem Beispiel sieht man sehr gut, wie die Waveletkoeffizienten der Skalen mit niedrigem Index die hochfrequenten Anteile des Signals  $f$  kodieren. In der Zerlegung auf der ersten Skala wächst das „Detail“  $Q_1(f)$  mit zunehmender Zeit, was den stetig wachsenden Frequenzen des Chirpsignals  $f$  bei zunehmender Zeit entspricht.  $Q_1(f)$  stellt die hohen Frequenzanteile des Signals  $f$  dar. Die Projektion  $P_1(f)$  ist die Differenz des Signals  $f$  und dem Detail  $Q_1(f)$ . Bei der Berechnung der zweiten Skala wird nun die Projektion  $P_1(f)$  weiter zerlegt in einen hochfrequenten Anteil, dem Detail  $Q_2(f)$ , und einem niederfrequenten Anteil  $P_2(f)$ .  $P_2(f)$  ist eine geglättete Version von  $P_1(f)$ . Dieses Verfahren wird nun iteriert, bis die Projektion  $P_7(f)$  eine auf  $[1 : N]$  konstante Funktion ist. Dies ist der Fall, wenn wir in unserem DFT-Algorithmus nur noch einen nicht-trivialen Koeffizienten in der Folge  $v^M$  (hier  $M = 7$ ) haben.

In Abbildung 4.4 ist in analoger Weise das Signal  $f$ , eine Überlagerung zwei reiner Sinusschwingungen der Frequenzen  $\omega = 50$  und  $\omega = 5$  mit zwei Impulsen bei  $t = N/4$  und  $t = N/2$ , dargestellt. Interpretieren Sie wie im vorherigen Abschnitt die Projektionen  $P_i(f)$  und  $Q_i(f)$ . Die Impulse des Signals sind besonders gut in den hochfrequenten Detailstufen  $Q_1(f)$  und  $Q_2(f)$  erkennbar. Während die Sinusschwingung der Frequenz  $\omega = 50$  besonders gut im Detail  $Q_2(f)$  erkennbar ist, schlägt sich die Sinusschwingung der Frequenz  $\omega = 5$  besonders gut in den Projektionen  $P_2(f)$  und  $P_3(f)$  nieder.

$f(t)=\sin(100\pi (t/N))+\sin(10\pi (t/N))$ ,  $N=256$ , Impulse bei  $t=64$  und  $t=128$ , und DWT mit dem Haar-Wavelet, 5 Skalen

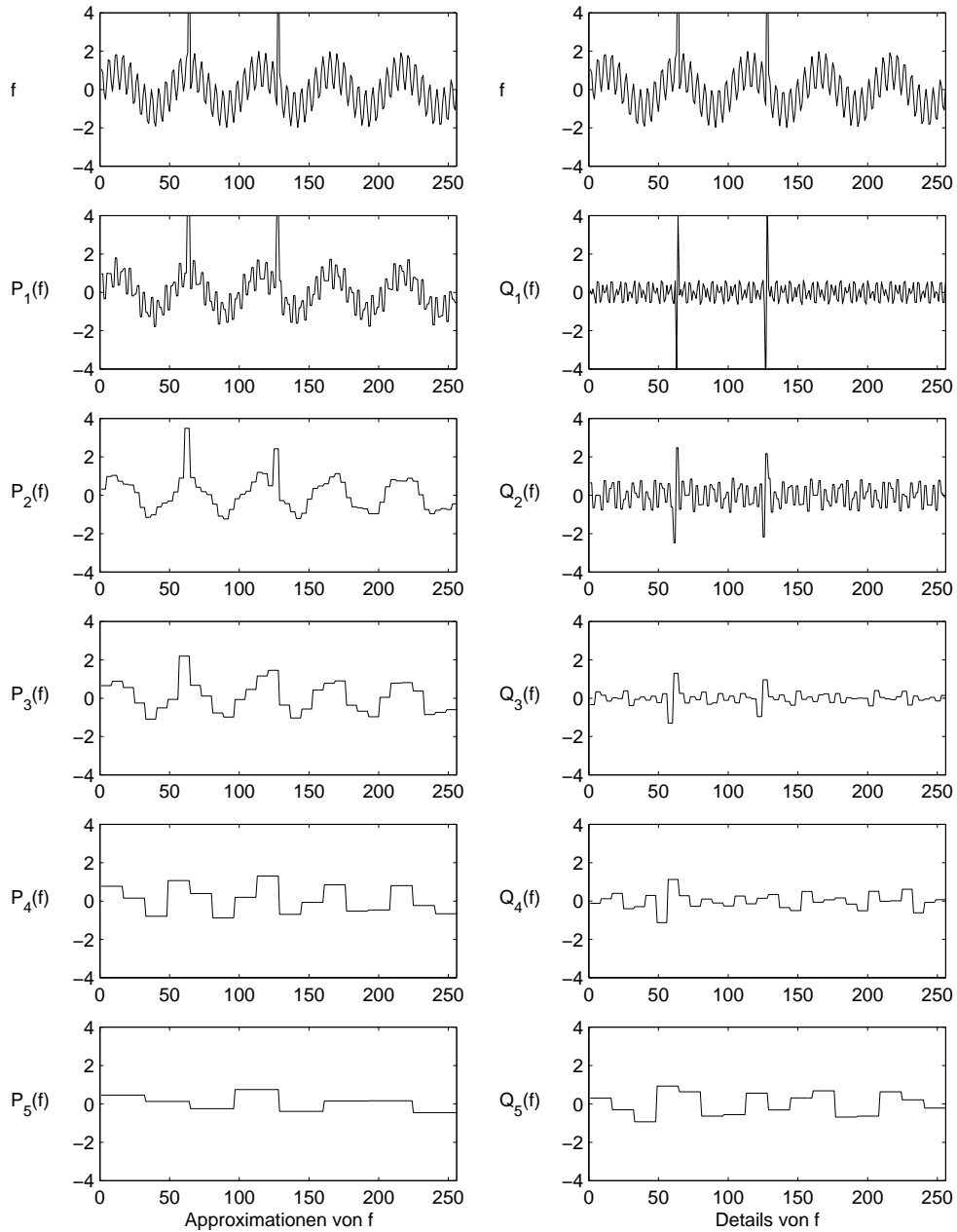


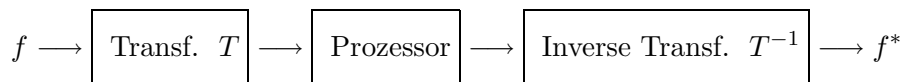
Abbildung 4.4: DWT einer überlagerten Sinusschwingung mit zwei Impulsen

# Kapitel 5

## Anwendungen der DWT

In den bisherigen Kapiteln haben wir verschiedene Transformationen eines Signals  $f$  studiert, u. a. die Fouriertransformation, die WFT und die DWT. Ziel ist es, neben der durch das Signal  $f$  gegebenen Zeitinformation weitere Informationen über  $f$  zu erhalten, z. B. Informationen über die vorkommenden Frequenzen oder Auftreten von Singularitäten (z. B. auch in höheren Ableitungen, die oft nicht aus einer graphischen Darstellung von  $f$  erkennbar sind). Die Transformationen liefern eine andere Darstellung des Signals, man spricht hier auch vom sogenannten *Transformationsbereich*, aus der diese Informationen (mehr oder weniger) direkt ablesbar sind. So lassen sich z. B. Informationen über die Frequenzzusammensetzung des Signals  $f$  aus der Fouriertransformierten  $\hat{f}$  ablesen. Im DWT-Bereich (das heißt an den Waveletkoeffizienten des durch eine DWT transformierten Signals  $f$ ) kann abgelesen werden, welche Details (Skalenparameter  $s$  des Waveletkoeffizienten) zu welcher Zeit (Zeitparameter  $t$  des Waveletkoeffizienten) mit welcher Intensität (Größe des Waveletkoeffizienten) im Signal vorkommen. Eine mögliche Rekonstruktion des Signals  $f$  aus seiner Transformierten besagt dabei, daß durch die Transformation keine Information verlorenght, die Transformation ist invertierbar.

Natürlich besteht kein Sinn darin, erst ein Signal zu transformieren, um es dann sofort wieder zu rekonstruieren. Zwischen diesen beiden Schritten spielt sich nun die eigentliche *Signalverarbeitung* ab. Wir transformieren ein Signal  $f$  mit einer geeigneten Transformation  $T$  und erhalten eine für die eigentliche Verarbeitung transparente Darstellung  $T(f)$ . Ein Signalprozessor verarbeitet die Daten  $T(f)$  zu modifizierten Daten  $T(f)^*$  aus der wir durch Rücktransformation  $T^{-1}$  ein modifiziertes Signal  $f^* := T^{-1}(T(f)^*)$  erhalten.



Die bisher behandelten Transformationen  $T$  sind stetig mit stetiger Inversen  $T^{-1}$ . Diese Eigenschaft ist für die Signalverarbeitung von großer Bedeutung, da aufgrund dessen kleine Veränderungen an den Daten  $T(f)$  durch inverse Transformation zu kleinen Veränderungen des ursprünglichen Signals führen.

Wir wollen in diesem Kapitel einige DWT-basierte Anwendungen diskutieren. Da Wavelettransformationen die Energie einer großen Klasse von Signalen in einer kleinen Anzahl von Waveletkoeffizienten konzentriert, liefern sie ein geeignetes Hilfsmittel für Kompressionsverfahren von Signalen. Zum Beispiel benutzt das FBI Wavelet-basierte Kompressionsverfahren zur digitalen Speicherung und Lagerung von Fingerabdrücken. Die Eigenschaft einer DWT, daß sich die wesentlichen Eigenschaften vieler Signale in einigen wenigen großen Waveletkoeffizienten niederschlagen, kann für die Rauscherkennung in Signalen verwendet werden und führt zu Algorithmen zur Rauschunterdrückung (Denoising). So wurde vor kurzem eine von Brahms aus dem Jahre 1889 eigenhändig eingespielte Version des Ungarischen Tanzes Nr. 1 mit Waveletmethoden untersucht. Die ursprüngliche Wachsylinder-Aufnahme wurde im Jahre 1935 zu einer LP verarbeitet, deren Qualität so schlecht war, daß die eigentliche Interpretation völlig im Rauschen unterging und die Aufnahme musikwissenschaftlich überhaupt nicht verwendet werden konnte. Erst durch Wavelet-basierte Verfahren konnten musikwissenschaftlich relevante Information extrahiert werden, die interessante Aufschlüsse über die Brahms'sche Interpretation seines eigenen Stückes lieferten. So stellte man fest, daß Brahms sich sehr viele Freiheiten nahm, an einigen Stellen den eigentlichen Notentext verließ und improvisierte (siehe [Hubbard]).

## 5.1 DWT-basierte Rauschunterdrückung

Die DWT-basierte Rauschunterdrückung (Denoising) basiert auf folgender Methode: Das verrauschte Signal  $f$  wird durch eine geeignete DWT transformiert. Die Transformierte  $T(f)$  wird mit einem Schwellenwertverfahren bearbeitet, d. h. es werden die Waveletkoeffizienten unter einem bestimmten *Schwellenwert* oder *Threshold* entfernt, und man erhält  $T(f)^*$ . Wir nennen dieses Verfahren im folgenden auch *Thresholding*. Die Rücktransformation mit der inversen DWT aus den so modifizierten Waveletkoeffizienten liefert das entrauschte Signal  $f^*$ . Diese Methode basiert auf der Eigenschaft der DWT, die wesentlichen Informationen für eine große Klasse von Signalen auf wenige, dafür aber große Waveletkoeffizienten zu konzentrieren. Falls die Energie eines Signals  $f$  in einer kleinen Anzahl von Waveletkoeffizienten konzentriert ist, so sind diese Koeffizienten groß im Vergleich zu Koeffizienten von Störsignalen oder Rauschen. Dabei geht man davon aus, daß sich die Energie dieser Rauschsignale auf eine große Anzahl von Koeffizienten verteilt. Das bedeutet, daß Thresholding das Rauschen oder die unerwünschten Störsignale niedriger Amplitude im DWT-Bereich entfernt und das erwünschte Signal durch inverse DWT mit einem niedrigen Verlust an Details zurückgewonnen werden kann.

Bei klassischen Methoden der Rauschentfernung wurde mit Hilfe der Fouriertransformation versucht, die Frequenzspektren des eigentlichen Signals und des Störsignals zu trennen, um diese dann durch lineare Filterung zu entfernen. Bei Überlappung der Frequenzspektren von Original- und Störsignal war ein Denoising nicht möglich. Die neue Methode des Thresholding, welches ein nicht-linearer Prozess ist, basiert auf einer anderen Idee. Anstelle die Frequenzspek-

tren zu trennen, wird durch die DWT eine Amplituden-basierte Trennung des eigentlichen Signals vom Störsignal angestrebt.

Bei dem soeben beschriebenen Verfahren tauchen sofort einige Fragen auf:

- Was ist überhaupt Rauschen? Was sind die Störsignale? (Z. B. stellt ein Unterseeboot für Forscher, die unter dem Meer nach Öl suchen, ein Störsignal dar. Dasselbe Unterseeboot kann aber für das Militär das eigentliche Signal sein.)
- In der Praxis tauchen verrauschte Signale auf, ohne daß man das eigentliche Signal kennt. Wie kann man also festlegen, welche Komponenten des verrauschten Signals Rauschen darstellen, und welche nicht. Wie kann der Rauschpegel genau bestimmt werden?
- Nach welchen Kriterien kann die Qualität entrauschter und verbesserter Signale bewertet werden?
- Bei der Thresholding-Methode werden alle Waveletkoeffizienten unterhalb eines bestimmten Schwellenwertes entfernt. Wie wird dieser Schwellenwert festgesetzt?
- Welche Wavelets eignen sich für die DWT?

Die Lösung dieser Probleme und die Wahl geeigneter Parameter ist sehr stark von der zu untersuchenden Signalklasse abhängig. Es gibt in diesem Bereich der digitalen Audiosignalverarbeitung noch viele ungelöste Fragen, und er stellt ein aktuelles Forschungsgebiet dar. Wir wollen im folgenden einige dieser Fragen näher beleuchten.

### 5.1.1 Weißes Rauschen

Zur Modellierung eines verrauschten oder gestörten digitalen Signals  $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  wird häufig folgender Ansatz gewählt:

$$s_n = f_n + \sigma e_n.$$

Hierbei ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  das ungestörte digitalisierte Signal und  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  ist  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteiltes Gaußsches weißes Rauschen. Die Konstante  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  bezeichnet den Rauschpegel. In diesem Unterabschnitt wollen wir auf den Begriff des weißen Rauschens näher eingehen. Hierzu fassen wir die nötigen Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie kurz zusammen.

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum). Eine Zufallsvariable  $X$  (ZV  $X$ ) ist definiert als meßbare Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

also liegt u. a. das  $X$ -Urbild jedes Intervalles von  $\mathbb{R}$  in  $\mathcal{A}$ . Ein einfaches Beispiel hierfür liefert die Bernoulli-ZV  $X : \Omega \rightarrow \{-1, 1\}$ , die nur die zwei Werte 1 und

-1 annimmt. Es gilt dann  $P(X = 1) = p$  und  $P(X = -1) = 1 - p$  für ein  $p \in [0, 1]$ . Die Schreibweise  $P(X = 1)$  bedeutet  $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\})$ . Die Bernoulli-ZV modelliert zum Beispiel das Experiment des einmaligen Werfens einer Münze, wobei z. B. die 1 Kopf und die -1 Zahl bedeutet. Bei einer „fairen“ Münze ist dann  $p = \frac{1}{2}$ .

Die Verteilungsfunktion einer ZV  $X$  ist definiert durch

$$F_X(\alpha) := P(X \leq \alpha).$$

Ist  $F_X$  differenzierbar, so definiert man die Wahrscheinlichkeitsdichte von  $X$  durch

$$f_X(\alpha) := \left(\frac{d}{d\alpha} F_X\right)(\alpha).$$

Der Erwartungswert  $\mu_X$  gibt eine Art Durchschnitt oder Schwerpunkt einer ZV  $X$  an und ist definiert durch

$$\mu_X := E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f_X(\alpha) d\alpha.$$

Die Varianz  $\sigma_X^2$  bzw. die Standardabweichung  $\sigma_X$  als eine Maßzahl für die Streuung um diesen Schwerpunkt ist gegeben durch

$$\sigma_X^2 := \text{Var}(X) := E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

Existieren für zwei Zufallsvariable  $X$  und  $Y$  die Werte  $E(X^2)$  und  $E(Y^2)$ , so ist die Kovarianz definiert durch

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

und der Korrelationskoeffizient durch

$$\rho_{XY} := \text{Cov}(X, Y) / (\sigma_X \sigma_Y).$$

Die ZV  $X$  und  $Y$  heißen *unkorreliert*, falls  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

Die *Gaußsche Zufallsvariable* oder *Normalverteilung* ist eine in der W-Theorie sehr wichtige ZV. Diese ZV  $X$  ist definiert über ihre Dichte

$$f_{\mu, \sigma}(\alpha) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\alpha - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

(Dies ist die Gaußsche Funktion mit den Parametern  $\sigma$  und  $\mu$ . Erinnern Sie sich, daß uns diese Funktion schon in einem völlig anderen Zusammenhang begegnet ist? Stichwort „Heisenbergsche Unschärferelation“.) Man rechnet nach, daß für die ZV  $X$  folgendes gilt:

$$\mu_X = \mu \quad \text{und} \quad \sigma_X = \sigma.$$

Man sagt auch, daß  $X$  eine  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ -Verteilung ist.

**Definition 5.1.1** Weißes Rauschen ist eine Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  von unkorrelierten Zufallsvariablen  $X_n$  mit demselben Erwartungswert  $\mu_{X_n} = \mu$  und derselben Varianz  $\sigma_{X_n}^2 = \sigma^2$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ . Es gilt also  $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ , falls  $i \neq j$ , und  $\text{Cov}(X_i, X_i) = \text{Var}(X_i) = \sigma^2$ .

Wir wollen uns diese Definition an zwei Beispielen verdeutlichen, die in Abbildung 5.1 illustriert sind.

- Beim weißen Bernoulli-Rauschen sind alle ZV  $X_n$  Bernoulli-ZV. Falls  $p = \frac{1}{2}$ , dann gilt  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$ . Dabei sind die ZV  $X_n$  unkorreliert. Zur Interpretation verwenden wir wieder das Experiment des Werfens einer fairen Münze. Jedes  $X_n$  entspricht dem einmaligen Werfen der Münze. Die Unkorreliertheit besagt, daß das Ergebnis des  $i$ -ten Wurfes unabhängig ist vom Ergebnis des  $j$ -ten Wurfes, falls  $i \neq j$ .
- Beim weißen Gaußschen Rauschen sind alle ZV  $X_n$   $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ -verteilt. In Abbildung 5.1 ist ein solches Rauschen mit den Parametern  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$  dargestellt.

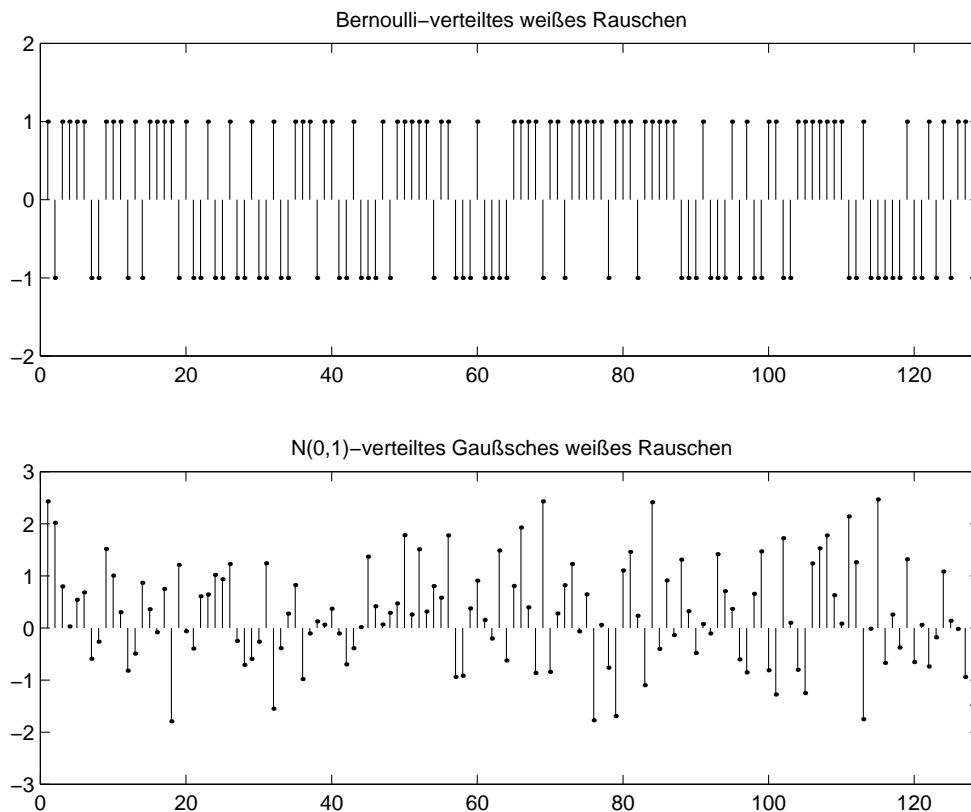


Abbildung 5.1: Beispiele für weißes Rauschen.

In der Audiosignalverarbeitung wird häufig davon ausgegangen, daß es sich bei dem Rauschsignal  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  um  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteiltes Gaußsches weißes Rauschen

handelt, d. h. für jedes  $n \in \mathbb{Z}$  ist  $e_n$  eine  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariable. Der Rauschpegel  $\sigma$  ist ein Skalierungsfaktor, der modelliert, mit welcher Intensität das Rauschen vorliegt. Ein kleiner Wert  $\sigma$  entspricht einem schwachen Rauschen und ein großer Wert  $\sigma$  einem starken Rauschen. Es gilt

$$\text{Var}(\sigma e_n) = \sigma^2 \text{Var}(e_n) = \sigma^2,$$

d. h. die Standardabweichung der ZV  $\sigma e_n$  ist gleich dem Rauschpegel  $\sigma$ . Dies erklärt auch die Wahl der Bezeichnung  $\sigma$  für den Rauschpegel.

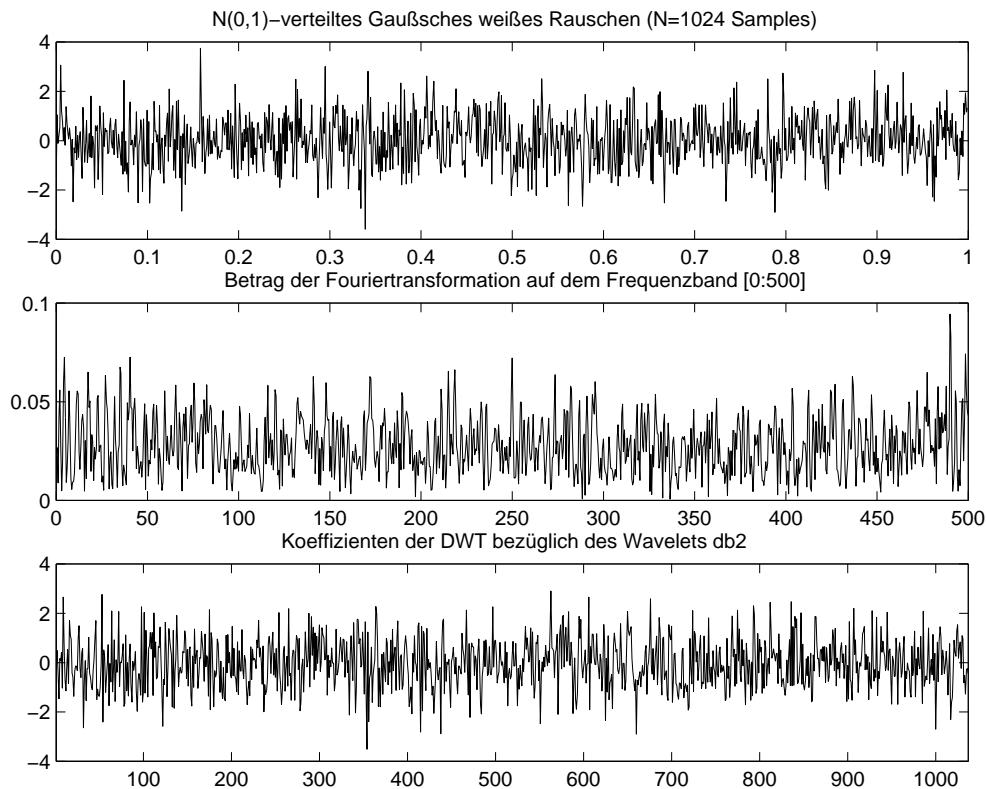


Abbildung 5.2: Beispiel für weißes Rauschen.

In der Abbildung 5.2 wurde durch einen Zufallsgenerator, dem eine  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilung zugrundeliegt, ein weißes Rauschsignal auf dem Einheitsintervall  $[0, 1]$  mit der Abtastrate  $N = 1024$  erzeugt. Weißes Rauschen ist dadurch charakterisiert, daß alle Frequenzen (im statistischen Sinne) mit derselben Energie vorkommen. Dieser Sachverhalt spiegelt sich auch in Abbildung 5.2 wider: Wenn man den Betrag der Fouriertransformierten des Rauschsignals betrachtet, so ist kein Frequenzbereich, kein Frequenzband, gegenüber einem anderen ausgezeichnet. Jeder Abtastwert der Fouriertransformierten scheint unkorreliert denselben statistischen Gesetzmäßigkeiten zu genügen, so daß im statistischen Mittel ein konstanter Wert für alle Frequenzen zu erwarten ist.

Dieser Sachverhalt spiegelt sich auch in der (orthogonalen) DWT eines Rauschsignals wider. Auch die Waveletkoeffizienten sind unkorrelierte Zufallsvariablen

derselben Zufallsverteilung. In Abbildung 5.2 wurde die DWT des Rauschsignals mit  $N = 1024$  Abtastwerten auf den ersten  $M = 10$  Skalen bezüglich des db2-Wavelets berechnet. Die Folge  $w^m$  der Waveletkoeffizienten auf der  $m$ -ten Skala hat dabei ungefähr die Länge  $N \cdot 2^{-m}$ . Dabei wurden die  $M$  Folgen  $w^1, w^2, \dots, w^M$  und die Folge der Skalierungskoeffizienten  $v^M$  der  $M$ -ten Skala zu einer Folge  $w := (v^M, w^M, w^{M-1}, \dots, w^1)$  zusammengefaßt (die Länge dieser Folge ist dann ungefähr  $N = 1024 + \text{Filterlänge}$ ) und graphisch dargestellt. Man erkennt, daß die Folge  $w$  sich wie das Rauschsignal selbst verhält. Die Energie des weißen Rauschsignals verteilt sich im statistischen Mittel gleichmäßig auf alle Waveletkoeffizienten, es findet keine Konzentration der Energie in einigen wenigen Waveletkoeffizienten statt.

### 5.1.2 Thresholding

Bei der Entfernung von „störenden“ Waveletkoeffizienten wurden u. a. von Donoho (siehe [Donoho]) zwei Verfahren vorgeschlagen.

- Das sogenannte *Hard-Thresholding* setzt unter Benutzung einer vorgegebenen Schranke  $\delta$  alle Waveletkoeffizienten auf Null, die betragsmäßig unterhalb dieser Schranke liegen. Als Funktion  $T_{hard}$  der Inputkoeffizienten  $c$  ist also Hard-Thresholding gegeben durch

$$T_{hard}^\delta(c) := \begin{cases} c & \text{falls } |c| \geq \delta \\ 0 & \text{falls } |c| < \delta. \end{cases}$$

- Das sogenannte *Soft-Thresholding* ist eine Erweiterung des Hard-Thresholding. Unter Benutzung einer vorgegebenen Schranke  $\delta$  werden alle Waveletkoeffizienten auf Null gesetzt, die betragsmäßig unterhalb dieser Schranke liegen. Danach werden alle weiteren Koeffizienten betragsmäßig um den Wert  $\delta$  verringert. (Man bezeichnet diese Vorgehensweise oft auch als *Wavelet Shrinkage*.) Damit ist Soft-Thresholding definiert durch die Funktion

$$T_{soft}^\delta(c) := \begin{cases} \text{sign}(c)(|c| - \delta) & \text{falls } |c| \geq \delta \\ 0 & \text{falls } |c| < \delta. \end{cases}$$

Die beiden Funktionen  $T_{hard}^\delta$  und  $T_{soft}^\delta(c)$  sind in Abbildung 5.3 dargestellt.

### 5.1.3 Wahl der Schranke für Thresholding

Es sei im folgenden  $T = DWT$  eine diskrete Wavelettransformation bezüglich eines fixierten orthogonalen Wavelets (z. B. Daubechies-Wavelets). Gehen wir von einem endlichen digitalen Signal  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  mit  $N = 2^M, M \in \mathbb{N}$ , aus, dann transformiert  $T$  dieses Signal auf den ersten  $M$  Skalen in die Folge  $w := (v^M, w^M, w^{M-1}, \dots, w^1)$  der Länge  $N + \text{Filterlänge}$  von Skalierungs- und Waveletkoeffizienten. Durch eine kleine Modifikation der DWT, auf die wir

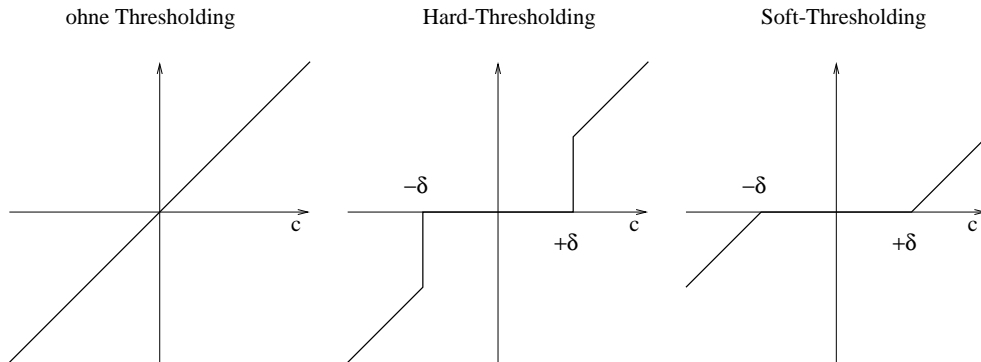


Abbildung 5.3: Hard- und Soft-Thresholding.

hier nicht näher eingehen wollen (Stichwort: Periodisierung oder Spiegelung des Signals, siehe [Strang/Nguyen]), kann erreicht werden, daß man genau  $N$  „modifizierte“ Waveletkoeffizienten erhält und sich  $T$  durch eine orthogonale  $N \times N$ -Matrix  $T_N$  realisieren läßt. Im folgenden bezeichnen wir mit  $w^x = (w_n^x)_{0 \leq n < N}$  die Folge der Waveletkoeffizienten  $w^x := T_N(x)$ .

Wie in Unterabschnitt 5.1.1 benutzen wir wieder das Modell

$$s_n = f_n + \sigma e_n.$$

Dort wurde erklärt, daß das  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilte Rauschsignal  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  unter einer DWT ebenfalls in  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteiltes Rauschen übergeht, d. h. die Waveletkoeffizienten  $w_n^e$  sind ebenfalls unkorrelierte  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariable.

Vergleicht man also den Waveletkoeffizienten  $w_n^s$  des verrauschten Signals  $s$  mit dem Waveletkoeffizienten  $w_n^f$  des Originalsignals, so hat man eine Abweichung von  $\sigma$  im statistischen Sinne zu erwarten, nämlich die Standardabweichung der ZV  $w_n^s - w_n^f = \sigma w_n^e$ . Damit bietet sich in diesem Fall als Schranke  $\delta$  für das Thresholding der Wert  $\delta = \sigma$  an. Man kann zeigen, daß diese Wahl in einem statistischen Sinn (bzgl. des sogenannten *risk measure*) für das mit dem Wert  $\delta = \sigma$  durch Hard-Thresholding gewonnene entrauschte Signal  $f^*$  ein optimales Ergebnis liefert.

Soviel zur Theorie. In der Praxis haben wir eine völlig andere Situation, da weder das Originalsignal  $f$ , noch die Art des Rauschens, noch der Rauschpegel  $\sigma$  gegeben sind. Die einzige Information, die wir zur Verfügung haben, ist das verrauschte Signal  $s$ . Unter der Annahme, daß es sich beim Rauschsignal um  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteiltes weißes Rauschen handelt (schon dies ist eine Idealisierung und meistens auch falsch), muß also der Rauschpegel  $\sigma$  und die Schranke  $\delta$  geeignet geschätzt werden. Dies ist jedoch ein Kapitel für sich, und man benötigt viele Grundlagen über Schätzer aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Wir wollen hier auf die Einzelheiten nicht weiter eingehen. Es haben sich in der Praxis mehrere Verfahren zur Schätzung von  $\delta$  bewährt, die zum Beispiel auch unter MATLAB installiert sind (siehe `thselect`). U.a. sind hier zu nennen:

- Steins Unbiased Estimate of Risk (quadratic loss function). Dies führt

zum sogenannten SURE-Thresholding.

- Minimax-Schätzer.
- Kombinierte Verfahren.

Unter der Voraussetzung, daß uns ein solches Verfahren zur Verfügung steht, wollen wir uns nun dem eigentlichen Algorithmus zuwenden.

#### 5.1.4 Algorithmus zur Rauschunterdrückung

**Gegeben:** Digitales verrauschtes Signal  $s$  mit  $N$  Abtastwerten.

Eventuell Informationen über die Eigenschaften des Originalsignals (zwar ist das Originalsignal unbekannt, trotzdem kann man häufig davon ausgehen, daß es in einer bestimmten Signalklasse liegt, z. B. einen gewissen Glattheitsgrad besitzt.)

**Voraussetzungen:** Dem Rauschanteil liegt eine  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilung zugrunde (Gaußsches weißes Rauschen).

**Parameter:** Wahl des Wavelets für die DWT.

Wahl einer geeigneten Schranke  $\delta$  durch eines der oben beschriebenen Verfahren.

Wahl der Thresholding-Methode (hard oder soft).

Aufgrund der zu erwartenden Eigenschaften des Originalsignals werden die Parameter gewählt, die damit von der konkreten Anwendung abhängen. Der Algorithmus zur Rauschunterdrückung (Denoising) erfolgt in drei Schritten:

- (1) Transformiere das verrauschte Signal  $s$  mit der DWT und erhalte die Waveletkoeffizienten  $(w_n^s)$ .
- (2) Wende Hard- oder Soft-Thresholding mit Schranke  $\delta$  auf die Waveletkoeffizienten an (Signalverarbeitung im DWT-Bereich).
- (3) Rekonstruiere das Signal aus den so modifizierten Waveletkoeffizienten (inverse DWT) und erhalte das entrauschte Signal  $f^*$ .

Der so beschriebene Algorithmus kann z. B. auf folgende Weise in MATLAB implementiert werden. Die folgenden Beispiele im Unterabschnitt 5.1.5 wurden durch ein ähnliches Programm erzeugt.

```

%DWT-based Denoising by Thresholding implemented in MATLAB
clear;
N=1024;                               %number of samples
t=1:N;
wavelet='db8';                         %wavelet
M=floor(log2(N));                      %number of scales
e = randn(1,N);                        %white N(0,1)-distributed noise
sigma = 0.3;                           %noise level sigma
f=sin(50*pi*(t/N)^ 2)                  %original signal, chirp-signal
s=f+sigma*e;                           %noisy signal
thr=thselect(s,'rigrsure');            %threshold

%DWT of s, wavelet coefficients are w
[w,l]=wavedec(s,M,wavelet);

%hard thresholding, modified wavelet coefficients are whard
whard=w;
for k=(l(1)+1):length(whard),
    if abs(whard(k))<=thr whard(k)=0;    end
end

%soft thresholding, modified wavelet coefficients are wsoft
wsoft=whard;
for k=(l(1)+1):length(wsoft),
    if wsoft(k)>>0 wsoft(k)=sign(wsoft(k))*(abs(wsoft(k))-thr);end
end

%reconstruction, denoised signal fhard and fsoft
fhard = wrcoef('a',whard,l,wavelet,0);
fsoft = wrcoef('a',wsoft,l,wavelet,0);

%plot original signal f, noisy signal s and
%denoised signals fhard, fsoft
subplot(4,1,1); plot(t,f); title('original signal f')
subplot(4,1,2); plot(t,s); title('noisy signal s')
subplot(4,1,3); plot(t,fhard); title('denoised signal fhard')
subplot(4,1,4); plot(t,fsoft); title('denoised signal fsoft')

```

Das Ergebnis dieses Programms sieht man in der linken Spalte von Abbildung 5.4.

### 5.1.5 Beispiele zur Rauschunterdrückung

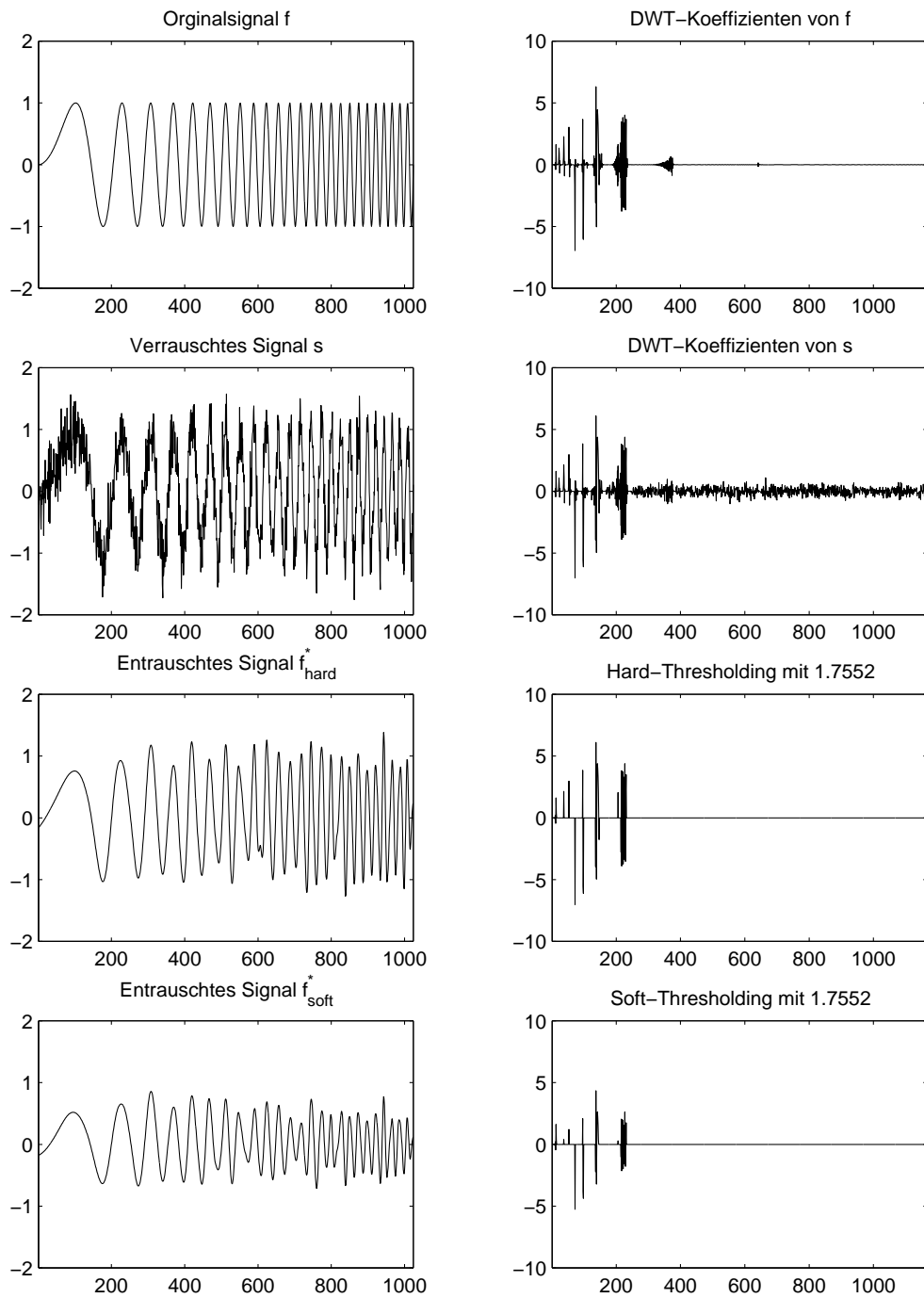
In Abbildung 5.4 ist das Originalsignal  $f$  ein Chirpsignal. Man erkennt in der rechten Spalte, daß die Waveletkoeffizienten bezüglich der DWT mit dem db8-Wavelet in einigen wenigen, dafür aber großen Koeffizienten konzentriert sind. Wie schon oben beschrieben sind dabei in der graphischen Darstellung die Waveletkoeffizienten folgendermaßen organisiert:

$$w := (v^M, w^M, w^{M-1}, \dots, w^1),$$

wobei  $w^m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ , die Folge der Waveletkoeffizienten der  $m$ -ten Skala ist und  $v^M$  die Folge der Skalierungskoeffizienten der  $M$ -ten Skala. Wir erinnern daran, daß die Folge  $w^m$  ungefähr die Länge  $N \cdot 2^{-m}$  hat.

In der DWT des verrauschten Signals  $s$  erkennen wir, daß die Rauschkomponente  $\sigma e$  zusätzliche Waveletkoeffizienten auf allen Skalen liefert. Dabei verhalten sich die  $(e_n)$  wie unkorrelierte  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariable, die Energie der Rauschkomponente ist auf alle Waveletkoeffizienten verteilt, diese sind damit betragsmäßig klein. Nach dem SURE-Verfahren wurde eine Schranke  $\delta$  bestimmt, mit der durch Hard-Thresholding und Soft-Thresholding die Waveletkoeffizienten des verrauschten Signals modifiziert wurden. Man beachte, daß bei der Bestimmung von  $\delta$  weder das Originalsignal, noch der Rauschpegel benutzt wurden, die ja in der Praxis auch nicht gegeben sind. Die aus diesen modifizierten Waveletkoeffizienten rekonstruierten Signale  $f_{hard}^*$  und  $f_{soft}^*$  sind in der dritten bzw. vierten Zeile der Abbildung 5.4 dargestellt.

Die Wahl des Wavelets db8 erfolgte unter folgendem Gesichtspunkt: Unter der Annahme, daß es sich bei dem Originalsignal  $f$  um ein Signal hoher Regularität handelt (glattes Signal), wurde auch ein Wavelet hoher Regularität gewählt, von dem man ausgehen kann, daß es das Originalsignal gut approximieren kann.



$f(t) = \sin(50\pi(t/N)^2)$ ,  $N = 1024$ ,  $M = 10$ ,  $\sigma = 0.3$ , Wavelet = db8

Abbildung 5.4: Denoising eines verrauschten Chirpsignals.

In den Abbildungen 5.5 und 5.6 wurde das Thresholding-Verfahren eines stark verrauschten Signals unter Benutzung zweier verschiedener Wavelets durchgeführt, nämlich dem db16-Wavelet hoher Regularität und dem un stetigen Haar-Wavelet niedriger Regularität.

Das Originalsignal  $f$  besteht aus einem Skyline-artigen linken Teil mit einem Impuls und einer Sinusschwingung im rechten Teil. Wie man in Abbildung 5.6 an der rechten Spalte erkennt, wird der Skyline-artige Teil von  $f$  sehr effizient durch das Haar-Wavelet kodiert und führt zu einigen wenigen, großen Waveletkoeffizienten insbesondere auf den großen Skalen. Die glatte Sinusschwingung des linken Teiles von  $f$  kann jedoch durch die un stetigen Haar-Wavelets nicht gut approximiert werden und dies führt zu vielen kleinen Waveletkoeffizienten verteilt auf allen Skalen. Dieser Sachverhalt wirkt sich bei der Rauschunterdrückung sehr negativ aus. Im verrauschten Signal  $s$  können die kleinen Waveletkoeffizienten des Originalsignals  $f$  Amplituden-mäßig nicht mehr unterschieden werden von den kleinen Waveletkoeffizienten, die durch die Rauschkomponente  $\sigma e$  entstehen. Beim Thresholding werden Amplituden-basiert alle kleinen Waveletkoeffizienten entfernt, und damit in diesem Fall auch die kleinen Waveletkoeffizienten, die in der Sinusschwingung des Originalsignals  $f$  begründet waren. Die Folge ist, daß durch die entrauschten Signale  $f_{hard}^*$  und  $f_{soft}^*$  zwar der linke Skyline-artige Teil des Originalsignals gut rekonstruiert werden konnte, der rechte Sinus-artige Teil jedoch stark verzerrt und zum Teil völlig ausgelöscht wurde. Dies ist also ein Beispiel hierfür, was passieren kann, wenn das für die DWT gewählte Wavelet nicht gut mit den Eigenschaften des Originalsignals  $f$  korrespondiert.

Im Gegensatz zu Abbildung 5.6 wurde in Abbildung 5.5 das db16-Wavelet gewählt, das eine hohe Regularität besitzt, und damit insbesondere den Sinus-artigen Teil von  $f$  effizient in wenigen Waveletkoeffizienten großen Betrages kodiert. In den entrauschten Signalen  $f_{hard}^*$  und  $f_{soft}^*$  erkennen wir, daß trotz des hohen Rauschpegels der Sinus-artige Teil von  $f$  gut rekonstruiert werden konnte. Auch der Skyline-artige Teil von  $f$  kann gut wiedererkannt werden, auch wenn vor allem beim Soft-Thresholding eine „Überglättung“ des Originalsignals stattgefunden hat. Hier ist sogar beim Entrauschen der ursprüngliche Impuls verlorengegangen.

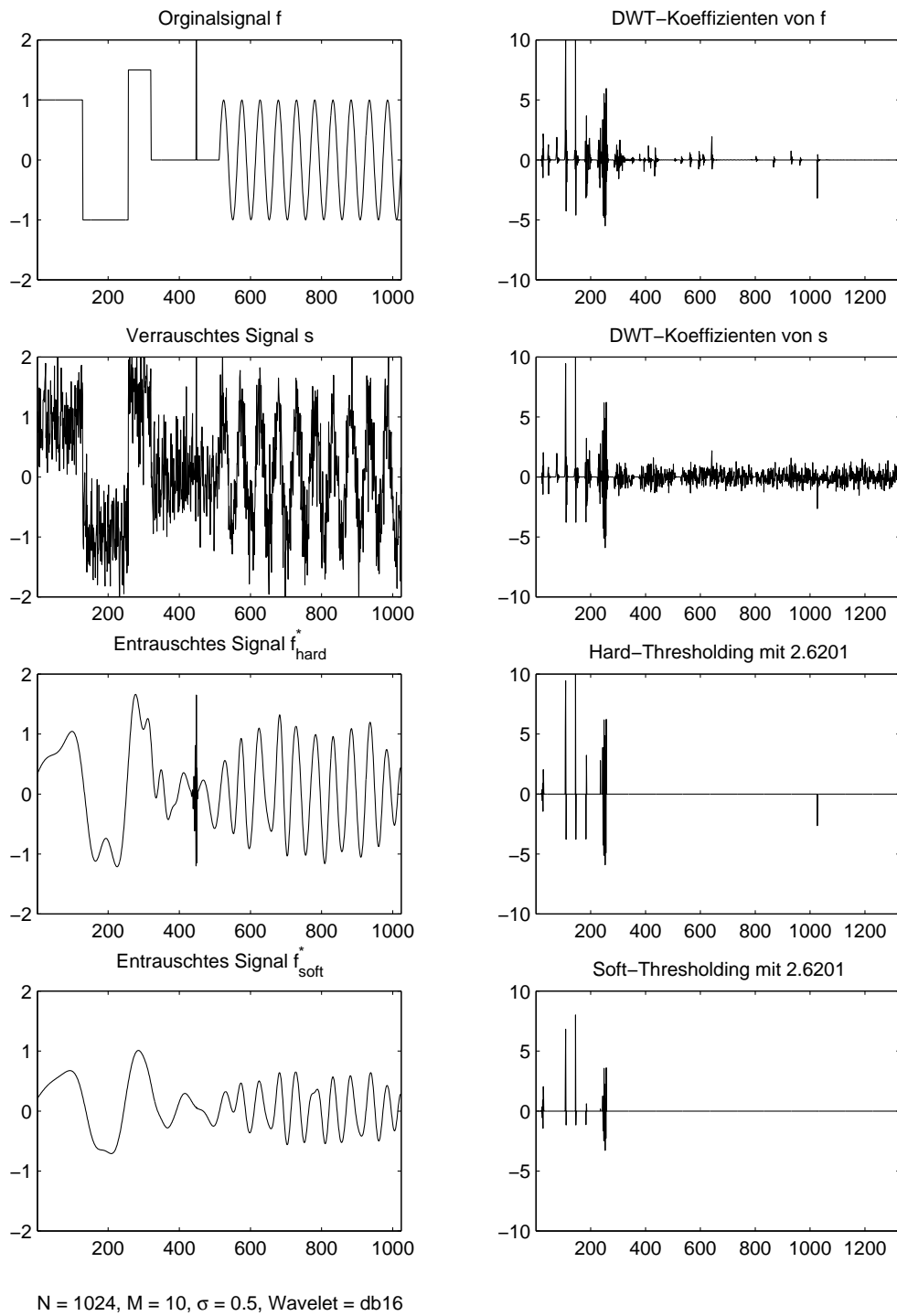


Abbildung 5.5: Denoising mit einem Wavelet hoher Regularität.

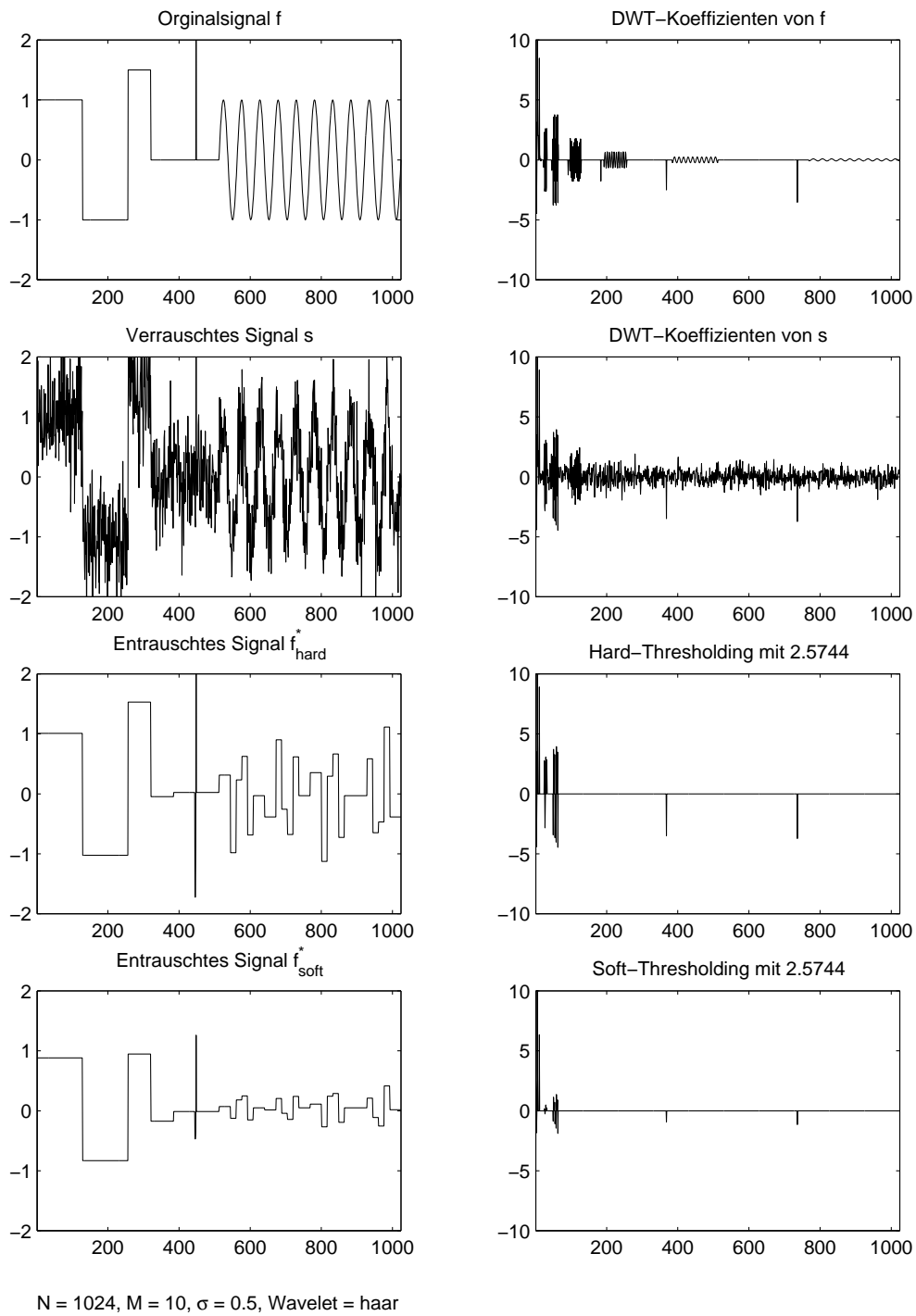


Abbildung 5.6: Denoising mit dem Haar-Wavelet.

### 5.1.6 Probleme und Ausblick

Zuerst wollen wir auf die Unterschiede des Hard- und Soft-Thresholding eingehen. Beim Hard-Thresholding wird zwar Rauschen unterdrückt, jedoch entstehen, besonders im Vergleich zum Soft-Thresholding, viele Artefakte, die das entrauschte Signal stark stören können. Hierzu sind unter anderem kleine Pseudo-Oszillationen und kleine abrupte Störungen zu zählen, die zwar bei einer Fehler- bzw. Risikoabschätzung im  $\ell^2$ -Sinne (Abstand zwischen  $f$  und  $f_{hard}^*$  in der  $\ell^2$ -Norm) kaum einen Rolle spielen, aber sie können dazu beitragen, daß  $f_{hard}^*$  nicht die gewünschten Regularitätseigenschaften hat. Aus diesem Grund benutzt man bei der Rauschunterdrückung oft das Soft-Thresholding. Hierbei geht offensichtlich durch die zusätzliche Schrumpfung aller Waveletkoeffizienten Signalenergie verloren, was sich negativ auf eine  $\ell^2$ -basierte Risikoabschätzung auswirkt, aber das entrauschte Signal  $f_{soft}^*$  liegt mit hoher Wahrscheinlichkeit in derselben Signalklasse wie das Originalsignal  $f$ . Dieses Ergebnis wurde in einem Artikel von [Donoho] bewiesen und kann folgendermaßen zusammengefaßt werden:

- Mit hoher Wahrscheinlichkeit ist  $f_{soft}^*$  mindestens genauso glatt wie das Originalsignal  $f$ , wobei diese Aussage für eine große Klasse von Glattheitsmaßen gilt (denken Sie hierbei zum Beispiel an  $n$ -fache Differenzierbarkeit).
- Der Schätzer  $f_{soft}^*$  erzielt fast den sogenannten mittleren quadratischen Fehler des Minimax-Prinzips für die Risikoabschätzung. Im Sinne der W-Theorie ist dies ein fast optimales Ergebnis und die Risikoabschätzung, wenn auch ungünstiger als beim Hard-Thresholding, hat zumindest dieselbe Größenordnung.

Wie bei traditionellen Verfahren der Rauschunterdrückung (z.B. durch Tiefpaßfilterung) hat man auch bei dem vorgestellten DWT-basierten Thresholding einen „trade-off“ zwischen der Rauschunterdrückung und einer „Überglättung“ des Signals. Je größer die Schranke  $\delta$  für das Thresholding gewählt wird, ein desto besseres Denoising kann man erwarten. Allerdings gehen dabei gleichzeitig Details des Originalsignals  $f$  verloren. In Abbildung 5.5 ist z. B. der Impuls des Originalsignals  $f$  im entrauschten Signal  $f_{soft}^*$  völlig verschwunden.

Abschließend wollen wir noch auf mögliche Verfeinerungen des Algorithmus eingehen. Beim vorgestellten Algorithmus wurde beim Thresholding eine globale Schranke  $\delta$  benutzt, mit der alle Waveletkoeffizienten unabhängig von der Skala modifiziert wurden. Es hat sich für viele Anwendungen als vorteilhaft herausgestellt, ein Skalen-abhängiges Thresholding zur Entrauschung zu verwenden, d. h. für jede Skala  $m$ ,  $1 \leq m \leq M$ , eine gesonderte Schranke  $\delta_m$  zu bestimmen. Diese Vorgehensweise läßt sich unter anderem folgendermaßen begründen:

- In der Praxis handelt es sich beim Störsignal  $e$  nicht um ein  $\mathcal{N}(0,1)$ -verteiltes Gaußsches weißes Rauschen, bei dem sich die Energie auf alle Frequenzen gleichmäßig verteilt, sondern um sogenanntes *gefärbtes Rauschen*, bei dem sich die Energie nur auf bestimmte Frequenzbereiche oder

Frequenzbänder verteilt. Oft kann man davon ausgehen, daß das Rauschen hochfrequent ist, so daß also durch das Rauschen insbesondere die Waveletkoeffizienten der niedrigen Skalen (kleine Details) betroffen sind.

- Das Rauschen wird abhängig vom Frequenzband durch das menschliche Ohr unterschiedlich wahrgenommen. So kann es sein, daß bei einem relativ glatten Originalsignal niederfrequente Rauschkomponenten so gut wie nicht wahrgenommen werden, während höherfrequentes Rauschen trotz geringer Energie als störend empfunden wird.

Insbesondere durch Einbeziehung psychoakustischer Gesichtspunkte hat man in der Praxis große Fortschritte bei Denoising-Verfahren erzielen können. Man sollte das wesentliche Ziel der Rauschunterdrückung nicht aus den Augen verlieren: Ziel ist es **nicht** aus einem verrauschten Signal ein im mathematischen Sinne möglichst schöne oder glatte Funktion zu extrahieren, sondern eine Signal zu erzeugen, das vom menschlichen Ohr (also ein subjektiver Qualitätsmaß) als rauscharm empfunden wird.

## 5.2 DWT-basierte Kompression

Die DWT-basierte Kompression basiert auf derselben Idee wie die DWT-basierte Rauschunterdrückung. Grundlegend ist wieder die Eigenschaft der DWT, daß die Energie und damit die wesentlichen Informationen für eine große Klasse von Signalen in nur wenigen wesentlichen Waveletkoeffizienten enthalten ist. Sei  $f$  das zu komprimierende Signal,  $w^1, w^2, \dots, w^M$  die Folgen der Waveletkoeffizienten auf den ersten  $M$  Skalen und  $v^M$  die Folge der Skalierungskoeffizienten der  $M$ -ten Skala. Das Konzept der Kompression beruht dann auf folgendem Prinzip: Ist das Signal  $f$  hinreichend regulär, dann genügt bei geeigneter Wahl von  $M$  zur guten Approximation von  $f$  eine kleine Anzahl von Skalierungskoeffizienten (Koeffizienten aus der Folge  $v^M$ ) und einige der Waveletkoeffizienten (Koeffizienten aus den Folgen  $w^1, w^2, \dots, w^M$ ), die man auch als Detailkoeffizienten bezeichnen könnte.

Wie der Algorithmus zur Rauschunterdrückung erfolgt der Kompressionsalgorithmus in drei Schritten:

- (1) Transformiere das zu komprimierende Signal  $f$  durch die DWT mit einem geeigneten Wavelet.
- (2) Wende Thresholding auf die Waveletkoeffizienten an (Signalverarbeitung im DWT-Bereich).
- (3) Durch inverse DWT kann aus den so modifizierten Waveletkoeffizienten das komprimierte Signal  $f^c$  rekonstruiert werden.

Unser ursprüngliches Signal  $f$  sei in der Form seiner  $N$  Samplewerte gegeben. Durch die DWT erhalten wir ebenfalls ungefähr dieselbe Anzahl  $N$  an Wavelet- und Skalierungskoeffizienten. Durch Thresholding reduziert sich nun die Anzahl der nicht-trivialen Koeffizienten (also Koeffizienten ungleich Null) ganz enorm. Für das rekonstruierte Signal  $f^c$  reicht es aus, nur diese nicht-trivialen Koeffizienten mit ein paar Seiteninformationen (u. a. Art des Wavelets, Skalen- und Translationsparameter der nicht-trivialen Koeffizienten) zu speichern. Hierin besteht die Kompression.

Der Unterschied des Kompressionsalgorithmus zum Denoising-Algorithmus besteht im Schritt (2). Für die Kompression gibt es u. a. die folgenden zwei Strategien. Die erste besteht darin, die betragsmäßig größten Waveletkoeffizienten im DWT-Bereich auszuwählen und alle anderen Koeffizienten zu vergessen (also auf Null zu setzen). Die Anzahl der verbleibenden Koeffizienten kann dabei auf die folgenden drei Weisen festgelegt werden:

- Wähle eine globale Schranke  $\delta$  und führe damit das Thresholding durch.
- Lege eine Kompressionsrate fest (z. B. 1 : 10) und wähle danach die Koeffizienten aus (also z.B bei der Kompressionsrate von 1 : 10 zehn Prozent der betragsmäßig größten Koeffizienten, d. h. 90% der Koeffizienten werden auf Null gesetzt).

- Wähle eine Genauigkeitsschranke, innerhalb der das komprimierte Signal  $f^c$  relativ zu  $f$  liegen soll, und zwar bezüglich des quadratischen Mittels (d. h. in der  $\ell^2$ -Norm). Die relative „ $\ell^2$ -Performance“ geben wir im folgenden in Prozent an und wird berechnet durch

$$\frac{\|f^c\|}{\|f\|} \cdot 100\%.$$

Mit der Genauigkeitsschranke in Prozent ergibt sich dann eine Bedingung für die Anzahl der notwendigen Koeffizienten.

In allen drei Fällen ist zur Wahl der Koeffizienten nur ein Parameter notwendig (nämlich  $\delta$ , die Kompressionsrate oder Genauigkeitsschranke). Die zweite Strategie besteht darin, Skalen-abhängige Schranken für das Thresholding zu bestimmen, also  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_M$ . Eine solche Strategie ist z. B. die sogenannte *Birgé-Massart-Strategie*, die auf Ergebnissen der „adaptive functional estimation in regression or density contexts“ basiert. Für Einzelheiten verweisen wir auf [Birgé/Massart].

Obwohl dieses Schätzverfahren einen komplizierten theoretischen Hintergrund hat, kann es sehr leicht implementiert werden. Es sei hierzu  $M \geq 2$  die Anzahl der zu berechnenden Skalen mit der DWT und  $m_0, 1 \leq m_0 \leq M$ .  $\ell(w^M)$  bezeichne die Länge der Folge  $w^M$  der Waveletkoeffizienten der größten Auflösung. Weiterhin sei  $\alpha$  eine reelle Zahl größer als 1. Die Zahlen  $m_0, \ell(w^M)$  und  $\alpha$  bestimmen die Strategie:

- Auf den Skalen  $m_0 + 1, \dots, M$  werden die Koeffizienten nicht verändert, also  $\delta_{m_0+1} = \dots = \delta_M = 1$ .
- Für die Skala  $m$  mit  $1 \leq m \leq m_0$  werden die  $k_m$  betragsmäßig größten Waveletkoeffizienten der Folge  $w^m$  behalten, wobei  $k_m$  durch

$$k_m := \frac{\ell(w^M)}{(m_0 + 1 - m)^\alpha}$$

definiert ist.

Bei der Kompression wählt man häufig den Parameter  $\alpha = 1.5$ . Diese Strategie findet auch bei Algorithmen zur Rauschunterdrückung Anwendung, dort häufig mit  $\alpha = 3$ .

Zum Abschluß wollen wir uns die Wirkungsweise der durch Thresholding durchgeführten Kompression an zwei Beispielen veranschaulichen. In Abbildung 5.7 handelt es sich um unser Lieblingsbeispiel, ein Chirpsignal  $f$ . Es wurde unter Benutzung verschiedener globaler Schranken  $\delta$  durch Hard-Thresholding komprimiert. Da unser Originalsignal  $f$  glatt ist, wurde für die DWT das Wavelet *db8* benutzt, das auch eine hohe Regularität besitzt. Bei der Schranke  $\delta = 0.5$  werden 92.5% der Koeffizienten durch Thresholding auf Null gesetzt, was also einer Kompressionsrate von über 1 : 10 entspricht. Dennoch hat man eine

$\ell^2$ -Performance von ungefähr 99%, was wieder die Richtigkeit der Interpretation erhärtet, daß sich die wesentlichen Eigenschaften (im Sinne der Energie) im DWT-Bereich in nur wenigen, dafür aber betragsmäßig großen Wavelet- und Skalierungskoeffizienten niederschlagen. Wie man erwarten sollte, hat eine Erhöhung von  $\delta$  eine bessere Kompressionsrate zur Folge (aber nicht wesentlich), wobei jedoch die  $\ell^2$ -Performance abnimmt.

**Warnung:** Die hervorragende Leistungsfähigkeit (d. h.  $\ell^2$ -Performance) dieses Kompressionsalgorithmus in diesem Beispiel sollte nicht überbewertet werden. Bei unserem Beispiel handelt es sich um ein „synthetisches“ Signal hoher Regularität, deren Kenntnis sowohl bei der Wahl des Wavelets als auch bei der Wahl der Schranke  $\delta$  ausgenutzt wurde. So könnte man z. B. auch eine reine Sinusschwingung bei Kenntnis der Periode mit Hilfe eines einzigen Koeffizienten darstellen (nämlich die Periode bei Benutzung der Sinusfunktion als „analysierende“ Funktion) und damit eine traumhafte Kompressionsrate erzielen. Bei Signalen des „alltäglichen Lebens“, auf die wir die vorgestellten Algorithmen letztendlich anwenden wollen, wird die Wahl geeigneter Parameter für die Algorithmen zu einem großen Problem, und bei einer schlechten Wahl der Parameter funktioniert häufig nichts mehr so, wie es die Theorie besagt hat. Dieses Problem taucht häufig beim Entwurf von Algorithmen auf, bei deren Analyse man immer auf die gleiche Menge von Testdaten zurückgreift. Völlig unbewußt optimiert man die Algorithmen in Hinblick auf die (scheinbar repräsentative) Menge an Testdaten, ohne zu merken, daß die „Verbesserung“ der Testergebnisse in den Eigenschaften der Testdaten und nicht im Algorithmus selbst begründet sind. Bei den praktischen Anwendungen auf „echte Daten“ kommt es dann häufig zu langen Gesichtern. Die Bilder und Beispiele, die in dieser Vorlesung vorgestellt werden, sind also in diesem Sinne auch immer mit Vorsicht zu genießen.

Die Interpretation des in Abbildung 5.8 dargestellten Beispiels ist analog zum vorherigen Beispiel, und wir wollen Ihnen nicht die Freude nehmen, sich selbst daran zu versuchen, die auftretenden Phänomene zu erklären.

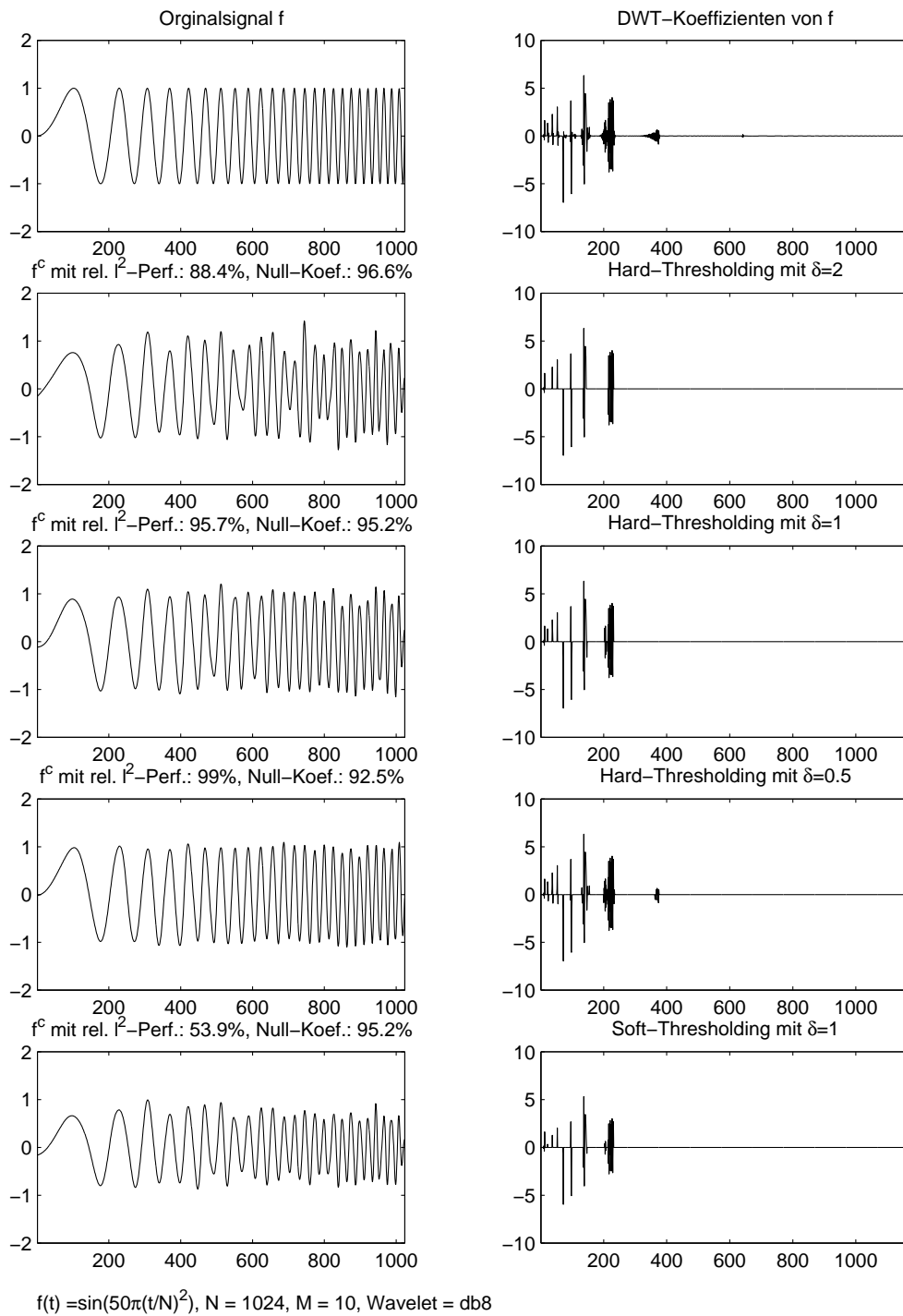


Abbildung 5.7: Kompression des Chirpsignal.

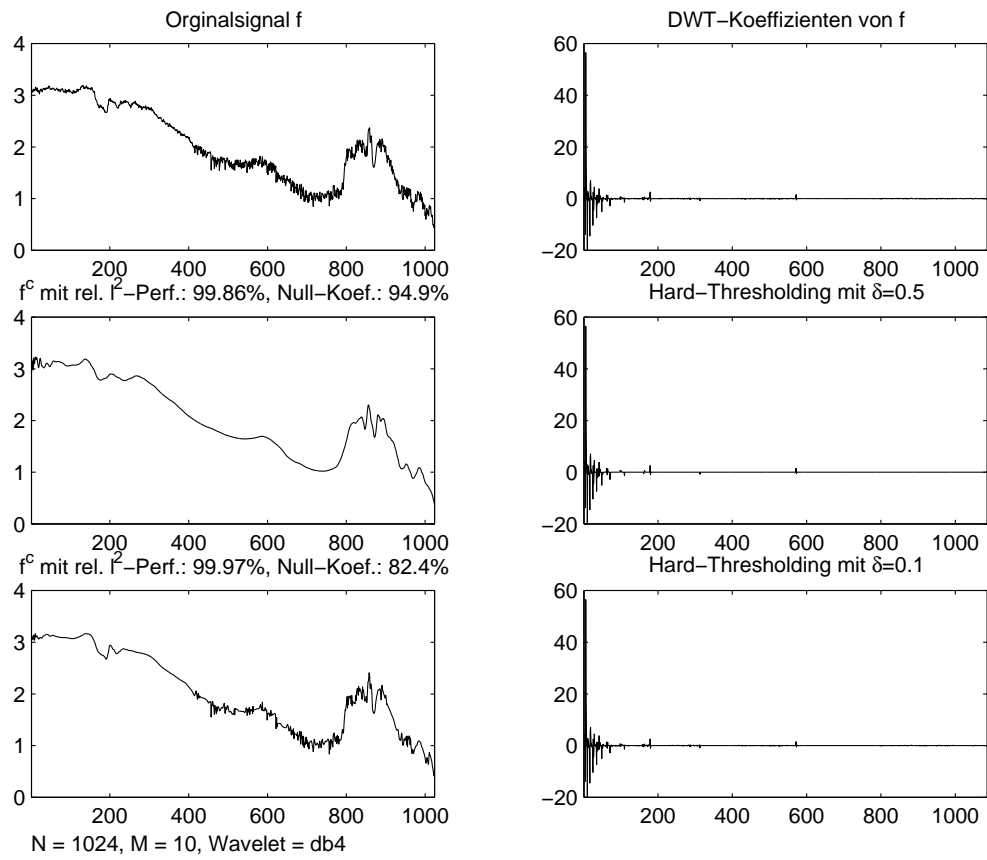


Abbildung 5.8: Kompression eines verrauschten Signals.

### 5.3 DWT-basierte Singularitätserkennung

Wir wollen dieses Kapitel mit ein paar Anwendungen abrunden, bei der die DWT eingesetzt wird, um lokale abrupte Veränderungen des Signals zu erkennen und zu analysieren. Diese Anwendung ist vor allem auch in der Bildverarbeitung wichtig (hier handelt es sich um Signale abhängig von zwei Ortskoordinaten anstelle einer Zeitvariable wie in der Audiosignalverarbeitung), um Ecken und Kanten oder Konturlinien zu erkennen und zu verarbeiten. Der Zweck der DWT-Analyse solcher lokaler Phänomene ist die Bestimmung folgender Daten:

- Die Position der abrupten Veränderung (d. h. Zeitpunkt in der Audiosignalverarbeitung und Position des Ortes in der Bildverarbeitung).
- Der Typ der Veränderung (z. B. Unstetigkeitsstelle, Unregelmäßigkeiten in der ersten oder zweiten Ableitung, abrupte Veränderung der Frequenz, etc.)
- Die Amplitude der Veränderung.

Die lokalen Eigenschaften der Wavelets sind gut dazu geeignet, solche Phänomene zu analysieren. Die folgenden Beispiele sind aus der Wavelet-Demonstration von MATLAB entnommen, und wir verweisen für weitere Einzelheiten darauf. An dieser Stelle wollen wir Sie auch dazu ermutigen, ausgehend von diesen Beispielen die Welt der Wavelets eigenständig zu erforschen. Hierzu bietet das „Wavelet Toolbox Graphical User Interface (GUI)“ von MATLAB eine ideale Plattform, bei der Sie mit minimalen technischen Kenntnissen sehr gut mit Wavelets experimentieren können.

### 5.3.1 Unstetigkeitsstelle im Signal

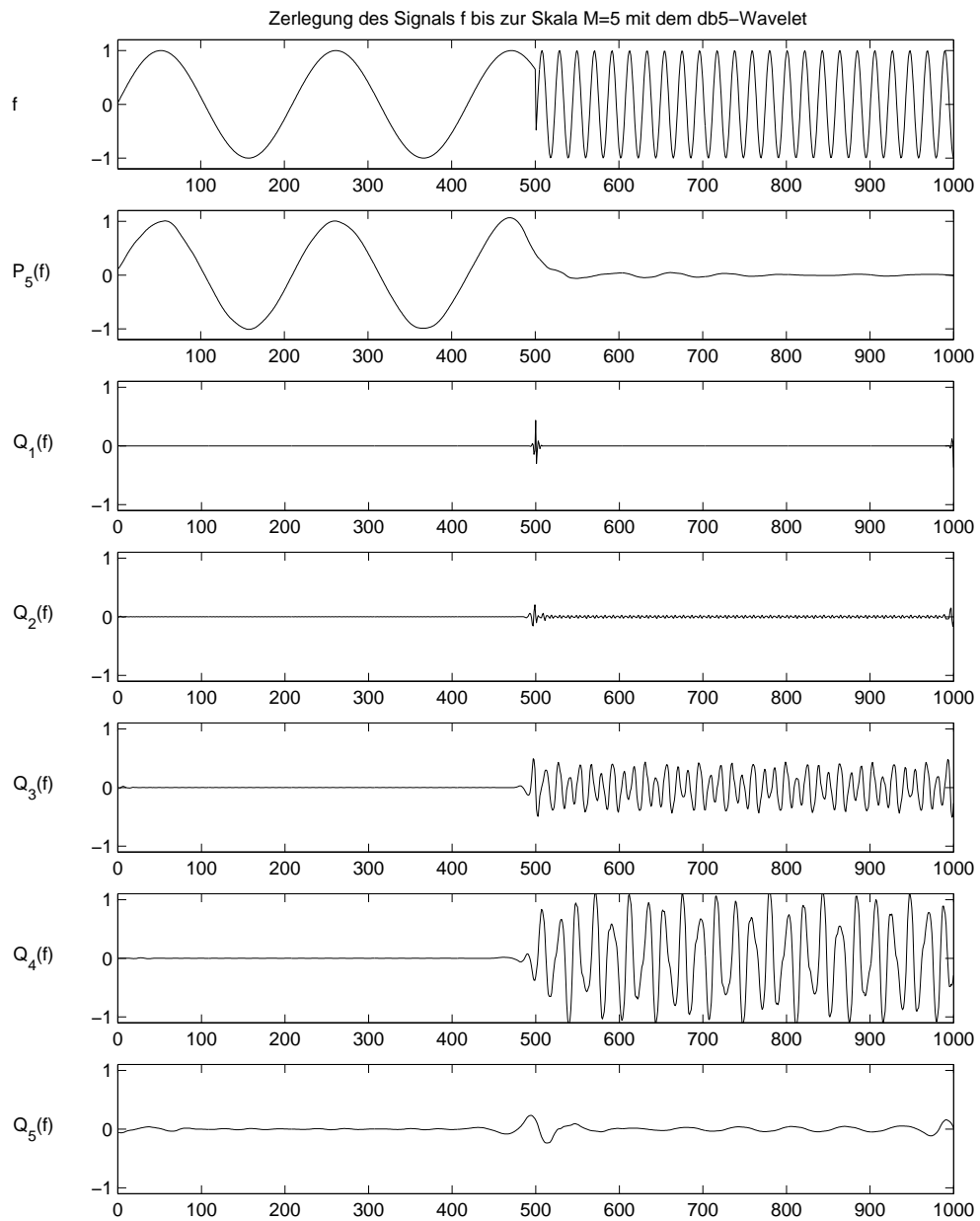


Abbildung 5.9: Unstetigkeitsstellen im Signal.

Das Signal in Abbildung 5.9 besteht aus einer Sinuswungung „niedriger“ Frequenz im linken Teil, gefolgt von einer Sinuswungung „mittlerer“ Frequenz im rechten Teil mit einer Unstetigkeitsstelle bei  $t = 500$ . Die DWT-Analyse mit dem db5-Wavelet zeigt die Unstetigkeitsstellen besonders gut in den Details  $Q_1(f)$  und  $Q_2(f)$ , da abrupte Veränderungen vor allem hochfrequente Anteile liefern. Die Unstetigkeitsstelle wird in den Projektionen sehr genau lokalisiert: nur ein kleiner Bereich um  $t = 500$  enthält große  $Q_1(f)$ - und  $Q_2(f)$ -Details. Hier wird der Vorteil der Waveletanalyse im Vergleich zur Fouriertransformation deutlich. Die Fouriertransformation kann zwar die zwei vorkommenden Frequenzen erkennen, nicht aber den Zeitpunkt, zu dem die Frequenz wechselt (siehe Abbildung 5.10).

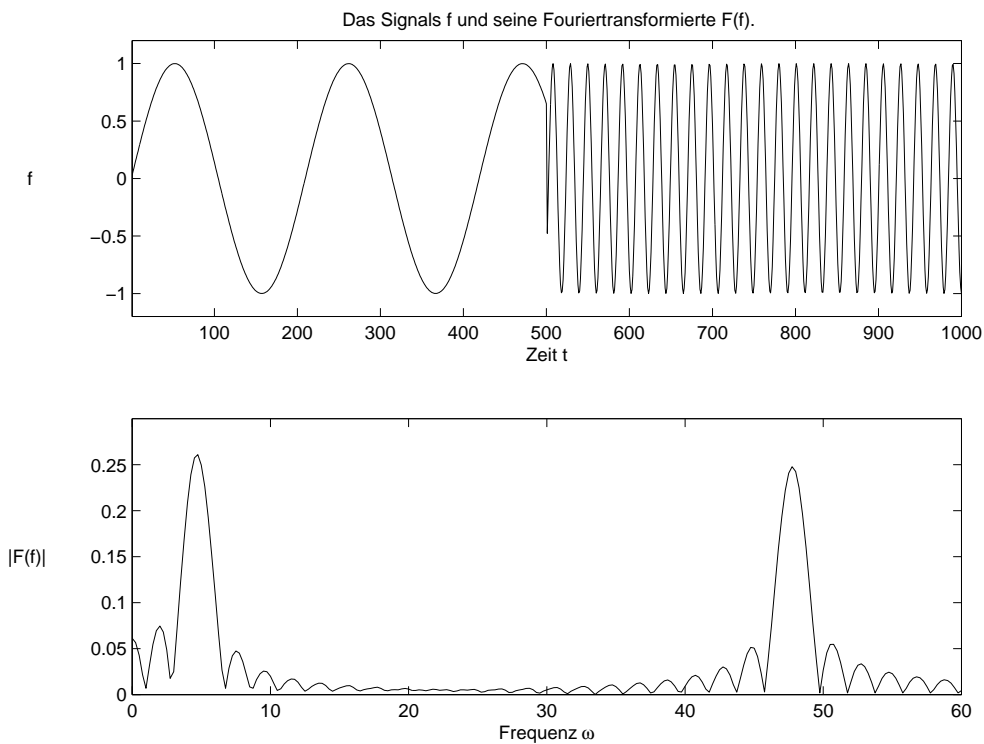


Abbildung 5.10: Die Unstetigkeitsstelle von  $f$  wird durch die Fouriertransformation nicht erkannt.

Die Details  $Q_3(f)$  und  $Q_4(f)$  enthalten die Sinuswungung „mittlerer“ Frequenz. Der „niederfrequente“ Teil von  $f$  ist isoliert in der Projektion  $P_5(f)$ , der durch Filterung der hochfrequenten Anteile von  $f$  entstanden ist.

### 5.3.2 Unstetigkeitsstellen in der Ableitung

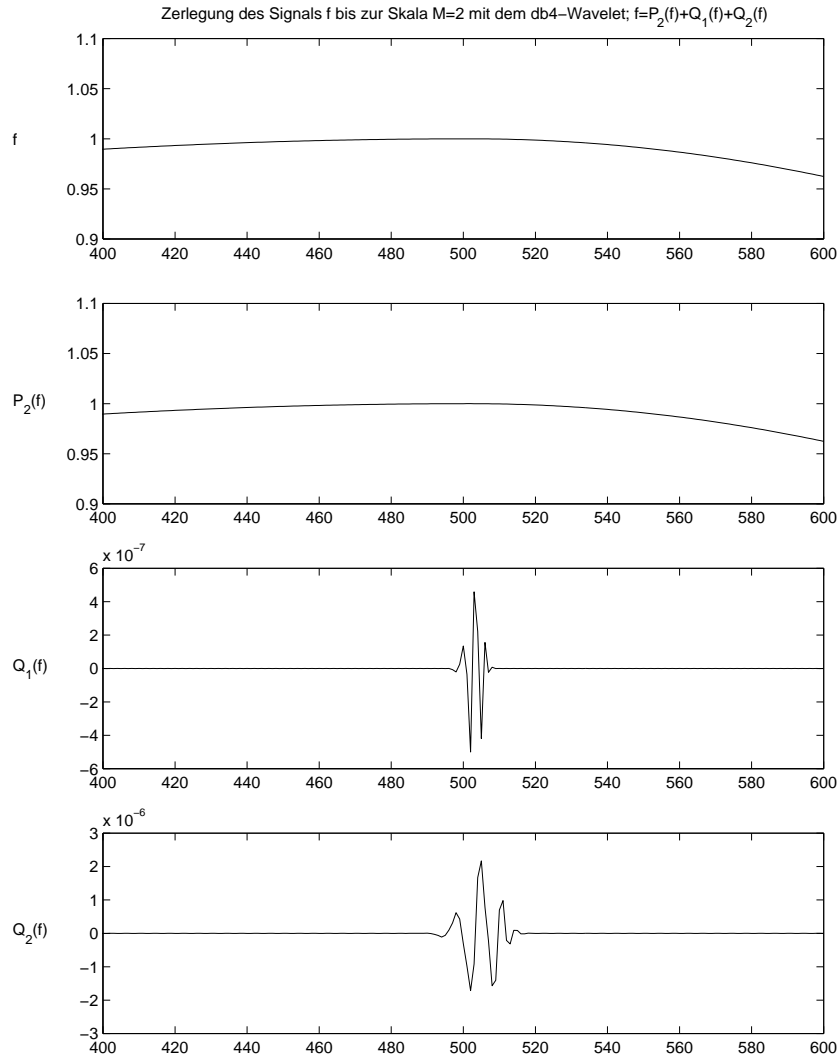


Abbildung 5.11: Signal mit Unstetigkeitsstelle in der zweiten Ableitung.

Das Signal  $f$  in Abbildung 5.11 ist scheinbar eine glatte Kurve. In Wirklichkeit ist es zusammengesetzt aus zwei separaten Exponentialkurven, die im Zeitpunkt  $t = 500$  verbunden sind. Dort hat  $f$  eine Unstetigkeitsstelle in der zweiten Ableitung. Die Details  $Q_1(f)$  und  $Q_2(f)$  sind nur in einer kleinen Umgebung von  $t = 500$  erkennbar von Null verschieden. Dies deutet auf eine Unregelmäßigkeit von  $f$  an dieser Stelle hin.

Regularität ist ein wichtiges Kriterium für die Wahl des Wavelets. In diesem Beispiel wurde das db4-Wavelet gewählt. Hätte man stattdessen das Haar-Wavelet verwendet, wäre diese Unstetigkeit in der zweiten Ableitung nicht erkannt worden. Wir wollen in einem der folgenden Kapitel auf die Regularitätseigenschaften der Wavelets und deren Auswirkungen auf die DWT-Analyse näher eingehen.

### 5.3.3 Entdeckung von Langzeit-Entwicklungen

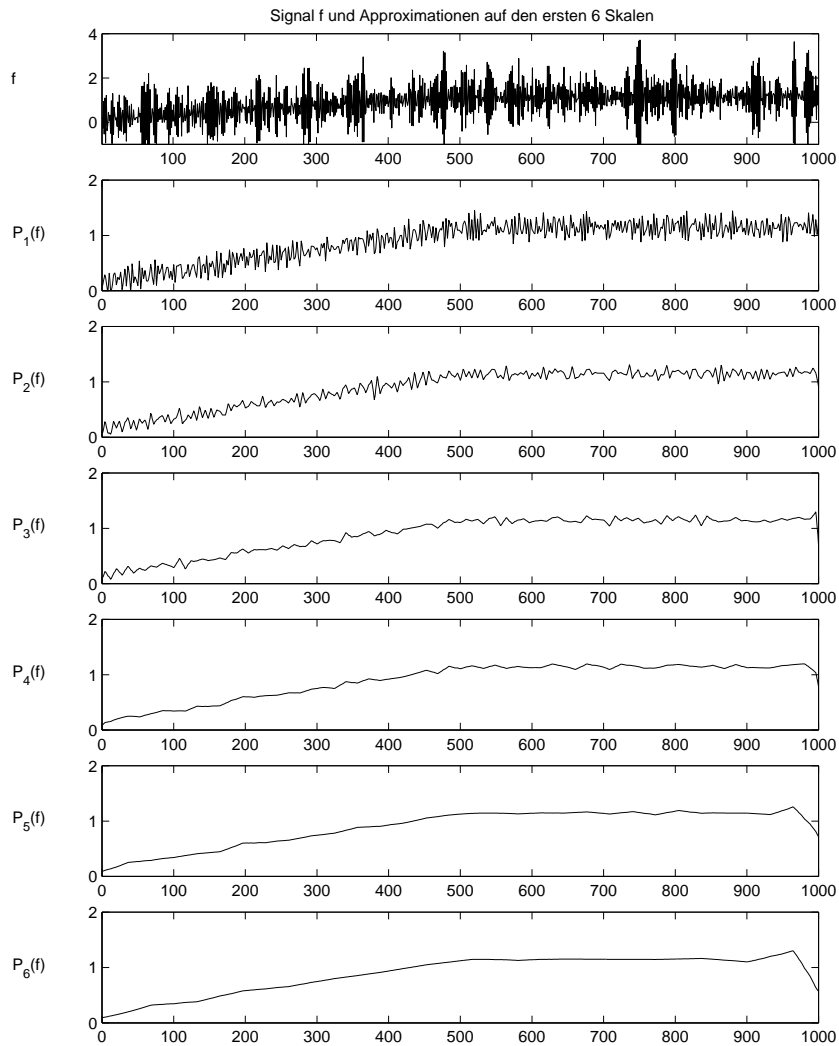


Abbildung 5.12: Entdeckung von Langzeit-Entwicklungen

In Abbildung 5.12 ist ein Signal  $f$  dargestellt, das von „gefärbtem“ Rauschen (Rauschen mit begrenztem Frequenzspektrum) so stark überdeckt wird, daß sein grober Verlauf kaum noch sichtbar ist. Die Tendenz des Signals wird von Stufe zu Stufe der Approximationen  $P_1(f), \dots, P_6(f)$  immer deutlicher erkennbar. Wenn man die DWT in Hinblick auf die Frequenzen interpretiert, so kann man dies auch folgendermaßen ausdrücken: Die sukzessiven Approximationen enthalten immer weniger Informationen über hohe Frequenzen. Werden diese entfernt, bleibt ein grober Verlauf des ursprünglichen Signals, die Langzeit-Entwicklung von  $f$ . Das Abfallen der Kurve am rechten Rand, besonders deutlich bei  $P_6(f)$  zu erkennen, hat übrigens nichts mit dem Originalsignal zu tun, sondern mit dem Auftreten von Fehlern des DWT-Algorithmus an den Rändern von Signalen. Hier kann Abhilfe geschaffen werden durch leichte Modifikation der Algorithmen (Randbehandlung).



## Kapitel 6

# Filterbänke (FB) und perfekte Rekonstruktion (PR)

In diesem Kapitel behandeln wir einige Grundlagen über die Theorie der Filterbänke (FB). Ziel ist es u. a. die schnellen DWT-Algorithmen von Kapitel 4 aus einem anderen Blickwinkel heraus zu verstehen, nämlich aus der Sicht der FB-Theorie. Historisch gesehen ist die FB-Theorie wesentlich älter, als die Wavelettheorie. Erst als die Verbindung der Wavelettheorie zur wesentlich allgemeineren und weiterentwickelten FB-Theorie erkannt wurde (u. a. von S. Mallat 1989 und I. Meyer 1993), kam es zu der explosionsartigen Entwicklung der Wavelettheorie.

Historisch gesehen tauchte der Begriff der Filterbank zuerst in den Ingenieurwissenschaften auf, wo er auf intuitive Weise benutzt wurde und mehr ein allgemeines Konzept, eine Idee bezeichnete. Es ist daher schwierig, eine zufriedenstellende exakte mathematische Definition des Begriffes der „Filterbank“ zu geben, die allen Aspekten dieses Konzeptes gerecht würde und von allen Wissenschaftlern verschiedener Disziplinen gleichermaßen akzeptiert würde. Bei den im folgenden gegebenen „Definitionen“ handelt es sich daher jeweils nur um eine kleine, spezielle Klasse von FBen, die auf unsere Bedürfnisse zugeschnitten sind.

Allgemein könnte man eine Filterbank als Struktur beschreiben, die ein Signal in eine Menge von sogenannten *Subbandsignalen* zerlegt. Abhängig von der konkreten Anwendung liefern die Subbandsignale eine „bessere“ Darstellung des Originalsignals, welche eine bessere Analyse und Verarbeitung zuläßt. Es gibt *lineare* und *nicht-lineare* Filterbänke, je nachdem ob die Subbandsignale linear oder nicht-linear vom Originalsignal abhängen. Filterbänke wurden ursprünglich u. a. im Bereich der Signalkompression verwendet, wo die Subbandsignale *downgesampelt* wurden, um die Datenrate der Subbandsignale im Vergleich zum Originalsignal konstant zu halten. Dies führt auf die sogenannten *Multiraten-Filterbänke*, die für uns von besonderem Interesse sind.

Bevor wir ausführlich auf die für uns relevanten Filterbänke eingehen, wollen wir

eine erste „Definition“ geben. Die Abbildung 6.1 zeigt eine lineare Filterbank, die u. a. im Bereich der Signalkompression („subband coding“) eingesetzt wird. Mit den  $L$  *Analysefiltern*

$$(h_0(n))_{n \in \mathbb{Z}}, \dots, (h_{L-1}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$$

wird das Originalsignal  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  gefiltert und dann mit dem Dezimierungsfaktor  $M$  downgesampelt, so daß man  $L$  Subbandsignale  $y_0, \dots, y_{L-1}$  erhält. Die Rekonstruktion geschieht durch Upsampling der  $L$  Subbandsignale mit dem Expansionsfaktor  $M$ , Filterung mit jeweils einem der  $L$  *Synthesefilter*

$$(f_0(n))_{n \in \mathbb{Z}}, \dots, (f_{L-1}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z}),$$

und anschließender Addition aller so erhaltenen Signale. Das so rekonstruierte Signal bezeichnen wir mit  $\tilde{x}$ . Die so beschriebene Filterbank bezeichnet man auch als *L-Band Multiraten-FB mit Sampling-Faktor M*. Stimmt das rekonstruierte Signal  $\tilde{x}$  mit dem Originalsignal  $x$  überein, dann sprechen wir auch von perfekter Rekonstruktion (PR) des Originalsignals  $x$  aus den Subbandsignalen  $y_0, \dots, y_{L-1}$ . Hat eine Filterbank diese PR-Eigenschaft für alle Signale des Definitionsbereiches, so bezeichnen wir sie im folgenden als PR-FB.

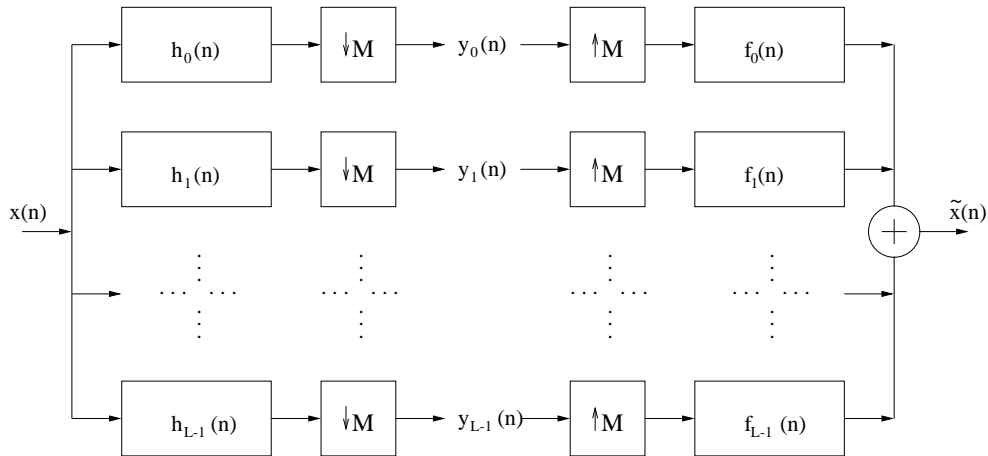


Abbildung 6.1: *L*-Band Multiraten-FB mit Sampling-Faktor  $M$

In diesem Kapitel werden wir nur die oben beschriebenen PR-Filterbänke für die Parameter  $L = M = 2$ , also nur eine sehr kleine, eingeschränkte Klasse von Filterbänken, behandeln. Dennoch werden anhand dieser kleinen Klasse die charakteristischen Eigenschaften auch allgemeinerer Filterbänke gut wiedergegeben. Bevor wir auf die eigentlichen Definitionen eingehen, fassen wir im nächsten Unterabschnitt die benötigten filtertheoretischen Grundlagen zusammen.

## 6.1 Filtertheoretische Grundlagen

Für die Beweise und weitere Ausführungen dieses Abschnittes verweisen wir auf das Skript der ASV1-Vorlesung und die gängige Literatur über Signalverarbeitung.

### 6.1.1 Faltungsfilter

**Definition 6.1.1** *Ein lineares System  $T : \ell^p(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^q(\mathbb{Z})$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$  ist eine lineare Abbildung zwischen den Signalräumen  $\ell^p(\mathbb{Z})$  und  $\ell^q(\mathbb{Z})$ . Der Signalraum  $\ell^p(\mathbb{Z})$  ist zeitinvariant unter Zeitshifts, d. h.  $\forall x \in \ell^p(\mathbb{Z})$  und  $\forall k \in \mathbb{Z}$  gilt:  $x^k \in \ell^p(\mathbb{Z})$ , wobei wir  $x^k(n) := x(n - k)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , setzen.*

- Ein lineares System  $T : \ell^p(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^q(\mathbb{Z})$  heißt LTI-System, falls es zeitinvariant ist, d. h. für alle  $x \in \ell^p(\mathbb{Z})$  und  $k \in \mathbb{Z}$  gilt

$$T[x^k] = T[x]^k.$$

- Ein lineares System  $T : \ell^p(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^p(\mathbb{Z})$  heißt stabil, falls es stetig ist und  $\forall k \in \mathbb{Z} : T[\delta^k] \in \ell^1(\mathbb{Z})$  gilt, wobei  $\delta$  den Einheitsimpuls bezeichnet, der durch  $\delta^k := \delta_{0,k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , definiert ist.

Es gilt nun der folgende fundamentale Satz, der den Zusammenhang von LTI-Systemen und Faltungen herstellt.

**Satz 6.1.2** *Eine System  $T : \ell^p(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^p(\mathbb{Z})$  ist genau dann ein stabiles LTI-System, wenn die Impulsantwort  $h := T[\delta]$  in  $\ell^1(\mathbb{Z})$  liegt. In diesem Fall ist  $T = C_h$  der zu  $h$  gehörige Faltungsoperator (convolution):*

$$C_h[x] = h * x := \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)x(n - k) \right)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

LTI-Systeme  $T = C_h$  dieser Art bezeichnet man auch als *Faltungsfilter* mit *Filterkoeffizienten*  $h = (h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Oft bezeichnet man auch die Filterkoeffizienten  $h$  als Filter und meint damit eigentlich  $C_h$ . Wenn nichts anderes gesagt ist, sei im folgenden ein Filter immer ein Faltungsfilter. Ist  $h$  endlich (d. h. nur endlich viele Filterkoeffizienten sind von Null verschieden), so spricht man von einem FIR-Filter (finite impuls response), ansonsten von einem IIR-Filter (infinite impuls response). Das Filter  $h$  heißt *kausal*, wenn  $h(n) = 0$  für  $n < 0$  gilt.

Die Einheitsimpulse  $\delta^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , könnte man als die Baublöcke von diskreten Signalen bezeichnen, denn ein Signal  $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  läßt sich darstellen als

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta^n.$$

In ähnlicher Weise könnte man die Zeitshifts  $\tau^k, k \in \mathbb{Z}$ , definiert durch ihre Impulsantwort  $\delta^k$  als Baublöcke der Faltungfilter bezeichnen, denn das Filter zu  $h = (h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  läßt sich darstellen als

$$C_h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) \tau^k.$$

Oft wird  $\tau$  auch als *Delay* und  $\tau^{-1}$  als *Advance* bezeichnet.

Abschließend geben wir noch drei Beispiele für lineare, stetige Systeme, die **nicht** zeitinvariant und damit keine Faltungfilter sind. Dies sind der Dezimierer  $\downarrow M$  und der Expandierer  $\uparrow M$  für  $M \in \mathbb{N}$ , auf die wir im nächsten Abschnitt ausführlich eingehen werden, und die Modulation  $E_\omega$  definiert durch

$$E_\omega[x](n) := e^{-2\pi i \omega n} \cdot x(n).$$

### 6.1.2 Darstellungsbereiche für Filter

Wie wir im letzten Unterabschnitt gesehen haben, definiert eine Folge  $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$  das Faltungfilter  $T = C_h : \ell^p(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^p(\mathbb{Z})$ . Dabei wird ein Signal  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$ , wobei wir den Parameter  $n$  (in der digitalen Audiosignalverarbeitung) als Zeitparameter interpretieren, mit  $h$  gefaltet. Wir sagen, daß das Filter  $T$  im *Zeitbereich* durch  $h$  dargestellt ist.

Eine weitere Zeitbereichsdarstellung von  $T$  ist die *Matrixform*, die durch eine unendliche  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -Matrix  $(h_{l,k})_{l,k \in \mathbb{Z}}$  mit Einträgen  $h_{l,k} := T[\delta^k](l)$  gegeben ist. Da das Faltungfilter  $T = C_h$  zeitinvariant ist, folgt

$$h_{l,k} = h_{l-k,0} = h(l-k),$$

also liegt eine sogenannte *Toeplitz-Matrix* (Matrix mit identischen Diagonaleinträgen) vor:

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \cdots & h(1) & h(0) & h(-1) & h(-2) & h(-3) & \cdots \\ \cdots & h(2) & h(1) & \mathbf{h(0)} & h(-1) & h(-2) & \cdots \\ \cdots & h(3) & h(2) & h(1) & h(0) & h(-1) & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Als Konvention schreiben wir bei  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -Matrizen das Element der 0-ten Zeile und 0-ten Spalte im Fettdruck. Wir verwenden im folgenden für diese Matrix auch abkürzend die Schreibweise

$$T(\dots, h(2), h(1); h(0); h(-1), h(-2), \dots),$$

in der der Eintrag  $h(0)$  der Hauptdiagonalen durch Semikolons gekennzeichnet ist. Als Verallgemeinerung lassen wir für die Einträge einer Toeplitz-Matrix wiederum Matrizen zu, die alle dasselbe Rechteckformat haben müssen. Dies führt auf die sogenannten *Block-Toeplitz-Matrizen*. Zum Beispiel bezeichnet

$$T\left(\dots, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \dots\right), \quad (6.2)$$

die Block-Toeplitz-Matrix

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -2 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -2 & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & \mathbf{0} & 0 & -1 & -1 & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & \cdot \\ \cdot & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Nach Konvention steht dabei das Element der 0-ten Zeile und 0-ten Spalte der  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -Matrix in einer Darstellung wie in (6.2) in der Matrix des 0-ten Blocks links oben. Mit dieser Konvention gilt der folgende Sachverhalt. Es sei

$$A = T(\dots, A_2, A_1; A_0; A_{-1}, A_{-2}, \dots)$$

eine Block-Toeplitz-Matrix, dann ist die transponierte Matrix  $A^T$  wieder eine Block-Toeplitz-Matrix. Genauer gilt

$$A^T = T(\dots, A_{-2}^T, A_{-1}^T; A_0^T; A_1^T, A_2^T, \dots).$$

Analog zu der Darstellung von Toeplitz-Matrizen kennzeichnen wir bei der Folge der Filterkoeffizienten das nullte Element durch Semikolons und schreiben im Falle von FIR-Filtern oft nur die Filterkoeffizienten des Trägers, also z. B.

$$h = (h(-2), h(-1); h(0); h(1), h(2)) = (1, 2; 3; 4, 5)$$

für den FIR-Filter  $H(z) = 1z^2 + 2z + 3 + 4z^{-1} + 5z^{-2}$ . Der Träger eines FIR-Filters  $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$  ist durch  $(h(M), h(M+1), \dots, h(N))$ ,  $M \leq N$ , definiert, falls  $h(M) \neq 0 \neq h(N)$  und  $h(j) = 0$  für alle  $j < M$  und  $j > N$  gilt. Die Trägerlänge ist dann  $N - M + 1$ .

Die Fouriertransformierte oder Frequenzantwort  $H$  der Folge  $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$  ist durch

$$H(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) e^{-2\pi i k \omega}$$

definiert. Man spricht dann von der Darstellung des Filters  $T$  im *Frequenzbereich* oder  $\omega$ -Bereich durch  $H$ . Die Faltung  $y = h * x$  geht durch die Fouriertransformation (also im  $\omega$ -Bereich) in punktweise Multiplikation über, d. h.

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega).$$

Wir nehmen dabei an, daß die Fouriertransformierten  $X$  bzw.  $Y$  von  $x$  bzw.  $y$  existieren (dies gilt für  $x, y \in \ell^1(\mathbb{Z})$ , also insbesondere für endliche Signale). Wir erinnern daran, daß die Fouriertransformierte  $H$  eine 1-periodische Funktion in  $\omega$  ist. Bei reellen Filterkoeffizienten  $h_n$  ist der sogenannte *Amplitudengang*  $\omega \mapsto |H(\omega)|$  eine gerade Funktion ( $H(\omega) = H(-\omega)$ ), so daß eine Darstellung im Bereich  $[0, \frac{1}{2}]$  ausreicht. In Abbildung 6.2 ist der Amplitudengang eines idealen Tiefpaß-, Hochpaß- und Bandpaßfilters dargestellt.

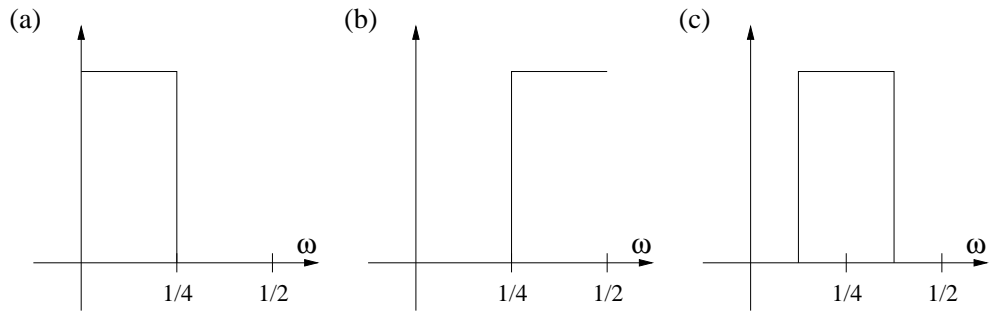


Abbildung 6.2: Amplitudengang eines idealen (a) Tiefpaß-, (b) Hochpaß- und (c) Bandpaßfilters.

Betrachtet man anstelle der Fouriertransformierten die  $z$ -Transformation

$$H(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) z^{-k}$$

von  $h$ , so erhält man die Darstellung des Filters  $T$  im  $z$ -Bereich. Wie bei der Darstellung im  $\omega$ -Bereich, die man durch  $z = e^{2\pi i \omega}$  aus der Darstellung im  $z$ -Bereich gewinnt, geht Faltung in komponentenweise Multiplikation über

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z).$$

Dabei gilt die Gleichung für alle  $z$  aus dem Schnitt der Definitionsbereiche der  $z$ -Transformierten  $X$ ,  $Y$  und  $H$ .

Zur Illustration geben wir die Darstellungen des Shifts oder Delays  $\tau$  in den verschiedenen Bereichen an. Die Impulsantwort  $\tau[\delta]$  ist die Folge der Filterkoeffizienten  $h = (h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  bestehend aus Nullen außer  $h(1) = 1$ . Daher ist in Matrixschreibweise  $\tau$  gegeben durch die Toeplitzmatrix  $T(\dots, 0; 0; 1, 0, \dots)$ , also eine Matrix bestehend aus lauter Nullen bis auf die untere Nebendiagonale, auf der Einsen stehen. Im  $\omega$ - bzw.  $z$  Bereich erhält man als Darstellung von  $\tau$  die Funktionen  $\omega \mapsto e^{-2\pi i \omega}$  bzw.  $z \mapsto z^{-1}$ .

Im folgenden identifizieren wir die verschiedenen Darstellungen mit ihrem Filter, so daß wir vom Filter  $h$ , dem Filter  $\omega \mapsto H(\omega)$  oder dem Filter  $z \mapsto H(z)$  sprechen und in allen Fällen damit das Filter  $T$  meinen. In diesem Sinne bezeichnet also z. B.  $z^{-1}$  den Delay.

### 6.1.3 Down- und Upsampling

Wie wir schon in der ersten Definition (siehe Abbildung 6.1) gesehen haben, spielen der Dezimierer ( $\downarrow M$ ) und der Expandierer ( $\uparrow M$ ) eine zentrale Rolle in der Theorie der Multiraten-Filterbänke. Mit dem Wort „Multirate“ ist gemeint, daß eben diese Operatoren in dem durch die FB definierten System vorkommen, und damit die Subband-Signale eine vom Originalsignal verschiedene Abtastrate haben. Wir fassen die Definition und die wesentlichen Eigenschaften von ( $\downarrow M$ ) und ( $\uparrow M$ ) zusammen.

**Definition 6.1.3** Der  $M$ -Dezimierer oder Downsampler ist definiert durch

$$(\downarrow M)[x](n) := x(M \cdot n).$$

Dieser Operator nimmt also vom Signal  $x$  nur jeden  $M$ -ten Wert. Der  $M$ -Expandierer oder Upsampler ist definiert durch

$$(\uparrow M)[x](n) = \begin{cases} x(n/M), & \text{falls } M|n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein Expandierer spreizt also das Signal  $x$  und fügt zwischen zwei ursprünglich benachbarten Zeitpunkten  $M - 1$  zusätzliche Zeitpunkte ein, an denen das Ausgangssignal den Wert 0 hat.

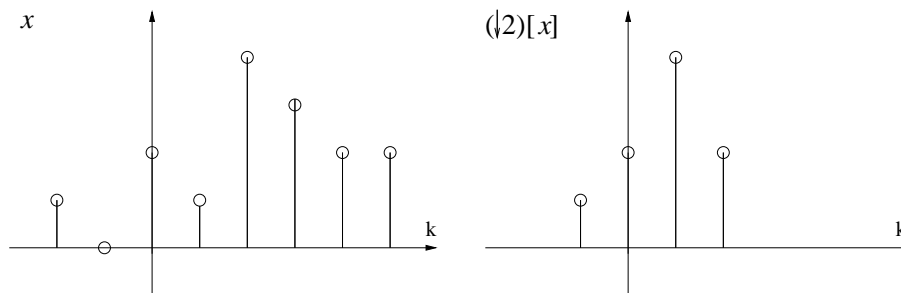


Abbildung 6.3: Downsampling im Zeitbereich

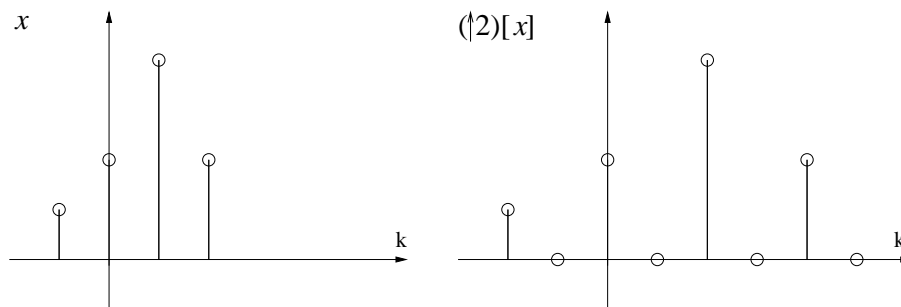


Abbildung 6.4: Upsampling im Zeitbereich

Für eine Illustration dieser Definition verweisen wir auf die Abbildungen 6.3 und 6.4. Der  $M$ -Dezimierer  $\downarrow M$  zerstört Informationen. Es gilt zwar  $(\downarrow M)(\uparrow M) = I$ , aber  $(\uparrow M)(\downarrow M) \neq I$ . Beide Operatoren sind lineare und stetige Systeme, aber nicht zeitinvariant. Wir wollen nun für den für uns relevanten Fall  $M = 2$  sehen, wie sich Down- und Upsampling in den verschiedenen Bereichen auswirken.

- Die Operatoren  $(\downarrow 2)$  und  $(\uparrow 2)$  sind zwar nicht zeitinvariant, sie lassen sich dennoch durch Matrizen darstellen. Diese Matrizen sind aber keine normalen Toeplitz-Matrizen, sondern nur noch Block-Toeplitz-Matrizen! Die



Durch Downsampling mit  $(\downarrow 2)$  geht die Hälfte aller Daten und damit i. a. Information verloren. Den Effekt im  $\omega$ -Bereich bezeichnet man als *Aliasing* und besteht in einer Mittelung von Frequenzkomponenten. Die Gleichung (6.6) besagt, daß die Frequenzkomponenten für  $\frac{\omega}{2}$  und  $\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}$  des Signals  $x$  für das 2-dezimierte Signal  $v$  zusammenfallen (siehe Abbildung 6.5).

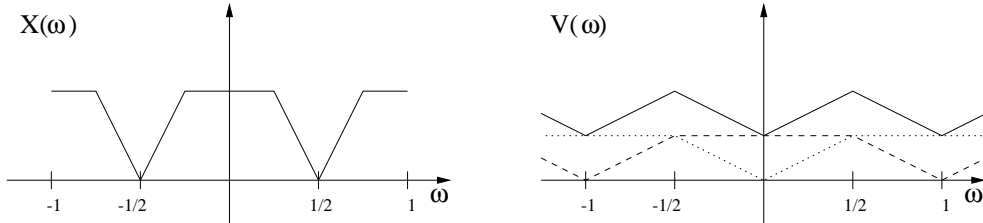


Abbildung 6.5: Downsampling im Frequenzbereich.

Beim Upsampling mit  $(\uparrow 2)$  tritt der gegenteilige Effekt auf, der auch als *Imaging* bezeichnet wird. Hier ist die Frequenzkomponente zu  $\omega$  des Originalsignals  $x$  verantwortlich für zwei Frequenzkomponenten bei  $\frac{\omega}{2}$  und  $\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}$  des 2-expandierten Signals  $u$ . Die Gleichung (6.5) besagt, daß das Frequenzspektrum um dem Faktor 2 gestaucht wird (siehe Abbildung 6.6).

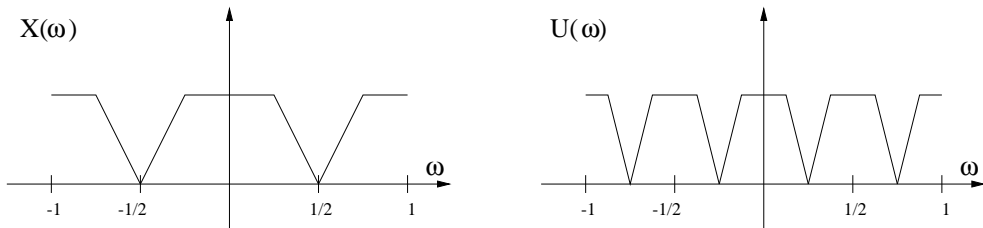


Abbildung 6.6: Upsampling im Frequenzbereich

**Bemerkung 6.1.4** Im allgemeinen kann das Originalsignal  $x$  wegen des Aliasing-Effektes nicht aus dem downgesampelten Signal  $v = (\downarrow 2)[x]$  rekonstruiert werden. Falls das Signal  $x$  jedoch durch  $\Omega = \frac{1}{4}$  bandbeschränkt ist, also

$$X(\omega) = 0 \quad \text{für} \quad \frac{1}{4} \leq |\omega| \leq \frac{1}{2}$$

gilt, dann gibt es kein Aliasing und  $x$  kann aus  $v$  folgendermaßen zurückgewonnen werden: Durch  $(\uparrow 2)$ -Upsampling erhält man das Signal  $w := (\uparrow 2)v$  mit Fouriertransformierter

$$W(\omega) = \frac{1}{2}(X(\omega) + X(\omega + \frac{1}{2})). \quad (6.7)$$

Schneidet man von  $W$  im  $\omega$ -Bereich die durch den Imaging-Effekt entstandenen Frequenzen außerhalb des Frequenzbandes  $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$  ab und multipliziert das Ergebnis mit dem Faktor 2, dann erhält man das ursprüngliche Signal  $X$  (siehe Abbildung 6.7). Im Zeitbereich entspricht dies einer Interpolation für die ungeraden Folgenglieder von  $w$  (an diesen Stellen ist  $w$  Null!), so daß man in

diesem Zusammenhang auch von einem Interpolationsfilter spricht, der aus  $w$  das bandbeschränkte Signal  $x$  rekonstruiert. Der mathematische Hintergrund für diesen Sachverhalt ist das Abtasttheorem von Shannon. Für eine ausführliche Diskussion verweisen wir auf Kapitel 3 des Buches von [Strang/Nguyen].

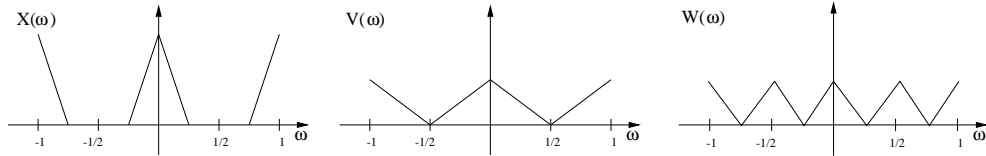


Abbildung 6.7: Kein Aliasing für bandbeschränktes  $x$ .

In den von uns untersuchten Filterbänken werden der Dezimierer ( $\downarrow M$ ) und Expandierer ( $\uparrow M$ ) mit Faltungsfilttern verkettet (siehe Abbildung 6.1). Dabei ist es sehr ineffizient, ein Signal  $x$  zuerst mit einem Filter  $h$  zu falten, um es dann mit ( $\downarrow M$ ) zu dezimieren, da dann nur jeder  $M$ -te berechnete Wert der Faltung  $h * x$  tatsächlich benötigt wird. Besser wäre es, zuerst zu dezimieren und dann zu falten. Das Problem dabei ist, daß der Faltungoperator und der ( $\downarrow M$ )-Dezimierer nicht kommutieren. Der folgenden Satz liefert uns die Grundlage dafür, in welchen Fällen man dennoch die Operatoren vertauschen darf.

Ähnlich ist die Situation beim Expandierer ( $\uparrow M$ ). Hier ist es ineffizient, ein Signal  $x$  zuerst mit ( $\uparrow M$ ) aufzublähern, bevor es dann mit einem Faltungsfiltter weiterverarbeitet wird.

**Satz 6.1.5** *Es sei  $(g(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  ein Filter mit  $z$ -Transformierter  $G$ . Dann gelten die zwei sogenannten Noble-Identitäten, die im folgenden im  $z$ -Bereich formuliert sind:*

$$G(z)(\downarrow M) = (\downarrow M)G(z^M), \quad (6.8)$$

$$(\uparrow M)G(z) = G(z^M)(\uparrow M). \quad (6.9)$$

**Beweis:** Wir beweisen die 1. Noble-Identität (6.8) im Zeitbereich. Die Filterkoeffizienten des Filters  $G(z^M)$  erhält man aus  $g$  durch Spreizen, indem man zwischen je zwei Koeffizienten von  $g$  jeweils  $M - 1$  Nullen hinzufügt. Die so erhaltene Folge von Filterkoeffizienten bezeichnen wir mit  $g^M$ . Dann gilt für ein beliebiges Signal  $x$ :

$$\begin{aligned} (C_g)(\downarrow M)[x] &= g * x(M \cdot) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k)x(M \cdot - Mk) \\ &= (\downarrow M) \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(\cdot - Mk)g(k) \right] \\ &= (\downarrow M)[C_{g^M}[x]]. \end{aligned}$$

Dies beweist (6.8). Analog beweist man (6.9). □

Falls also  $h$  ein Filter der Form

$$H(z) = G(z^M) \quad (6.10)$$

ist, so kann man  $(\downarrow M)H(z)$  berechnen durch  $G(z)(\downarrow M)$ , was wesentlich effizienter ist. Um auch im allgemeinen Fall diese Vertauschung vornehmen zu können, zerlegt man das Filter  $h$  in geeignete Teilfilter mit Eigenschaft (6.10). Dies führt auf die sogenannte *Polyphasen-Zerlegung* des Filters  $h$ , auf die wir in einem späteren Abschnitt eingehen. Analoges gilt natürlich auch für die Vertauschbarkeit mit  $(\uparrow M)$ .

## 6.2 2-Band Filterbänke und PR-Bedingung

Wir betrachten nun die in Abbildung 6.1 dargestellte  $L$ -Band Multiraten-FB mit Sampling-Faktor  $M$  für den Fall  $M = L = 2$ , und präzisieren hierfür die Definition.

**Definition 6.2.1** *Nach unserer Konvention bezeichnen wir im folgenden den Faltungsfiler  $T = C_h$  auch einfach mit  $h$  oder  $H$ .*

- (i) *Eine 2-Band Multiraten-Analyse-FB besteht aus zwei Faltungsfiltern bezeichnet mit  $h_0, h_1 \in \ell^1(\mathbb{Z})$  und dem 2-Dezimierer  $(\downarrow 2)$ . Die Anwendung der Analyse-FB auf ein Inputsignal  $x \in \ell^p(\mathbb{Z})$  bedeutet Filterung von  $x$  mit  $h_0$  und  $h_1$  und anschließendem Downsampling mit  $(\downarrow 2)$ . Als Output erhält man zwei Subbandsignale  $y_0, y_1 \in \ell^p(\mathbb{Z})$ .*
- (ii) *Eine 2-Band Multiraten-Synthese-FB besteht aus zwei Faltungsfiltern bezeichnet mit  $f_0, f_1 \in \ell^1(\mathbb{Z})$  und dem 2-Expandierer  $(\uparrow 2)$ . Die Anwendung der Synthese-FB auf zwei Subbandsignale  $\tilde{y}_0, \tilde{y}_1 \in \ell^p(\mathbb{Z})$  bedeutet jeweiliges Upsampling mit  $(\uparrow 2)$ , Filterung mit  $f_0$  bzw.  $f_1$  und Addition der beiden so erhaltenen Signale. Als Output erhält man ein Signal  $\tilde{x} \in \ell^p(\mathbb{Z})$ .*
- (iii) *Eine 2-Band Multiraten-FB besteht aus einer wie in (i) definierten 2-Band Multiraten-Analyse-FB und einer wie in (ii) definierten 2-Band Multiraten-Synthese-FB, wobei wir diese im folgenden einfach als Synthesebank bzw. Analysebank der FB bezeichnen. Im folgenden sprechen wir auch abkürzend von einer 2-Band FB zu  $(h_0, h_1, f_0, f_1) \in \ell^1(\mathbb{Z})^4$ .*

In Abbildung 6.8 ist eine 2-Band Multiraten-FB dargestellt. Dabei ist typischer Weise  $h_0$  ein Tiefpaß- und  $h_1$  ein Hochpaßfilter. Wie schon in der Einleitung von Kapitel 5 beschrieben, findet die eigentliche Signalverarbeitung auf den Subbandsignalen statt, also zwischen Analyse- und Synthesebank. Die Synthesebank sollte daher die Rücktransformation, also die Inverse zur Analysebank sein. Werden also die Subbandsignale  $y_0$  und  $y_1$ , die durch Anwendung der Analysebank auf ein Signal  $x$  erhalten wurden, als Inputsignale für die Synthesebank verwendet, so sollte man als Output das Originalsignal zurückerhalten,

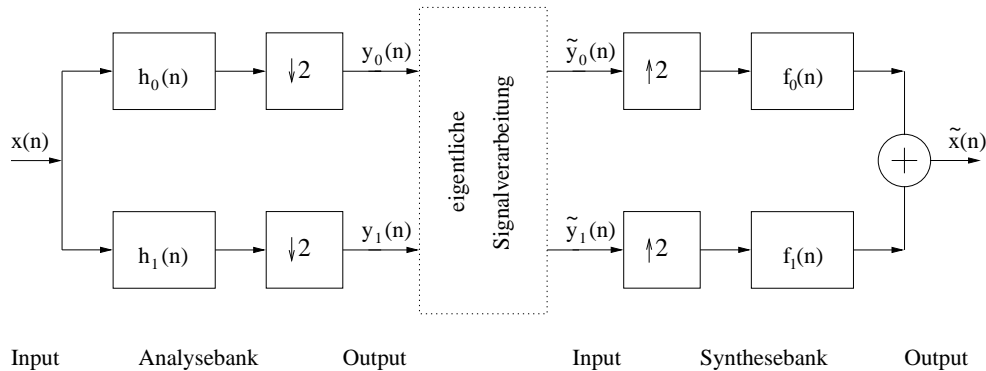


Abbildung 6.8: 2-Band Multiraten-FB.

also  $\tilde{x} = x$ . In diesem Fall sagt man, die FB besitze die *PR-Eigenschaft*, auf die wir im nächsten Unterabschnitt eingehen werden.

**Bemerkung 6.2.2** Wir wollen noch einmal kurz erläutern, weshalb die 2-Dezimierer ( $\downarrow 2$ ) eine wichtige Rolle in der Theorie der 2-Band FB spielen. Wir gehen dabei von FIR Filtern  $h_0$  und  $h_1$  aus, deren Filterlänge im Vergleich zur Signallänge des Inputsignals  $x$  klein ist. Dann haben die Signale  $h_0 * x$  und  $h_1 * x$  ungefähr dieselbe Signallänge wie  $x$  und ohne Downsampling würde sich daher die Datenrate nach Durchlauf der Analysebank verdoppeln. Dies ist sehr ineffizient, da im allgemeinen die beiden Folgen einen hohen Redundanzgrad aufweisen. Durch 2-Dezimierung der Signale  $h_0 * x$  und  $h_1 * x$  erhält man zwei Subbandsignale  $y_0, y_1$  halber Länge und die Datenrate des Outputs der Analysebank entspricht der Datenrate des Inputsignals  $x$ . Durch geeignete Wahl der Filter der 2-Band FB (mit PR-Eigenschaft) ist  $x$  aus  $y_0$  und  $y_1$  rekonstruierbar, im Output hat man keine Redundanz mehr.

### 6.2.1 PR-Eigenschaft

Ziel ist es, hinreichende Bedingungen für die Filter  $h_0, h_1, f_0, f_1$  einer 2-Band FB zu finden, die eine *perfekte Rekonstruktion* (PR) des Originalsignals  $x$  aus seinen Subbandsignalen garantiert, also  $x = \tilde{x}$ . Wir schwächen den Begriff der perfekten Rekonstruktion ein wenig ab und sagen, daß die FB die *PR $_{\ell}$ -Eigenschaft* für ein  $\ell \in \mathbb{N}_0$  hat, falls

$$\forall x : \tilde{x}(n) = x(n - \ell) \quad (6.11)$$

gilt, d. h. jedes Eingangssignal wird durch eine PR $_{\ell}$ -FB nur zeitlich verzögert. Ein Grund für diese Abschwächung besteht darin, daß dadurch im Falle von FIR-Filtern erreicht werden kann, daß alle vorkommenden Filter kausal sind. Im Falle  $\ell = 0$  schreiben wir im folgenden auch einfach PR anstelle PR $_0$ .

**Satz 6.2.3** Eine 2-Band FB zu  $(h_0, h_1, f_0, f_1) \in \ell^1(\mathbb{Z})^4$  besitzt die  $\text{PR}_\ell$ -Eigenschaft gdw. (im  $z$ -Bereich) gilt:

$$F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z) = 0 \quad (\text{A})$$

$$F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z) = 2z^{-\ell} \quad (\text{D})$$

**Beweis:** Wir zeigen zuerst, daß aus (A) und (D) die  $\text{PR}_\ell$ -Eigenschaft folgt. Das Outputsignal  $\tilde{x}$  ist definiert durch Anwendung der Synthese- und Analysebank auf das Inputsingal  $x$ , also folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(z) &= F_0(z)(\uparrow 2)(\downarrow 2)H_0(z)X(z) + F_1(z)(\uparrow 2)(\downarrow 2)H_1(z)X(z) \\ &\stackrel{(6.3),(6.4)}{=} F_0(z)\frac{1}{2}(H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z)) \\ &\quad + F_1(z)\frac{1}{2}(H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z)) \\ &= \frac{1}{2}(F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z))X(z) \\ &\quad + \frac{1}{2}(F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z))X(-z) \\ &\stackrel{(D),(A)}{=} z^{-\ell}X(z) \end{aligned}$$

Die Notwendigkeit der Bedingungen (A) und (D) für die  $\text{PR}_\ell$ -Eigenschaft ergibt sich aus dem folgenden Lemma 6.2.4 mit

$$A(z) := \frac{1}{2}(F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z)) - z^{-\ell}$$

und

$$B(z) := \frac{1}{2}(F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z)).$$

□

**Lemma 6.2.4** Es bezeichne  $\mathcal{H}(S^1)$  den Ring der in einer Umgebung des Einheitskreises  $S^1 \subset \mathbb{C}$  holomorphen Funktionen. (Z. B. liegen die durch  $\ell^1$ -Folge  $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$  definierten  $z$ -Transformierte  $H(z)$  in  $\mathcal{H}(S^1)$ .) Es seien  $A(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^{-k}$ ,  $B(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k z^{-k} \in \mathcal{H}(S^1)$  mit  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (b_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ . Dann gilt (mit  $z$  aus jeweils geeigneten Umgebungen der  $S^1$ ):

$$\left( \forall X \in \mathcal{H}(S^1) : A(z)X(z) + B(z)X(-z) = 0 \right) \iff A(z) = 0 = B(z). \quad (6.12)$$

**Beweis:** Die Implikation „ $\Leftarrow$ “ ist trivial. Wir zeigen die Implikation „ $\Rightarrow$ “. Sei  $n \in \mathbb{Z}$  beliebig. Aus Voraussetzung (6.12) folgt für  $X(z) = 1$  mit Hilfe des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen

$$0 = a_n z^{-n} + b_n (-z)^{-n}, \quad \text{also} \quad 0 = a_n + (-1)^{-n} b_n, \quad (6.13)$$

und für  $X(z) = z$

$$0 = a_n z^{-n+1} + b_n (-z)^{-n+1}, \quad \text{also} \quad 0 = a_n + (-1)^{-n+1} b_n. \quad (6.14)$$

Addition von (6.13) und (6.14) ergibt  $a_n = 0$ . Da  $n \in \mathbb{Z}$  beliebig gewählt wurde, folgt  $A = 0$ . Analog folgt  $B = 0$ . □

Die Bedingung (A) garantiert, daß der Aliasing-Term  $H_0(-z)X(-z)$ , der im Syntheseschritt mit  $F_0(z)$  multipliziert wird, durch den Aliasing-Term des zweiten Kanals  $H_1(-z)X(-z)$ , der im Syntheseschritt mit  $F_1(z)$  multipliziert wird, ausgelöscht wird. Die Bedingung (D) (no distortion) garantiert dann die eigentliche Rekonstruktionseigenschaft der FB.

In der Literatur wird die  $\text{PR}_\ell$ -Eigenschaft auf viele verschiedene Weisen charakterisiert, deren Äquivalenz auf den ersten Blick überhaupt nicht erkennbar ist. Wir fassen diese Charakterisierungen kurz zusammen, bevor wir in den nächsten Unterabschnitten ausführlich auf sie eingehen.

- **Charakterisierung im  $z$ -Bereich:** Diese  $\text{PR}_\ell$ -Charakterisierung führt auf die Bedingung (A) und (D) von Satz 6.2.3. Die Bedingungen (A) und (D) können auch in Matrixschreibweise zusammengefaßt werden. Dies führt zu den sogenannten *Modulationsmatrizen* und *Polyphasenmatrizen*. Die  $\text{PR}_\ell$ -Charakterisierung im  $z$ -Bereich eignet sich besonders für den Entwurf von Filterbänken (da es sich mit  $z$ -Transformierten gut rechnen läßt) und die Polyphasen-Charakterisierung führt zu effizienten Implementierungen von Filterbänken und Wavelettransformationen.
- **Direkte Charakterisierung über die Filterkoeffizienten:** In diesem Fall werden für die  $\text{PR}_\ell$ -Eigenschaft hinreichende und notwendige Bedingungen direkt über die Filterkoeffizienten der Filter  $f_0, f_1, h_0, h_1$  formuliert, was also einer Charakterisierung im Zeitbereich entspricht. Diese Charakterisierung läßt sehr deutlich den Zusammenhang zur Wavelettheorie hervortreten.
- **Matrixcharakterisierung:** Hierbei werden Analyse- und Synthesebank mit Hilfe von  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -Matrizen dargestellt. Die  $\text{PR}_\ell$ -Eigenschaft ist dann äquivalent zu Invertierbarkeitsaussagen dieser Matrizen. Diese Charakterisierung führt bei endlichen Filtern und Signalen zu endlichen  $N \times N$ -Toeplitzmatrizen, die nicht nur zu schnellen Algorithmen führt (es gibt schnelle Matrixalgorithmen für Toeplitzmatrizen), sondern auch eine geeignete Plattform für die Weiterentwicklung und Verallgemeinerung von FB-Algorithmen bietet (z. B. bei sogenannten Randerweiterungen von Filtern).

Abschließend sei bemerkt, daß sich die verschiedenen Charakterisierungen und Aussagen auf  $M$ -Band Filterbänke verallgemeinern.

## 6.2.2 Modulationsmatrizen und $\text{PR}_\ell$ -Charakterisierung

Die Bedingungen (A) und (D) von Satz 6.2.3 zur perfekten Rekonstruktion können in Matrixschreibweise folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\begin{bmatrix} F_0(z) & F_1(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z^{-\ell} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

Diese Darstellung führt auf den Begriff der *Modulationsmatrix*, die für ein beliebiges Paar von Filtern definiert werden kann.

**Definition 6.2.5** Seien  $h_0, h_1 \in \ell^1(\mathbb{Z})$  zwei Filter mit  $z$ -Transformierten  $H_0$  und  $H_1$ . Dann ist die Modulationsmatrix  $\mathbf{H}_m$  definiert durch

$$\mathbf{H}_m(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix}.$$

Im Fall einer 2-Band FB hat man eine Modulationsmatrix  $\mathbf{H}_m$  für die beiden Filter  $h_0$  und  $h_1$  der Analysebank und eine Modulationsmatrix  $\mathbf{F}_m$  für die beiden Filter  $f_0$  und  $f_1$  der Synthesebank:

$$\mathbf{H}_m(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_m(z) = \begin{bmatrix} F_0(z) & F_0(-z) \\ F_1(z) & F_1(-z) \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Man überprüft sofort, daß die Bedingungen (A) und (D) und damit die  $\text{PR}_\ell$ -Eigenschaft der Filterbank äquivalent sind zu

$$(\mathbf{F}_m)^T(z) \cdot \mathbf{H}_m(z) = \begin{bmatrix} 2z^{-\ell} & 0 \\ 0 & 2(-z)^{-\ell} \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

In der Literatur wird  $\text{PR}_\ell$ -Eigenschaft noch auf viele andere Weisen charakterisiert. Unter anderem liefert der folgende Satz die mathematische Grundlage, dessen Beweis man z. B. in [Lang] (S.518, Proposition 4.16) findet.

**Satz 6.2.6** Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit 1 und multiplikativer Einheitsgruppe  $R^\times$ . Es bezeichne  $R^{n \times n}$  den Ring der  $n \times n$ -Matrizen über  $R$  und  $GL_n(R) \subset R^{n \times n}$  die Untergruppe der invertierbaren  $n \times n$ -Matrizen für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$A \in GL_n(R) \iff \det(A) \in R^\times. \quad (6.18)$$

**Korollar 6.2.7** Für  $A, B \in R^{n \times n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gilt:

$$AB = I \iff BA = I \quad (6.19)$$

**Beweis:** Aus  $AB = I$  folgt

$$\det(A)\det(B) = \det(AB) = 1,$$

also  $\det(A), \det(B) \in R^\times$ . Aus Satz 6.2.6 folgt damit  $A, B \in GL_n(R)$ . Hieraus folgt leicht  $B = A^{-1}$  und damit  $BA = I$ . Die andere Implikation folgt analog.  $\square$

Nach (6.17) gilt

$$\text{PR}_\ell \iff (\mathbf{F}_m)^T(z) \cdot \mathbf{H}_m(z) \cdot \frac{1}{2}z^\ell \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^\ell \end{bmatrix} = I. \quad (6.20)$$

Daraus folgt mit Korollar 6.2.7 für den kommutativen Ring  $R = \mathcal{H}(S^1)$  der auf einer Umgebung von  $S^1$  holomorphen Funktionen:

$$\begin{aligned} \text{PR}_\ell &\iff \mathbf{H}_m(z) \cdot \frac{1}{2}z^\ell \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^\ell \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{F}_m)^T(z) = I \\ &\iff \mathbf{H}_m(z) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^\ell \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{F}_m)^T(z) = \begin{bmatrix} 2z^{-\ell} & 0 \\ 0 & 2z^{-\ell} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Erst bei der direkten  $\text{PR}_\ell$ -Charakterisierung im Zeitbereich über die Filterkoeffizienten in Unterabschnitt 6.2.3 werden wir sehen, daß (6.17) und (6.21) zu völlig verschiedenen Bedingungen an die Filterkoeffizienten führen, deren Äquivalenz im Zeitbereich nur sehr schwer beweisbar ist.

### 6.2.3 Direkte $\text{PR}_\ell$ -Charakterisierung im Zeitbereich

Wir wollen in diesem Unterabschnitt die  $\text{PR}_\ell$ -Eigenschaft einer Filterbank im Zeitbereich direkt über die Filterkoeffizienten beschreiben. Über diese Charakterisierung werden wir später den Zusammenhang zur Wavelet-Theorie erkennen. Wir fassen das Hauptergebnis im folgenden Satz zusammen:

**Satz 6.2.8** *Gegeben sei eine 2-Band FB zu  $(h_0, h_1, f_0, f_1) \in \ell^1(\mathbb{Z})^4$ . Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

(i) *Die FB hat die  $\text{PR}_\ell$ -Eigenschaft.*

(ii) *Für beliebige  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  gilt*

$$\sum_{i=0}^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_i(2k + n_1) f_i(-2k - n_2) = \delta(n_1 - n_2 - \ell).$$

(iii) *Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  und  $i, j \in \{0, 1\}$  gilt:*

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_i(k) f_j(2n - k) &= \delta(i - j) \delta(2n - \ell), \text{ falls } \ell \text{ gerade,} \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_i(k) f_j(2n + 1 - k) &= \delta(i - j) \delta(2n + 1 - \ell), \text{ falls } \ell \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

**Beweis:** Wir beweisen (i)  $\iff$  (ii). Dabei verwenden wir die nach Satz 6.2.3 zu (i) äquivalenten Bedingungen (A) und (D):

PR $_{\ell}$ -Eigenschaft (i)

$$\begin{aligned} \stackrel{(6.2.3)}{\iff} \quad & F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z) = 2z^{-\ell} & \text{(D)} \\ & F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z) = 0 & \text{(A)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff \quad & \sum_{i=0}^1 \sum_n \left( \sum_k f_i(n-k)h_i(k) \right) z^{-n} = 2z^{-\ell} & \text{(D)} \\ & \sum_{i=0}^1 \sum_n \left( \sum_k f_i(n-k)(-1)^k h_i(k) \right) z^{-n} = 0 & \text{(A)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff \quad & \sum_{i=0}^1 \sum_k h_i(2k) f_i(n-2k) = \delta(n-\ell) & \text{(D)+(A)} \\ & \sum_{i=0}^1 \sum_k h_i(2k+1) f_i(n-2k-1) = \delta(n-\ell) & \text{(D)-(A)} \end{aligned}$$

$$\iff \quad \sum_{i=0}^1 \sum_k h_i(2k+n_1) f_i(-2k-n_2) = \delta(n_1-n_2-\ell),$$

für alle  $n \in \mathbb{Z}$  in der vorletzten Äquivalenz und für alle  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  in der letzten Zeile. Die letzte Äquivalenz ist dabei nicht offensichtlich. Die Richtung „ $\Leftarrow$ “ ergibt sich mit  $n_1 = 0$  und  $n_2 = -n$  (Bedingung (D)+(A)) und mit  $n_1 = 1$  und  $n_2 = -n + 1$  (Bedingung (D)-(A)). Die Richtung „ $\Rightarrow$ “ folgt durch Indextransformation und Fallunterscheidung nach geradem und ungeradem  $n_1$ . Sei zunächst  $n_1$  gerade, dann folgt

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^1 \sum_k h_i(2(k + \frac{n_1}{2})) f_i(-2k - n_2) \\ = & \sum_{i=0}^1 \sum_k h_i(2k) f_i(-2(k - \frac{n_1}{2}) - n_2) \\ = & \sum_{i=0}^1 \sum_k h_i(2k) f_i(-2k + n_1 - n_2) \\ \stackrel{\text{(D)+(A)}}{=} & \delta(n_1 - n_2 - \ell). \end{aligned}$$

Für ungerades  $n_1$  folgt die Aussage ähnlich unter Verwendung von (D)-(A).

Wir beweisen nun (i)  $\iff$  (iii). Dabei verwenden wir die für (i) äquivalente Bedingung (6.21). Wir betrachten zuerst den Fall, daß  $\ell$  gerade ist. Dann gilt:

PR $_{\ell}$ -Eigenschaft (i)  $\stackrel{(6.21)}{\iff}$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2z^{-\ell} & 0 \\ 0 & 2z^{-\ell} \end{bmatrix} &= \mathbf{H}_m(z) \cdot (\mathbf{F}_m)^T(z) \\ &= \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_0(z) & F_1(z) \\ F_0(-z) & F_1(-z) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu den folgenden vier Bedingungen für  $i, j \in \{0, 1\}$ :

$$H_i(z)F_j(z) + H_i(-z)F_j(-z) = \delta(i-j)2z^{-\ell}.$$

Wir schreiben diese Bedingungen aus und erhalten:

$$\sum_n \left( \sum_k h_i(k) f_j(n-k) + (-1)^n h_i(k) f_j(n-k) \right) z^{-n} = \delta(i-j) 2z^{-\ell}$$

Für ungerades  $n$  ist der Koeffizient von  $z^{-n}$  auf der linken Seite Null, und da  $\ell$  als gerade vorausgesetzt stimmt dies mit der rechten Seite überein. Nur die geraden  $n$  stellen Bedingungen an die Filterkoeffizienten. Diese können so formuliert werden:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_i(k) f_j(2n-k) = \delta(i-j) \delta(2n-\ell), \text{ falls } \ell \text{ gerade,}$$

Der Fall, daß  $\ell$  ungerade ist, wird analog bewiesen. Nach (6.21) geht man nun von folgender Äquivalenz aus:

PR $_{\ell}$ -Eigenschaft (i)  $\stackrel{(6.21)}{\iff}$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2z^{-\ell} & 0 \\ 0 & 2z^{-\ell} \end{bmatrix} &= \mathbf{H}_m(z) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{F}_m)^T(z) \\ &= \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_0(z) & F_1(z) \\ -F_0(-z) & -F_1(-z) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Wir betonen, daß die Äquivalenz von den Bedingungen (ii) und (iii) in Satz 6.2.8 unter Verwendung der Äquivalenz von (6.17) und (6.21) bewiesen wurde, also über den Umweg in den  $z$ -Bereich. Eine direkte Verifikation der Äquivalenz von (ii) und (iii) wäre sehr schwer. Bedingung (ii) drückt aus, daß die zwei Kanäle der Synthese- und Analysebank „genügend“ Informationen enthalten müssen, damit eine perfekte Rekonstruktion möglich ist (beachte die Summation über  $i$ ). Bedingung (iii) hingegen betont einen anderen Aspekt: Die Folgen der Filterkoeffizienten müssen sogenannte *Biorthogonalitätsrelationen* erfüllen, die eine perfekte Rekonstruktion garantieren. Dies erinnert an die Bedingungen für die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren von zueinander inversen Matrizen. Im nächsten Unterabschnitt wollen wir die Verbindung zur Matrixtheorie behandeln.

#### 6.2.4 Matrixcharakterisierung der PR $_{\ell}$ -Eigenschaft

Wir wollen im folgenden die Synthese- und Analysebank in Matrixform darstellen. Wie in (6.1) beschrieben, werden die Filter  $h_0, h_1, f_0, f_1$  durch Toeplitz-Matrizen realisiert. In der Analysebank werden die mit  $h_i, i \in \{0, 1\}$ , gefilterten Signale durch ( $\downarrow 2$ ) dezimiert. In Matrixform entspricht dies der Entfernung der ungeraden Zeilen der Toeplitz-Matrizen zu  $h_i$ , und führt so zu den folgenden Block-Toeplitz-Matrizen:

$$\mathbf{H}_{i,t}^a = T(\dots, [h_i(2) \ h_i(1)]; [h_i(0) \ h_i(-1)]; [h_i(-2) \ h_i(-3)], \dots),$$

$i \in \{0, 1\}$ . Wir fassen diese beiden Matrizen zu einer  $2 \times 2$ -Block-Toeplitz-Matrix  $\mathbf{H}_t^a$  zusammen, wobei die Reihen mit geradem Index durch die Reihen von  $\mathbf{H}_{0,t}^a$  und die Reihen mit ungeradem Index durch die Reihen von  $\mathbf{H}_{1,t}^a$  definiert werden:

$$\mathbf{H}_t^a = T \left( \cdots, \begin{bmatrix} h_0(2) & h_0(1) \\ h_1(2) & h_1(1) \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} h_0(0) & h_0(-1) \\ h_1(0) & h_1(-1) \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} h_0(-2) & h_0(-3) \\ h_1(-2) & h_1(-3) \end{bmatrix}, \cdots \right).$$

In der Synthesebank werden die Signale mit  $(\uparrow 2)$  upgesampelt, bevor sie jeweils mit den  $f_i$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , gefiltert werden. In Matrixform entspricht dies der Entfernung der ungeraden Spalten der Toeplitz-Matrizen zu  $f_i$ . Dies führt so zu den folgenden Block-Toeplitz-Matrizen:

$$\mathbf{F}_{i,t}^s = T \left( \cdots, \begin{bmatrix} f_i(2) \\ f_i(3) \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} f_i(0) \\ f_i(1) \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} f_i(-2) \\ f_i(-1) \end{bmatrix}, \cdots \right).$$

Analog zu  $\mathbf{H}_t^a$  fassen wir  $\mathbf{F}_{0,t}^s$  und  $\mathbf{F}_{1,t}^s$  zu einer Matrix  $\mathbf{F}_t^s$  zusammen, allerdings werden nun die beiden Matrizen spaltenweise verwoben:

$$\mathbf{F}_t^s = T \left( \cdots, \begin{bmatrix} f_0(2) & f_1(2) \\ f_0(3) & f_1(3) \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} f_0(0) & f_1(0) \\ f_0(1) & f_1(1) \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} f_0(-2) & f_1(-2) \\ f_0(-1) & f_1(-1) \end{bmatrix}, \cdots \right),$$

$i \in \{0, 1\}$ . Die Matrizen  $\mathbf{H}_t^a$  bzw.  $\mathbf{F}_t^s$  bezeichnen wir im folgenden als *Analysebankmatrix* bzw. *Synthesebankmatrix* der Filterbank, was wir auch durch die Indizes  $a$  bzw.  $s$  kennzeichnen. Der Index  $t$  soll andeuten, daß es sich hierbei um Matrizen im Zeitbereich handelt.

**Bemerkung 6.2.9** Wir betrachten eine spezielle Filterbank, bei der die Synthesebankfilter  $f_i$  durch die Flips der Analysebankfilter  $h_i$ , also  $f_i(k) = h_i(-k)$  für  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , definiert seien. Dann hängen die Analysebankmatrix und Synthesebankmatrix folgendermaßen zusammen: Es sei  $\mathbf{H}_t^a$  die Analysebankmatrix der Filter  $h_i$ ,  $i \in \{0, 1\}$  und  $\mathbf{F}_t^s$  die Synthesebankmatrix der Filter  $f_i$ ,  $i \in \{0, 1\}$ . Dann gilt

$$\mathbf{F}_t^s = (\mathbf{H}_t^a)^T. \quad (6.22)$$

Wir kommen nun zur Matrixcharakterisierung der  $\text{PR}_\ell$ -Eigenschaft einer Filterbank. Dazu geben wir die Koeffizienten von  $\mathbf{H}_t^a$  und  $\mathbf{F}_t^s$  explizit an:

$$\mathbf{H}_t^a = (h(n, m))_{n, m \in \mathbb{Z}}, \quad h(n, m) := \begin{cases} h_0(n - m), & n \text{ gerade} \\ h_1(n - 1 - m), & n \text{ ungerade,} \end{cases} \quad (6.23)$$

und

$$\mathbf{F}_t^s = (f(n, m))_{n, m \in \mathbb{Z}}, \quad f(n, m) := \begin{cases} f_0(n - m), & m \text{ gerade,} \\ f_1(n - m + 1), & m \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (6.24)$$

Das Hauptergebnis fassen wir im folgenden Satz zusammen.

**Satz 6.2.10** Gegeben sei eine 2-Band Filterbank zu  $(h_0, h_1, f_0, f_1) \in \ell^1(\mathbb{Z})^4$ . Mit  $\tau$  sei sowohl der Delay als auch die den Delay darstellende Toeplitzmatrix  $T(\dots, 0, 1; 0; 0, \dots)$  bezeichnet. Folgende Bedingungen sind äquivalent:

(i) Die FB hat die  $\text{PR}_\ell$ -Eigenschaft.

(ii)  $\mathbf{F}_t^s \cdot \mathbf{H}_t^a = \tau^\ell$

(iii)  $\mathbf{H}_t^a \cdot \tau^{-\ell} \cdot \mathbf{F}_t^s = I$

**Beweis:** Wir beweisen (i)  $\iff$  (ii). Dazu multiplizieren wir das Matrixprodukt in (ii) aus und erhalten dadurch für alle  $n, m \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} \delta(n - m - \ell) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(n, k)h(k, m) \\ &= \sum_{k \text{ gerade}} f(n, k)h(k, m) + \sum_{k \text{ ungerade}} f(n, k)h(k, m) \\ &= \sum_{k \text{ gerade}} f_0(n - k)h_0(k - m) + \sum_{k \text{ ungerade}} f_1(n - k - 1)h_1(k + 1 - m) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_0(n - 2k)h_0(2k - m) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_1(n - 2k)h_1(2k - m). \end{aligned}$$

Dies ist aber nichts anderes als die Bedingung (ii) in Satz 6.2.8, welche nach demselbigen Satz äquivalent zur  $\text{PR}_\ell$ -Eigenschaft (i) ist.

Die Äquivalenz (ii)  $\iff$  (iii) folgt sofort aus Korollar 6.2.7.  $\square$

## 6.2.5 Polyphasenzerlegung und Polyphasenmatrizen

Wie wir schon als Vorbemerkung zu Satz 6.1.5 dargestellt haben, ist es sehr ineffizient, bei Anwendung der Analysebank ein Eingangssignal  $x$  zuerst mit den Filtern  $h_0$  und  $h_1$  zu falten, um dann durch Anwendung des 2-Dezimierers ( $\downarrow 2$ ) die Hälfte der Information zu zerstören. Es wäre effizienter, zuerst das Eingangssignal zu dezimieren, um dann die so erhaltenen Signale halber Länge mit den Analysefiltern zu falten. Dies ist i. a. nicht möglich, da die Faltungsoperatoren mit ( $\downarrow 2$ ) nicht kommutieren. Zerlegt man jedoch das Signal  $x$  und die Filter  $h_i$  geeignet in Teilsignale bzw. Teilfilter, so können die beiden Operatoren unter Verwendung der 1. Noble-Identität (6.8) vertauscht werden. Diese Zerlegung ist die sogenannte *Polyphasenzerlegung*, die auf die *Polyphasenmatrizen* führen. Analoges läßt sich über die Synthesebank sagen. Hier führt die Polyphasenzerlegung unter Verwendung der 2. Noble-Identität (6.9) zu analogen Aussagen über die Faltungfilter  $f_i$  und ( $\uparrow 2$ ).

Wird ein Signal  $x \in \ell^p(\mathbb{Z})$  mit ( $\downarrow 2$ ) downgesampelt, bleiben die Koeffizienten mit geradem Index erhalten und die Koeffizienten mit ungeradem Index gehen verloren. Dies sind die zwei Phasen, *gerade* und *ungerade*. Es ist natürlich,

diese zwei Phasen  $x_{even}$  und  $x_{odd}$  getrennt beim Durchlauf der Filterbank zu betrachten. Wir definieren für  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$x_{even}(k) := x(2k), \quad (6.25)$$

$$x_{odd}(k) := x(2k + 1). \quad (6.26)$$

Im  $z$ -Bereich schreiben sich diese Definitionen unter Verwendung von (6.4) als:

$$X_{even}(z) = (\downarrow 2)X(z) = \frac{1}{2}(X(z^{\frac{1}{2}}) + X(-z^{\frac{1}{2}})), \quad (6.27)$$

$$X_{odd}(z) = (\downarrow 2)(zX(z)) = z^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(X(z^{\frac{1}{2}}) - X(-z^{\frac{1}{2}})), \quad (6.28)$$

so daß man folgende Zerlegung von  $X$  hat:

$$X(z) = X_{even}(z^2) + z^{-1}X_{odd}(z^2). \quad (6.29)$$

Es sei  $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$  ein Filter mit  $z$ -Transformierter  $H$ . Wir untersuchen nun, wie sich das Singal  $(\downarrow 2)(h * x)$  mit  $z$ -Transformierter  $(HX)_{even}$  aus den Phasen des Eingangssignals  $x$  und des Filters  $h$  berechnen läßt. Im  $z$ -Bereich gilt folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned} (HX)_{even}(z^2) &\stackrel{(6.27)}{=} \frac{1}{2}[H(z)X(z) + H(-z)X(-z)] \\ &= \frac{1}{4}([H(z) + H(-z)] \cdot [X(z) + X(-z)]) \\ &\quad + \frac{1}{4}([H(z) - H(-z)] \cdot [X(z) - X(-z)]) \\ &\stackrel{(6.27),(6.28)}{=} H_{even}(z^2)X_{even}(z^2) + z^{-2}H_{odd}(z^2)X_{odd}(z^2). \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise gilt also

$$(HX)_{even}(z) = \begin{bmatrix} H_{even}(z) & H_{odd}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{even}(z) \\ z^{-1}X_{odd}(z) \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

Mit anderen Worten kann man also  $(\downarrow 2)(h * x)$  folgendermaßen berechnen:

- (i) Berechne das Faltungsprodukt der geraden Phase von  $x$  mit der geraden Phase von  $h$ , also  $h_{even} * x_{even}$ .
- (ii) Berechne das Faltungsprodukt der ungeraden Phase von  $x$  mit der ungeraden Phase von  $h$ , also  $h_{odd} * x_{odd}$ , und verzögere das so erhaltene Signal mit einem Delay  $\tau$ .
- (iii) Die Summe der in (i) und (ii) berechneten Signale ergibt  $(\downarrow 2)(h * x)$ .

Bei dieser Vorgehensweise wird das Signal  $x$  zuerst dezimiert, in gerade und ungerade Phase aufgeteilt, und dann gefaltet. Dies ist wesentlich effizienter, obwohl nun zwei Faltungsprodukte in (i) und (ii) berechnet werden müssen, da die Datenrate des Signals halbiert wurde. Hat man z. B. ein endliches Eingangssignal  $x$  der Länge  $N \in \mathbb{N}$  und ein endliches Filter  $h$  der Länge  $\ell(h)$ , so benötigt die direkte Berechnung von  $(\downarrow 2)(h * x)$  ungefähr

$$N \cdot \ell(h)$$

Multiplikationen und Additionen. Da die geraden und ungeraden Phasen von  $x$  und  $h$  jeweils ungefähr die halbe Länge haben, benötigt man bei dem in den Schritten (i)-(iii) angegebenen Verfahren

$$2 \cdot \frac{N}{2} \cdot \frac{\ell(h)}{2}$$

Multiplikationen und Additionen, also nur die Hälfte der Operationen.

Eine ähnliche Effizienzsteigerung kann man für die Berechnung von  $f * ((\uparrow 2)y)$  erzielen, wobei  $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$  ein Filter und  $y \in \ell^p(\mathbb{Z})$  ein Signal bezeichnen. Im  $z$ -Bereich gilt folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned} F((\uparrow 2)Y)(z) &= F(z)Y(z^2) \\ &= \left(\frac{1}{2}(F(z) + F(-z)) + \frac{1}{2}(F(z) - F(-z))\right)Y(z^2) \\ &\stackrel{(6.27),(6.28)}{=} F_{\text{even}}(z^2)Y(z^2) + z^{-1}F_{\text{odd}}(z^2)Y(z^2) \\ &\stackrel{(6.9)}{=} \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} \end{bmatrix} (\uparrow 2) \left( \begin{bmatrix} F_{\text{even}}(z) \\ F_{\text{odd}}(z) \end{bmatrix} Y(z) \right). \end{aligned}$$

Man kann also  $f * ((\uparrow 2)y)$  folgendermaßen effizient berechnen:

- (i) Berechne die Faltungsprodukte von  $y$  mit der geraden und ungeraden Phase von  $f$ , also  $f_{\text{even}} * y$  und  $f_{\text{odd}} * y$ .
- (ii) Expandiere die beiden so berechneten Signale mit  $(\uparrow 2)$ .
- (iii) Verzögere das zweite Signal mit einem Delay  $\tau$  und erhalte durch Summation das Signal  $f * ((\uparrow 2)y)$ .

Bei einer 2-Band Multiraten-FB haben wir in der Analyse- bzw. Synthesebank jeweils zwei Filter. Obige Ideen führen zu der folgenden Definition.

**Definition 6.2.11** *Es seien  $h_0, h_1 \in \ell^1(\mathbb{Z})$  zwei Filter mit  $z$ -Transformierten  $H_0, H_1$ . Die Polyphasenmatrix  $\mathbf{H}_p$  zu diesen beiden Filtern ist definiert als*

$$\mathbf{H}_p(z) := \begin{bmatrix} H_{0,\text{even}}(z) & H_{0,\text{odd}}(z) \\ H_{1,\text{even}}(z) & H_{1,\text{odd}}(z) \end{bmatrix}.$$

Die Polyphasenmatrizen stehen in engen Zusammenhang mit den Modulationsmatrizen (siehe Definition 6.2.5), der in dem folgenden Satz mathematisch formuliert wird.

**Satz 6.2.12** *Es seien  $h_0, h_1 \in \ell^1(\mathbb{Z})$  zwei Filter. Dann gilt*

$$\mathbf{H}_p(z^2) = \frac{1}{2} \mathbf{H}_m(z) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}$$

**Beweis:** Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen der Matrizen unter Verwendung von (6.27) und (6.28).  $\square$

Wir bemerken, daß die  $2 \times 2$ -Matrix mit den drei Einsen und der  $-1$  in Satz 6.2.12 nichts anderes als die  $\text{DFT}_2$ -Matrix der diskreten Fouriertransformation ist.

**Satz 6.2.13** *Eine 2-Band Multiraten-Filterbank sei definiert durch die beiden Filter  $h_i = (h_i(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , der Analysebank und die beiden Filter  $f_i = (f_i(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , der Synthesebank. Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

(i) *Die FB hat die  $\text{PR}_\ell$ -Eigenschaft.*

(ii)

$$(\mathbf{F}_p)^T(z)\mathbf{H}_p(z) = \begin{cases} z^L \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}, & L = -\frac{\ell}{2}, \text{ falls } \ell \text{ gerade,} \\ z^L \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & L = -\frac{\ell+1}{2}, \text{ falls } \ell \text{ ungerade.} \end{cases}$$

**Beweis:** Die Äquivalenz (i)  $\iff$  (ii) folgt aus der  $\text{PR}_\ell$ -Charakterisierung (6.17) und Satz 6.2.12:

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_p)^T(z^2)\mathbf{H}_p(z^2) &\stackrel{6.2.12}{=} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} (\mathbf{F}_m)^T(z)\mathbf{H}_m(z) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \\ &\stackrel{(6.17)}{=} \frac{1}{4} 2z^{-\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \\ &= \begin{cases} z^{-\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^2 \end{bmatrix}, & \text{falls } \ell \text{ gerade,} \\ z^{-\ell} \begin{bmatrix} 0 & z \\ z & 0 \end{bmatrix}, & \text{falls } \ell \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dies ist aber gerade (ii).  $\square$

## 6.2.6 Kausale $\text{PR}_\ell$ -FB

Wir erinnern daran, daß ein Filter  $h = (h(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$  *kausal* heißt, wenn  $h(k) = 0$  für  $k < 0$  gilt. In diesem Fall ist auch das durch dieses Filter definierte System *kausal*, d. h. für ein Eingangssignal  $x \in \ell^p(\mathbb{Z})$  hängt die Ausgabe des Systems zu jedem Zeitpunkt  $t = k \in \mathbb{Z}$ , also  $y(k) = (h * x)(k)$ , nur vom gegenwärtigen Input  $x(k)$  oder von früheren Inputs  $x(k-1), x(k-2), \dots$  ab. Falls ein System diese Eigenschaft nicht besitzt, heißt es *nicht-kausal*.

In der digitalen Signalverarbeitung hat man es oft mit Anwendungen zu tun, die in *Echtzeit* ablaufen sollen. Mit anderen Worten soll bei einer sukzessiven Eingabe  $\dots, x(k-2), x(k-1), x(k), \dots$  eines Signals  $x$  der Output  $y(k)$  des Systems, das diese Anwendung realisiert, mit einer praktisch nicht wahrnehmbaren zeitlichen Verzögerung zur Verfügung stehen. Man denke hier zum Beispiel

an Anwendungen bei Videokonferenzen über digitale Telefonnetze. Bei solchen Echtzeit-Anwendungen stehen damit zukünftige Werte  $x(k+1), x(k+2), \dots$  des Signals  $x$  zum Zeitpunkt  $t = k$  nicht zur Verfügung, und es können nur kausale Systeme verwendet werden. Wir hoffen dadurch ausreichend motiviert zu haben, warum man an Filterbänken interessiert ist, bei denen alle vorkommenden Filter kausal sind.

Wir gehen im folgenden von einer 2-Band Multiraten-FB mit  $\text{PR}_\ell$ -Eigenschaft aus, bei der sowohl die Analysebankfilter  $h_0, h_1$ , als auch die Synthesebankfilter  $f_0, f_1$  FIR-Filter sind. Durch geeignete Wahl von  $\ell_h, \ell_f \in \mathbb{Z}$  kann man erreichen, daß die durch

$$\tilde{H}_i(z) := z^{-\ell_h} H_i(z) \quad \text{und} \quad \tilde{F}_i(z) := z^{-\ell_f} F_i(z)$$

definierten Filter  $\tilde{h}_i$  und  $\tilde{f}_i$  kausal sind. Für die Koeffizienten gilt:

$$\tilde{h}_i(k) = h_i(k - \ell_h) \quad \text{und} \quad \tilde{f}_i(k) = f_i(k - \ell_f).$$

Die folgende Rechnung zeigt, daß die durch die Filter  $\tilde{h}_i$  und  $\tilde{f}_i$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , definierte Filterbank die  $\text{PR}_{\ell+\ell_h+\ell_f}$ -Eigenschaft besitzt (unter Verwendung von Satz 6.2.8). Für beliebige  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  gilt nämlich:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_i(2k + n_1) \tilde{f}_i(-2k - n_2) \\ &= \sum_{i=0}^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_i(2k + n_1 - \ell_h) f_i(-2k - n_2 - \ell_f) \\ &= \delta(n_1 - n_2 - (\ell + \ell_h + \ell_f)). \end{aligned}$$

Man kann also aus einer PR-FB mit nicht-kausalen FIR-Filtern immer eine  $\text{PR}_\ell$ -FB,  $\ell \in \mathbb{Z}$  geeignet, mit kausalen Filtern konstruieren, die wir im folgenden auch als *kausale*  $\text{PR}_\ell$ -FB bezeichnen. Dies ist ein Grund, warum wir bei der Definition der perfekten Rekonstruktion in (6.11) den Parameter  $\ell \in \mathbb{Z}$  zugelassen haben.

## 6.3 Orthonormale Filterbänke (ON-FB)

Aufgrund der Überlegungen in Unterabschnitt 6.2.6 beschränken wir uns im folgenden auf den Fall  $\ell = 0$ .

### 6.3.1 Charakterisierungen von ON-FB

**Definition 6.3.1** Eine PR-FB zu  $(h_0, h_1, f_0, f_1) \in \ell^1(\mathbb{Z})^4$  heißt orthonormale Filterbank oder ON-FB, falls für  $i \in \{0, 1\}$  und  $k \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$f_i(k) = \bar{h}_i(-k).$$

Die Filter  $f_i$  gehen aus den  $h_i$  durch einen sogenannten Flip mit Konjugation hervor. Im  $z$ -Bereich schreibt sich diese Bedingung als

$$F_i(z) = \overline{H_i}(z^{-1}),$$

wobei der Querbalken über einer  $z$ -Transformierten bedeutete, daß jeder Koeffizient der Potenzreihe komplex-konjugiert ist.

Der folgende Satz gibt an, wie eine ON-FB im Zeitbereich über die Koeffizienten und Analyse- und Synthesebankmatrizen und im  $z$ -Bereich über die Modulations- und Polyphasenmatrizen charakterisiert werden kann.

**Satz 6.3.2** Eine 2-Band Multiraten-Filterbank sei definiert durch die beiden Filter  $h_i = (h_i(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , der Analysebank. Die beiden Filter  $f_i = (f_i(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , der Synthesebank seien festgelegt durch  $f_i(k) := \bar{h}_i(-k)$ . Folgende Bedingungen sind äquivalent:

- (i) Die FB hat die PR-Eigenschaft und ist damit eine ON-FB.
- (ii) Für beliebige  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  gilt

$$\sum_{i=0}^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_i(2k + n_1) \bar{h}_i(2k + n_2) = \delta(n_1 - n_2).$$

- (iii) Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_0(k) \bar{h}_0(k - 2n) &= \delta(n), \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_0(k) \bar{h}_1(k - 2n) &= 0, \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_1(k) \bar{h}_1(k - 2n) &= \delta(n). \end{aligned}$$

- (iv) Für die Analysebankmatrix  $\mathbf{H}_t^a$  gilt:

$$(\overline{\mathbf{H}_t^a})^T \mathbf{H}_t^a = \mathbf{H}_t^a (\overline{\mathbf{H}_t^a})^T = I.$$

- (v) Für die Modulationsmatrix  $\mathbf{H}_m$  gilt:

$$(\overline{\mathbf{H}_m})^T(z^{-1}) \mathbf{H}_m(z) = \mathbf{H}_m(z) (\overline{\mathbf{H}_m})^T(z^{-1}) = 2I.$$

Dies kann durch die Bedingungen (A) und (D) auch folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\overline{H_0}(z^{-1})H_0(-z) + \overline{H_1}(z^{-1})H_1(-z) = 0 \quad (\text{A})$$

$$\overline{H_0}(z^{-1})H_0(z) + \overline{H_1}(z^{-1})H_1(z) = 2 \quad (\text{D})$$

(vi) Für die Polyphasenmatrix  $\mathbf{H}_p$  gilt:

$$(\overline{\mathbf{H}_p})^T(z^{-1})\mathbf{H}_p(z) = \mathbf{H}_p(z)(\overline{\mathbf{H}_p})^T(z^{-1}) = I.$$

**Beweis:** Die Äquivalenzen (i)  $\iff$  (ii)  $\iff$  (iii) folgen sofort aus Definition 6.3.1 und Satz 6.2.8 für den Fall  $\ell = 0$ . Beachte dabei, daß  $\delta(2n) = \delta(n)$  gilt.

Die Äquivalenz (i)  $\iff$  (iv) folgt aus Definition 6.3.1 und Satz 6.2.10 für den Fall  $\ell = 0$ . Dabei wird verwendet, daß nach Bemerkung 6.2.9 die Beziehung  $\mathbf{F}_t^s = (\overline{\mathbf{H}_t^a})^T$  gilt.

Die Äquivalenz (i)  $\iff$  (v) folgt sofort aus (6.17) und (6.21) für den den Fall  $\ell = 0$ , wenn man für  $F_i(z)$  die Formeln der  $z$ -Transformierten von Definition 6.3.1 einsetzt.

Die Äquivalenz (i)  $\iff$  (vi) folgt aus Satz 6.2.13 für den Fall  $\ell = 0$  unter Benutzung von

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p(z^2) &\stackrel{6.2.12}{=} \frac{1}{2}\mathbf{F}_m(z) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \\ &\stackrel{6.3.1}{=} \frac{1}{2}\overline{\mathbf{H}_m(z^{-1})} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^2 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{6.2.12}{=} \overline{\mathbf{H}_p(z^{-2})} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Wir betonen, daß aus (iii) des Satzes 6.3.2 für  $n = 0$  folgt, daß alle Filter bezüglich der  $\ell^2(\mathbb{Z})$ -Norm normiert sind, also:

$$\|h_0\|_{\ell^2} = \|h_1\|_{\ell^2} = \|f_0\|_{\ell^2} = \|f_1\|_{\ell^2} = 1. \quad (6.31)$$

Da bei einer Filterbank vorausgesetzt wurde, daß die Filter  $h_0$  und  $h_1$  in  $\ell^1(\mathbb{Z})$  sind, definieren die Funktionen  $z \mapsto H_i(z)$ ,  $z \mapsto F_i(z)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , und damit z. B. auch die Koeffizienten von  $\mathbf{H}_m(z)$ ,  $\mathbf{H}_p(z)$  holomorphe Funktionen, die in ihren offenen Definitionsbereichen den Einheitskreis  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$  enthalten. Daher kann in diesen Funktionen  $z = e^{2\pi i\omega}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ , gesetzt werden, und anstelle der Aussagen im  $z$ -Bereich erhält man analoge Aussagen im  $\omega$ -Bereich. Die Aussagen im  $z$ - und  $\omega$ -Bereich sind sogar äquivalent. Dies ist eine unmittelbare Folge des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen.

Damit läßt sich eine ON-FB im  $\omega$ -Bereich u. a. folgendermaßen charakterisieren:

**Korollar 6.3.3** Eine FB ist genau dann eine ON-FB, wenn für alle  $\omega \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\overline{H_0(-\omega)}H_0(\omega + \frac{1}{2}) + \overline{H_1(-\omega)}H_1(\omega + \frac{1}{2}) = 0 \quad (\text{A})$$

$$|H_0(\omega)|^2 + |H_1(\omega)|^2 = 2 \quad (\text{D})$$

**Beweis:** Dies folgt aus Satz 6.3.2 und dem vorher Gesagten für  $z = e^{2\pi i\omega}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ . Wie schon in Unterabschnitt 6.1.2 werden dabei die  $z$ -Transformierte und die Fouriertransformierte mit demselben Symbol bezeichnet, so daß z. B.  $H_0(e^{2\pi i\omega})$  mit  $H_0(\omega)$  identifiziert wird. In diesem Sinne gilt auch

$$H_0((e^{2\pi i\omega})^{-1}) = H_0(-\omega) \quad \text{und} \quad H_0(-e^{2\pi i\omega}) = H_0(\omega + \frac{1}{2}).$$

□

### 6.3.2 Paraunitäre Matrizen

Die von  $z$  abhängigen Matrizen, die in (v) und (vi) von Satz 6.3.2 vorkommen, sind eine Verallgemeinerung von unitären  $2 \times 2$ -Matrizen mit komplexen Einträgen. Eine Matrix  $A \in GL_2(\mathbb{C})$  heißt dabei *unitär*, falls ihre Inverse gleich der konjugiert-transponierten Matrix ist, also  $A^{-1} = \overline{A}^T$ .

Im  $z$ -Bereich wird die Analysebank repräsentiert durch die Modulationsmatrix  $\mathbf{H}_m(z)$  oder die Polyphasenmatrix  $\mathbf{H}_p(z)$ . Dies sind  $2 \times 2$ -Matrizen, deren Einträge Potenzreihen in  $\mathbb{C}[[z]]$  sind. Wir erweitern durch folgende Definition den Begriff einer unitären Matrix.

**Definition 6.3.4** Eine Matrix  $\mathbf{H}(z) \in \mathbb{C}[[z]]^{2 \times 2}$  heißt paraunitär, falls folgendes gilt:

$$\overline{\mathbf{H}}^T(z^{-1})\mathbf{H}(z) = I.$$

In diesem Fall gilt dann nach Korollar 6.2.7 auch

$$\mathbf{H}(z)\overline{\mathbf{H}}^T(z^{-1}) = I.$$

Nach Satz 6.3.2 ist also ein FB genau dann eine ON-FB, wenn  $\mathbf{H}_p(z)$  bzw.  $\frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{H}_m(z)$  paraunitär sind.

### 6.3.3 Prototyp und Alternierender Flip

In Unterabschnitt 6.3.1 haben wir gesehen, daß bei einer ON-FB die Filter  $f_i$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , der Synthesebank vollständig durch die Filter  $h_i$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , der Analysebank festgelegt sind. Die Filterkoeffizienten  $h_i$  müssen dabei sogenannten *Orthonormalitätsbedingungen* genügen (siehe Satz 6.3.2, (iii)), die man auch als *Doppelsift-Orthonormalität* bezeichnet.

Ausgehend von nur einem Filter  $h_0 = (h_0(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ , das Doppelsift-orthonormal ist, kann  $h_1$  so gewählt werden, daß die beiden Filter  $h_0$  und  $h_1$  den Bedingungen von Satz 6.3.2, (iii) genügen und damit eine ON-FB definieren. Dies ist Inhalt des nächsten Satzes.

**Satz 6.3.5** Es sei  $h_0 \in \ell^1(\mathbb{Z})$  ein Doppelshift-orthonormales Filter, also

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_0(k) \bar{h}_0(k - 2n) = \delta(n) \quad (6.32)$$

für alle  $n \in \mathbb{Z}$ . Definiere das Filter  $h_1 \in \ell^1(\mathbb{Z})$  durch einen sogenannten alternierenden Flip mit anschließender Konjugation und ungeradem Delay, also

$$h_1(k) := (-1)^k \bar{h}_0(N - k) \quad (6.33)$$

mit einem ungeraden  $N \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt für  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_0(k) \bar{h}_1(k - 2n) &= 0, \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_1(k) \bar{h}_1(k - 2n) &= \delta(n). \end{aligned}$$

Setzt man  $f_i(k) := \bar{h}_i(-k)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , dann definieren die Filter  $h_0, h_1, f_0, f_1$  eine ON-FB.

**Beweis:** Wir rechnen die Behauptung für  $n \in \mathbb{Z}$  einfach nach:

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_0(k) \bar{h}_1(k - 2n) \\ \stackrel{(6.33)}{=} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_0(k) (-1)^{k-2n} h_0(N + 2n - k) \\ = & \sum_{k \text{ gerade}} h_0(k) h_0(N + 2n - k) - \sum_{k \text{ ungerade}} h_0(k) h_0(N + 2n - k) \\ = & \sum_{k \text{ gerade}} h_0(k) h_0(N + 2n - k) - \sum_{j \text{ gerade}} h_0(N + 2n - j) h_0(j) \\ = & 0. \end{aligned}$$

Bei der Indextransformation  $j = N + 2n - k$  wurde dabei benutzt, daß  $N$  ungerade ist, und damit über gerade  $j$  summiert wird. Die Behauptung

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_1(k) \bar{h}_1(k - 2n) = \delta(n)$$

folgt durch eine ähnliche Rechnung. Nach Satz 6.3.2 definieren die Filter  $h_i$  und  $f_i$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , eine ON-FB.  $\square$

Einen Filter  $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$  mit den Eigenschaften in (6.32) bezeichnet man auch als *Prototyp*. Wir fassen noch einmal die Definitionen der Filter in Zeitbereich und  $z$ -Bereich zusammen, die man ausgehend von diesem Prototyp erhält und für ungerades  $N \in \mathbb{N}$  zu einer ON-FB führen:

$$\begin{aligned} h_0(k) &= h(k), & H_0(z) &= H(z), \\ h_1(k) &= (-1)^k \bar{h}(N - k), & H_1(z) &= z^{-N} \bar{H}(-z^{-1}), \\ f_0(k) &= \bar{h}(-k), & F_0(z) &= \bar{H}(z^{-1}), \\ f_1(k) &= (-1)^{-k} h(N + k), & F_1(z) &= z^N H(-z). \end{aligned}$$

Man rechnet sofort nach, daß für diese Filterwahl die Anti-Aliasing-Bedingung (A) automatisch erfüllt ist und sich für die No-Distortion-Bedingung (D)

$$\overline{H_0}(z^{-1})H_0(z) + \overline{H_0}(-z^{-1})H_0(-z) = 2 \quad (6.34)$$

ergibt. Damit ergibt sich im  $\omega$ -Bereich folgende Charakterisierung für einen Prototyp:

**Korollar 6.3.6** *Ein Filter  $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$  definiert genau dann einen Prototyp für eine ON-FB, wenn gilt:*

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \frac{1}{2})|^2 = 2.$$

Zum Abschluß wollen wir noch auf den Fall endlicher Filter eingehen. Falls der Prototyp  $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$  ein FIR-Filter ist, dann folgt sofort, daß sämtliche durch den Prototypen definierten Filter der ON-FB endliche Filter derselben Länge sind.

**Lemma 6.3.7** *Die Trägerlänge eines FIR-Prototypen  $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$  ist eine gerade Zahl.*

**Beweis:** Wir nehmen o.B.d.A. an, daß  $h(0)$  der erste nicht-verschwindende Koeffizient ist, also  $h(k) = 0$  für  $k < 0$ . Es sei  $m \in \mathbb{N}$  eine beliebige positive Zahl, so daß  $h(k) = 0$  für  $k > 2m$  gilt. Wir zeigen nun, daß  $h(2m) = 0$  gilt, woraus die Behauptung folgt. Der Filter  $h$  erfüllt nach Voraussetzung für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{2m} h(k)\bar{h}(k-2n) = \delta(n).$$

Für  $n = m > 0$  ergibt sich daher die Forderung  $h(2m)\bar{h}(0) = 0$ , die aber wegen  $h(0) \neq 0$  nur durch  $h(2m) = 0$  zu erfüllen ist.  $\square$

Ist also der Prototyp

$$h = (h(0), h(1), \dots, h(N))$$

ein kausaler FIR-Filter, dann ist  $N = \ell(h) - 1$  eine ungerade Zahl. Damit ist auch das durch

$$H_1(z) = z^{-N}\overline{H}(-z^{-1})$$

definierte Filter  $h_1$  kausal. Wir modifizieren die durch

$$F_0(z) = \overline{H}(z^{-1}) \quad \text{und} \quad F_1(z) = z^N H(-z)$$

definierten Filter  $f_0$  und  $f_1$  der Synthesebank durch eine zusätzlichen  $N$ -fachen Delay, also

$$\tilde{F}_i(z) = z^{-N} F_i(z),$$

$i \in \{0, 1\}$ . Dann sind auch die Filter  $\tilde{f}_i$  kausal. Nach Unterabschnitt 6.2.6 definieren die Filter  $h_i$  für die Analysebank und  $\tilde{f}_i$  für die Synthesebank eine *kausale* PR<sub>N</sub>-FB.

### 6.3.4 Tiefpaß-Bedingung für den Prototyp

Durch die Analysebank einer 2-Band Multiraten-FB soll ein Eingangssignal  $x$  in zwei Subbandsignale zerlegt werden, die eine bessere Frequenzdarstellung von  $x$  liefern. Dabei wählt man typischer Weise  $h_0$  als Tiefpaß- und  $h_1$  als Hochpaßfilter. Das Subbandsignal  $y_0 = h_0 * x$  enthält dann Informationen über die niederfrequenten Anteile in  $x$ , ist also eine „vergrößerte“ Version von  $x$ , während das Subbandsignal  $y_1 = h_1 * x$  aus hochfrequenten Anteilen von  $x$  besteht, also die „Details“ von  $x$  darstellt.

In unseren bisherigen Ausführungen über PR $_{\ell}$ -FB und ON-FB haben wir diesbezüglich keine Voraussetzungen an die Filter  $h_0$  und  $h_1$  gestellt, so daß diese ohne weitere Bedingungen z. B. auch Bandpaßfilter sein könnten. Wir gehen im folgenden von einer ON-FB aus, dann gilt nach Korollar 6.3.3 für die Fouriertransformierten

$$|H_0(\omega)|^2 + |H_1(\omega)|^2 = 2. \quad (6.35)$$

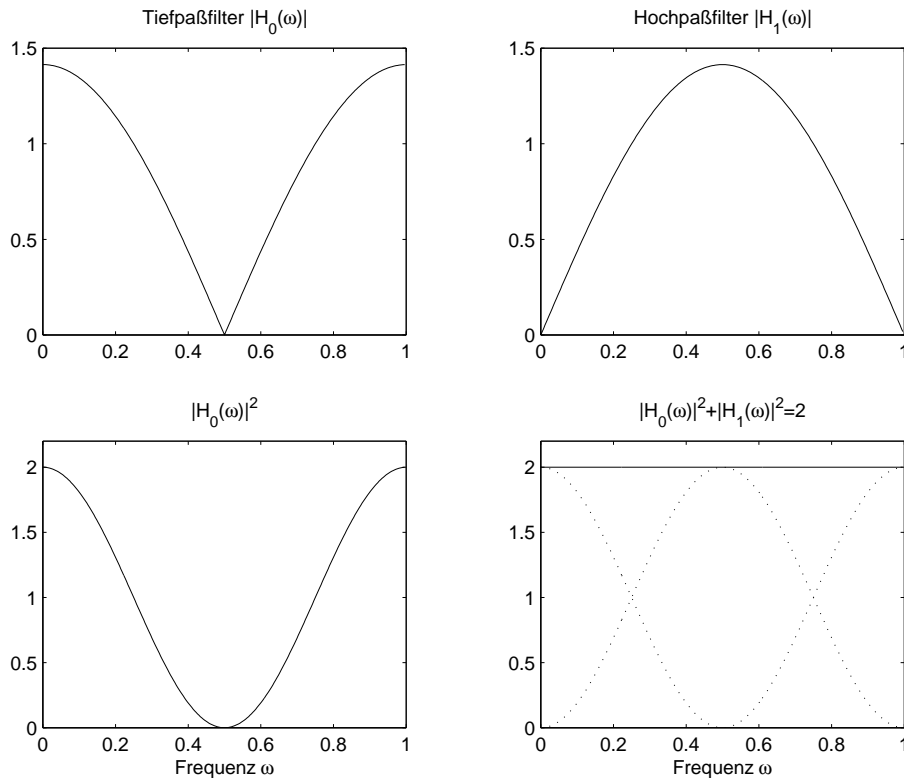


Abbildung 6.9: Tief- und Hochpaßfilter einer 2-Band ON-FB

Wir wollen, daß  $h_0$  ein Hochpaß- und  $h_1$  ein Tiefpaßfilter sind. Damit sollte also die Fouriertransformierte  $H_0$  in einer Umgebung von  $\omega = 0$  groß und in einer Umgebung von  $\omega = \frac{1}{2}$  klein sein. Gegenteiliges sollte für  $H_1$  gelten. Daher stellt man häufig die folgenden zusätzlichen *Tiefpaß-Bedingungen* an  $H_0$ :

$$H_0(0) = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad H_0\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (6.36)$$

Hieraus folgen mit (6.35) automatisch die *Hochpaß-Bedingungen* für  $H_1$ :

$$H_1(0) = 0 \quad \text{und} \quad H_1\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}. \quad (6.37)$$

Siehe auch Abbildung 6.9 für eine graphische Darstellung der Beziehung zwischen  $H_0$  und  $H_1$ .

Für einen Prototyp  $h_0 \in \ell^1(\mathbb{Z})$  fordert man daher neben der in Korollar 6.3.6 formulierten Bedingung

$$|H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega + \frac{1}{2})|^2 = 2$$

die Tiefpaß-Bedingung  $H_0(0) = \sqrt{2}$ . Daraus folgt dann automatisch  $H_0(\frac{1}{2}) = 0$ . Der in (6.33) durch alternierenden Flip definierte Filter

$$h_1(k) := (-1)^k \bar{h}_0(N - k)$$

erfüllt dann ebenfalls automatisch die Hochpaß-Bedingungen  $H_1(0) = 0$  und  $H_1(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$ .



## Kapitel 7

# Zusammenhang zwischen Wavelets, MRA und ON-FB

Im letzten Kapitel dieser Vorlesung wollen wir die Verbindung zwischen der Wavelettheorie mit ihren schnellen DWT-Algorithmen und der Theorie der orthogonalen Filterbänke herstellen. Erst als Mallat, Daubechies und andere die Beziehung zwischen der Berechnung von Waveletkoeffizienten und Filterbänken mit Hilfe der Multiskalenanalyse und den zugehörigen Skalierungskoeffizienten erkannt hatten, startete die Wavelettheorie in den 80er Jahren ihre rasante Entwicklung.

Wir werden in Abschnitt 7.1 erklären, wie die Skalierungskoeffizienten einer MRA als Tiefpaßfilter interpretiert werden können, der einen Prototyp für eine 2-Band ON-FB definiert. Die Umkehrung gilt allerdings nicht, d. h. nicht jeder Prototyp zu einer ON-FB kommt von den Skalierungskoeffizienten einer MRA. In Abschnitt 7.3 werden wir hinreichende Bedingungen herleiten, wann auch diese Umkehrung gilt. Dies liefert uns ein konkretes Verfahren zur Konstruktion von MRAs und damit auch Wavelets aus den Filterkoeffizienten geeigneter Prototypen.

In Abschnitt 7.2 widmen wir uns der Konstruktion von 2-Band ON-FB. Als Beispiel hierzu behandeln wir die Klasse der *Daubechies-* oder *Maxflat-Filter*, die uns schließlich zu der wichtigen Klasse der *Daubechies-Wavelets* führen werden. In dieser Vorlesung sind uns diese schon häufig in den Beispielen bei der Berechnung von DWTs begegnet.

### 7.1 Schnelle DWT-Algorithmen und ON-FBs

Höhepunkt von Kapitel 4 war die Herleitung schneller DWT-Algorithmen. Zur Berechnung der Wavelettransformationen wurden dabei nur die Koeffizienten der Skalierungsgleichung benutzt, während die Skalierungsfunktion und Wavelets selbst im Hintergrund blieben. Die Wavelets waren allerdings für die

Interpretation der Berechnungsergebnisse wichtig.

Wir wollen in diesem Abschnitt behandeln, wie man die Folge der Skalierungskoeffizienten als Faltungsfiler interpretieren kann, die einen Prototyp für eine 2-Band ON-FB definiert. Wir fassen hierzu die benötigten Ergebnisse von Kapitel 4 zusammen. Um eine einheitliche Notation zu erhalten, schreiben wir dabei im folgenden für die Skalierungskoeffizienten  $h(k)$  anstelle  $h_k$  und entsprechend  $g(k)$  anstelle  $g_k$ .

### 7.1.1 FDWT als Analysebank

Für eine MRA mit Skalierungsfunktion  $\varphi$  ist die Folge  $h = (h(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  definiert über die Skalierungsgleichung (siehe Lemma 4.2.1):

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) \varphi(2x - k). \quad (7.1)$$

Die assoziierte Koeffizientenfolge  $g = (g(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  ist definiert als alternierender Flip mit anschließender Konjugation und Verzögerung um einen Delay  $\tau$  (siehe (4.23)):

$$g(k) := (-1)^k \bar{h}(1 - k). \quad (7.2)$$

Da wir es in der Praxis meist mit FIR-Filtern zu tun haben, ist die zusätzliche Annahme  $g, h \in \ell^1(\mathbb{Z})$  keine allzu große Einschränkung.

Nach (4.31) und (4.32) berechnen sich die Skalierungs- bzw. Waveletkoeffizienten der  $m$ -ten Skala aus denen der  $(m - 1)$ -ten Skala über die Formeln:

$$w^m(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{g}(k - 2n) v^{m-1}(k), \quad (7.3)$$

$$v^m(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{h}(k - 2n) v^{m-1}(k). \quad (7.4)$$

Bis auf ein Vorzeichen und Konjugation sind dies also Faltungsprodukte mit anschließender 2-Dezimierung. Definiert man die Folgen  $h_0, h_1 \in \ell^1(\mathbb{Z})$  durch

$$h_0(k) := \bar{h}(-k) \quad \text{und} \quad h_1(k) := \bar{g}(-k), \quad (7.5)$$

dann gilt tatsächlich

$$w^m = (\downarrow 2)[h_1 * v^{m-1}], \quad (7.6)$$

$$v^m = (\downarrow 2)[h_0 * v^{m-1}]. \quad (7.7)$$

Mit anderen Worten erhält man die Folge der Waveletkoeffizienten  $w^m$  der  $m$ -ten Skala durch Faltung der Folge  $v^{m-1}$  der Skalierungskoeffizienten der  $(m - 1)$ -ten Skala mit dem Filter  $h_1$  und anschließendem Downsampling mit  $(\downarrow 2)$ . Analoges gilt für  $v^m$ .

Nach Lemma 4.2.3 genügen die Skalierungskoeffizienten der Orthogonalitätsbeziehung

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) \bar{h}(k + 2n) = \delta(n).$$

Hieraus ergibt sofort (mit  $\delta(n) = \delta(-n)$ ), daß das Filter  $h_0$  Doppelshift-orthonormal ist, also

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_0(k) \bar{h}_0(k - 2n) = \delta(n) \quad (7.8)$$

gilt. Damit definiert also  $h_0$  einen Prototyp für eine 2-Band ON-FB. Nach Korollar 6.3.6 gilt also

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \frac{1}{2})|^2 = 2 \quad (7.9)$$

für  $\omega \in \mathbb{R}$ . Diese Beziehung wurde auch schon für das Filter  $h$  im Rahmen der Wavelettheorie in Satz 4.2.5 formuliert. Derselbe Satz besagt auch, daß  $H(0) = \sqrt{2}$  und  $H(\frac{1}{2}) = 0$  gilt. Man rechnet leicht nach, daß dann diese Eigenschaften auch für das Filter  $h_0$  gelten, also

$$H_0(0) = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad H_0(\frac{1}{2}) = 0. \quad (7.10)$$

Mit anderen Worten genügt  $h_0$  den Tiefpaß-Bedingungen. Aus den Definitionen in (7.5) folgt, daß die Beziehung (7.2) auch für die Filter  $h_0$  und  $h_1$  gelten:

$$h_1(k) := (-1)^k \bar{h}_0(1 - k).$$

Dies ist also mit  $N = 1$  genau die Definition von  $h_1$  in Satz 6.3.5, der dann nach Unterabschnitt 6.3.4 den Hochpaß-Bedingungen genügt. Wir fassen das Ergebnis zusammen.

**Zusammenfassung:** Das Tiefpaßfilter  $h_0$  und Hochpaßfilter  $h_1$  definieren als Analysebank-Filter eine 2-Band ON-FB. Für die Eingabefolge  $x = v^{m-1}$  der Skalierungskoeffizienten der  $(m - 1)$ -ten Skala erhält man nach Durchlauf der Analysebank als Ausgabe die Folgen

$$y_0 = (\downarrow 2)[h_0 * x] = v^m \quad \text{und} \quad y_1 = (\downarrow 2)[h_1 * x] = w^m.$$

Dies sind die Skalierungs- bzw. Waveletkoeffizienten der  $m$ -ten Skala (siehe Abbildung 7.1).

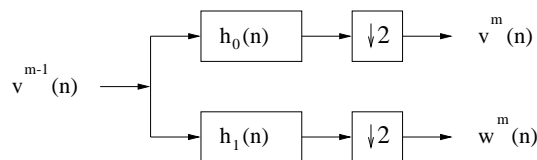


Abbildung 7.1: FDWT als 2-Band Analyse-Bank.

Wir betrachten nun die schnelle diskrete Wavelettransformation (FDWT) von Unterabschnitt 4.3.1 im Licht der Theorie der ON-FB. Ausgehend von der Folge

$v^0$  erhält man durch Anwendung der Analysebank die Folgen  $v^1$  und  $w^1$ . Das Spektrum von  $v^0$  wird in ein Signal des Tiefpaßbandes  $v^1$  und ein Signal des Hochpaßbandes  $w^1$  zerlegt. Dieses Verfahren kann nun wiederholt werden, indem nun  $v^1$  als Eingangssignal für die Analysebank verwendet wird. Man erhält eine weitere Zerlegung in eine „tiefes“ Tiefpaßband  $v^2$  und in ein „hohes“ Tiefpaßband  $w^2$ . Man fährt nun mit  $v^2$  auf dieselbe Weise fort. Dies führt auf sogenannte *iterierte Filterbänke* oder auch spezieller auf *2-Band Analyse-Bäume*. In Abbildung 7.2 sind die ersten drei Iterationsschritte dargestellt.

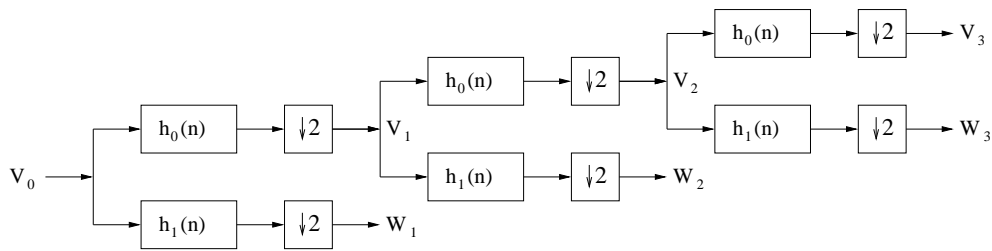


Abbildung 7.2: Drei Iterationen des 2-Band Analyse-Baumes.

Im ersten Schritt wird das Spektrum in zwei Bänder gleicher Breite geteilt, in ein Tiefpaßband und in ein Hochpaßband. Im zweiten Schritt wird dann das Tiefpaß-Band wiederum in zwei gleiche Teile geteilt, also in Bänder, die jeweils ein Viertel des vollen Frequenzspektrums abdecken, usw. Das Resultat, in Abbildung 7.3 dargestellt, ist eine Aufteilung des Frequenzspektrums in Bänder, deren Breite in Richtung niedriger Frequenzen logarithmisch abnimmt (um den Faktor 2).

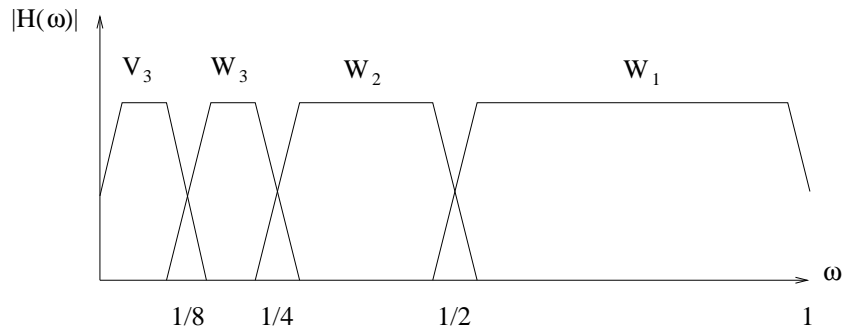


Abbildung 7.3: Frequenzbänder des Analysis-Baumes nach drei Iterationen.

In Filterbank-Sprache nennt man dieses Verfahren auch *konstante Q-Filterung*, da das Verhältnis der Bandbreite zum Zentrum der Frequenz dieses Bandes konstant ist. Es ist interessant, daß unser Verfahren dem Vorgehen in der Musik ähnelt, wo man ein Skalenaufteilung in Oktaven hat. Auch das menschliche Ohr reagiert auf Frequenzen in ähnlich logarithmischer Weise.

## 7.1.2 FIDWT als Synthesebank

Wir wenden uns nun der diskreten Waveletrekonstruktion zu. Nach dem letzten Abschnitt erwarten wir natürlich, daß dies der Anwendung der Synthesebank obiger ON-FB entspricht. Wir prüfen das im folgenden nach. Wir erinnern daran, daß die Skalierungskoeffizienten  $v^{m-1}$  der  $(m-1)$ -ten Skala aus den Skalierungs- und Waveletkoeffizienten  $v^m$  bzw.  $w^m$  der  $m$ -ten Skala nach folgender Formel zurückgewonnen werden können (siehe (4.35)):

$$v^{m-1}(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v^m(k)h(n-2k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} w^m(k)g(n-2k). \quad (7.11)$$

Definiert man, wie bei einer ON-FB üblich, die Filter der Synthesebank durch  $f_i(k) := \bar{h}_i(-k)$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , dann gilt nach Definition der Filter  $h_0$  und  $h_1$  in (7.5):

$$f_0(k) = h(k) \quad \text{und} \quad f_1(k) = g(k). \quad (7.12)$$

Damit schreibt sich die Formel (7.11) als

$$v^{m-1} = f_0 * ((\uparrow 2)[v^m]) + f_1 * ((\uparrow 2)[w^m]), \quad (7.13)$$

und wie erwartet ist dies nichts anderes als Anwendung der Synthesebank auf die Signale  $v^m$  und  $w^m$ : Upsampling der Signale mit  $(\uparrow 2)$ , Filterung mit  $f_0$  bzw.  $f_1$  und anschließender Addition der so erhaltenen Signale (siehe Abbildung 7.4).

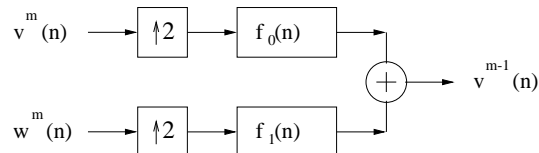


Abbildung 7.4: FIDWT als 2-Band Synthese-Bank.

Die schnelle diskrete Waveletrekonstruktion (FIDWT) von Unterabschnitt 4.3.2 ist nun nichts anderes als die Iteration der Synthesebank, die zu einem sogenannten *2-Band Synthese-Baum* führt, dargestellt in Abbildung 7.5.

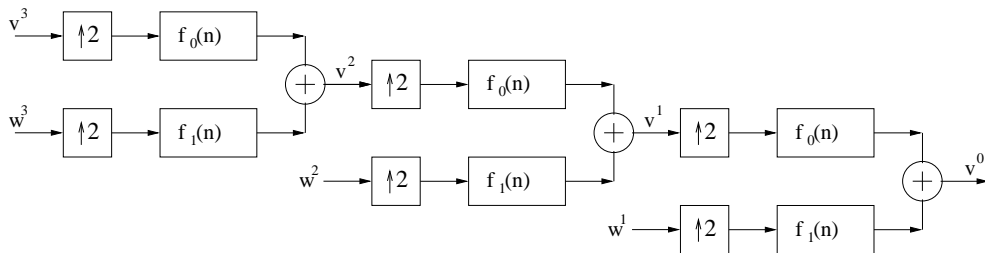


Abbildung 7.5: Drei Iterationen des 2-Band Synthese-Baumes.

## 7.2 Konstruktion von 2-Band ON-FB

In Kapitel 6 wurde das Konzept der ON-FB vorgestellt und wurden die hierfür hinreichenden und notwendigen Bedingungen über die Filterkoeffizienten, in Matrixform und im  $z$ -Bereich formuliert. In Abschnitt 7.1 haben wir gezeigt, wie sich die DWT-Algorithmen in dieses Konzept einbetten lassen. Bisher haben wir allerdings noch nichts über die Existenz von ON-FB gesagt. Es wird höchste Zeit, auf die folgenden Fragen einzugehen:

- Gibt es überhaupt Filter mit den geforderten Eigenschaften?
- Wenn ja, wie konstruiert man diese?
- Können beim *Filterdesign* zusätzliche, erwünschte Eigenschaften der Filter berücksichtigt werden (z. B. FIR, lineare Phase, Vorgabe von Spektraleigenschaften, etc.)

Wir wollen in diesem Abschnitt Antworten auf diese Fragen geben, konzentrieren uns dabei aber auf die Konstruktion von ON-FB. Die vorgestellten Konzepte können modifiziert und verallgemeinert werden und führen dann zu FB mit anderen Eigenschaften oder allgemeineren PR-FB, z. B. *linearphasige Filterbänke*, *biorthogonale Filterbänke*, etc.

Das von uns vorgestellte Verfahren zum Filterdesign beruht auf der sogenannten *Spektralfaktorisierung von Halbbandfiltern*.

### 7.2.1 Halbbandfilter

Ziel dieses Kapitels ist es, einen Prototyp  $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$  für eine ON-FB zu konstruieren. Im  $z$ -Bereich haben wir hierfür nach (6.34) die äquivalente Bedingung

$$\overline{H}(z^{-1})H(z) + \overline{H}(-z^{-1})H(-z) = 2, \quad (7.14)$$

die sich im  $\omega$ -Bereich nach Korollar 6.3.6 als

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \frac{1}{2})|^2 = 2 \quad (7.15)$$

schreibt. Wenn man das Filter  $P$  im  $z$ -Bereich durch das Produkt

$$P(z) = \overline{H}(z^{-1})H(z), \quad (7.16)$$

definiert (man bezeichnet  $P$  häufig auch als *Produktfilter*), schreiben sich die Formeln (7.14) bzw. (7.15) als:

$$P(z) + P(-z) = 2 \quad \text{bzw.} \quad P(\omega) + P(\omega + \frac{1}{2}) = 2. \quad (7.17)$$

Sei  $p = (p(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  das Filter mit  $z$ -Transformierter  $P$ , dann folgt aus (7.17), daß alle Koeffizienten  $p(k)$  mit geraden Index  $k$  verschwinden, bis auf  $p(0) = 1$ . Dies ist die definierende Eigenschaft sogenannter *Halbbandfilter*:

**Definition 7.2.1** Ein Filter  $p = (p(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$  heißt Halbbandfilter, wenn die Koeffizienten folgenden Bedingungen genügen:

$$p(k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = 0, \\ 0, & \text{falls } k \neq 0 \text{ und gerade.} \end{cases}$$

Diese Bedingungen kann man auch elegant unter Benutzung des 2-Dezimierers formulieren:

$$(\downarrow 2)[p] = \delta, \quad (7.18)$$

d. h. Downsampling mit dem Faktor 2 ergibt den Einheitsimpuls. Die Halbbandbedingung  $P(\omega) + P(\omega + \frac{1}{2}) = 2$  bedeutet, daß der Graph von  $P$  punktsymmetrisch ist zur Halbbandfrequenz  $\omega = \frac{1}{4}$  (siehe Abbildung 7.6). Dies erklärt auch den Namen.

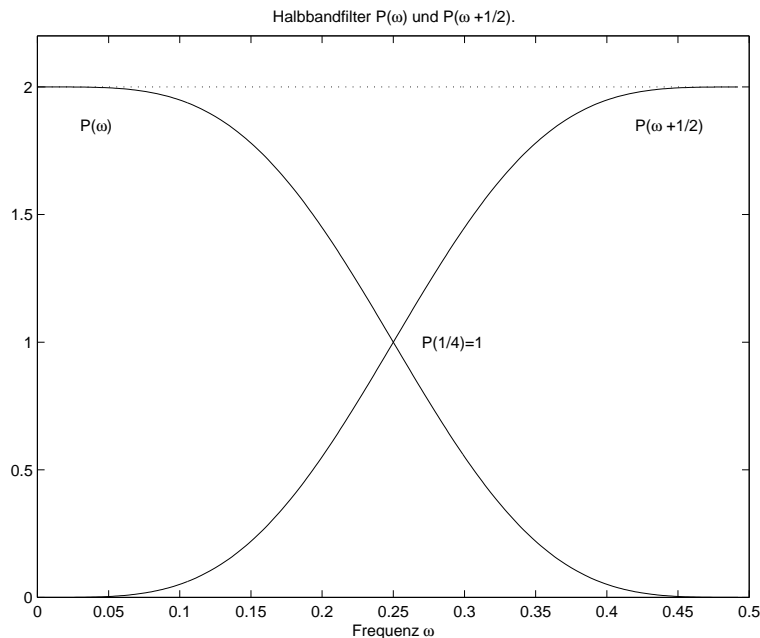


Abbildung 7.6: Frequenzantwort eines Halbbandfilters.

## 7.2.2 Spektralfaktorisierung von positiven FIR-Filtern

Wir haben im letzten Unterabschnitt in (7.16) Produktfilter der Form  $P(z) = \overline{H}(z^{-1})H(z)$  definiert. Im Falle eines Prototyps  $H$  sind wir dabei auf die Halbbandeigenschaften von  $P$  gestoßen. In diesem Unterabschnitt wollen wir andere Eigenschaften dieser Produktfilter  $P$  untersuchen, wobei wir nun nicht mehr fordern, daß  $H$  ein Prototyp ist. Allerdings beschränken wir uns im folgenden auf endliche Filter  $P$  und  $H$ .

**Definition 7.2.2** *Es sei  $P$  ein FIR-Filter. Existiert ein kausales FIR-Filter  $H$  mit der Eigenschaft*

$$P(z) = \overline{H}(z^{-1})H(z),$$

*dann definiert dies eine sogenannte Spektralzerlegung von  $P$ , und  $H$  wird als Spektralfaktor von  $P$  bezeichnet.*

Besitzt ein Filter  $P$  eine wie in der Definition 7.2.2 angegebene Spektralzerlegung, dann gilt im  $\omega$ -Bereich

$$P(\omega) = |H(\omega)|^2,$$

und daraus folgt die Positivität der Frequenzantwort, also:

$$\forall \omega \in \mathbb{R} : P(\omega) \geq 0. \quad (7.19)$$

Weiterhin folgt aus  $P(z) = \overline{H}(z^{-1})H(z)$  sofort

$$P(z) = \overline{P}(z^{-1}),$$

d. h. die Folge der Filterkoeffizienten ist konjugiert symmetrisch:

$$\forall k \in \mathbb{Z} : p(k) = \bar{p}(-k). \quad (7.20)$$

Hieraus folgt dann sofort, daß  $P$  von der Form

$$P(z) = \sum_{k=-M}^M p(k)z^{-k},$$

$M \in \mathbb{N}$  geeignet, ist. Die Filterlänge ist  $2M + 1$ , also ungerade. Die beiden Bedingungen (7.19) und (7.20) sind offensichtlich notwendig für die Existenz einer Spektralzerlegung. Der folgende Satz besagt, daß diese Bedingungen tatsächlich auch hinreichend sind.

**Satz 7.2.3** *Es sei  $P(z) = \sum_{k=-M}^M p(k)z^{-k}$ ,  $p(M) \neq 0$ , ein FIR-Filter mit den zusätzlichen Eigenschaften*

$$(i) \quad P(e^{2\pi i \omega}) \geq 0 \text{ für alle } \omega \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \quad p(k) = \bar{p}(-k) \text{ für alle } k \in \{-M, \dots, M\}.$$

*Dann besitzt  $P$  eine Spektralzerlegung, d. h. es existiert ein kausales FIR-Filter  $H$  mit*

$$P(z) = \overline{H}(z^{-1})H(z).$$

*Die Spektralzerlegung ist im allgemeinen nicht eindeutig.*

**Beweis:** Wir geben eine kurze Beweisskizze. Weitere Einzelheiten kann man zum Beispiel in Kapitel 5 des Buches [Strang/Nguyen] finden. Wir betrachten das Polynom  $Q(z) := z^M P(z) \in \mathbb{C}[z]$ . Nach dem Nullstellensatz für Polynome über  $\mathbb{C}$  zerfällt  $Q$  in Linearfaktoren. Wegen  $p(M) \neq 0$  ist  $z = 0$  keine Nullstelle von  $Q$ . Bezeichnet  $z_k \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle von  $Q$ , dann folgert man aus (ii), daß auch  $(\bar{z}_k)^{-1}$  eine Nullstelle von  $Q$  sein muß. Im Falle  $|z_k| = 1$  (in diesem Fall gilt  $z_k = (\bar{z}_k)^{-1}$ ) folgert man aus (i), daß die Nullstelle in gerader Vielfachheit vorkommen muß. Man hat also bei geeigneter Numerierung (neue deutsche Rechtschreibung: Nummerierung) der Nullstellen eine Zerlegung von  $Q$  der Form

$$Q(z) = z^M P(z) = p(M) \prod_{k=1}^L (z - z_k) \left( z - \frac{1}{\bar{z}_k} \right) \prod_{k=L+1}^M (z - z_k)^2, \quad (7.21)$$

wobei  $|z_k| \neq 1$  für  $k = 1, \dots, L$  und  $|z_k| = 1$  für  $k = L + 1, \dots, M$ . Definiert man das kausale FIR-Filter  $H$  durch

$$H(z) = c \cdot z^{-M} \prod_{k=1}^M (z - z_k)$$

mit geeigneter Konstante  $c \in \mathbb{C}$ , dann folgt die Gleichung

$$z^M \overline{H}(z^{-1}) H(z) = Q(z),$$

woraus sich die Behauptung des Satzes ergibt. Ersetzt man in der Definition von  $H$  einen Faktor  $(z - z_k)$  durch  $(z - (\bar{z}_k)^{-1})$  bei geeigneter Anpassung der Konstanten  $c$ , so erhält man ebenfalls eine Spektralzerlegung, was die Uneindeutigkeit im allgemeinen zeigt.  $\square$

Wir können der Versuchung nicht widerstehen doch ein paar allgemeinere Bemerkungen über beliebige Faktorisierungen der Form  $P(z) = F(z)H(z)$  zu machen. Hat man eine Zerlegung von  $P$  der Form (7.21) in Linearfaktoren, so muß man diese bei einer Zerlegung auf die Faktoren  $H$  und  $F$  verteilen, d. h. einige Nullstellen von  $P$  teilt man  $H$  zu, die verbleibenden definieren dann  $F$ . Diese Zuteilung hängt von den Eigenschaften ab, die man sich für die von  $F$  und  $H$  definierten Filter erwünscht:

- Will man *reelle* Filter, dann müssen die Nullstellen  $z_k$  und  $\bar{z}_k$  entweder beide dem Faktor  $F$  oder beide dem Faktor  $H$  zugeteilt werden.
- Will man *symmetrische* Filter, dann müssen die Nullstellen  $z_k$  und  $(z_k)^{-1}$  zusammenbleiben.
- Falls  $F(z) = \overline{H}(z^{-1})$  gelten soll, müssen die Nullstellen  $z_k$  und  $(\bar{z}_k)^{-1}$  getrennt werden. Dies führt auf die Spektralzerlegung und ergibt orthogonale FB, falls  $P$  ein Halbbandfilter ist.

Geht man von einem Filter  $P$  aus wie in Satz 7.2.3, der als zusätzliche Voraussetzung reelle Koeffizienten hat, dann ist mit einer Nullstelle  $z_k$  auch  $\bar{z}_k$

eine Nullstelle. Für solche Filter treten also nicht-reelle Nullstellen mit  $|z_k| \neq 1$  immer in Quadrupeln

$$z_k, \bar{z}_k, (\bar{z}_k)^{-1}, (z_k)^{-1}$$

auf. Damit ist eine Spektralzerlegung von  $P$  wie im Beweis zu Satz 7.2.3 möglich, bei der zusätzlich mit dem Faktor  $(z - z_k)$  auch der Faktor  $(z - \bar{z}_k)$  in  $H$  vorkommt. Dies führt dann zu einem kausalen FIR-Filter mit reellen Koeffizienten. Wir fassen das Ergebnis in einem Korollar zusammen:

**Korollar 7.2.4** *Es sei  $P(z) = \sum_{k=-M}^M p(k)z^{-k}$  ein FIR-Filter mit reellen Koeffizienten  $p(k)$ ,  $k \in \{-M, \dots, M\}$ , das den Eigenschaften von Satz 7.2.3 genüge. Dann gibt es eine Spektralzerlegung von  $P$  mit einem Spektralfaktor  $H$ , der ebenfalls reelle Koeffizienten hat.*

### 7.2.3 Spektralzerlegung von Halbbandfiltern

Verbindet man nun die Ergebnisse von den Unterabschnitten 7.2.1 und 7.2.2, so ergibt sich folgendes Konstruktionsverfahren für eine 2-Band ON-FB:

**Schritt 1:** Konstruiere ein Filter  $P(z) = \sum_{k=-M}^M p(k)z^{-k}$ ,  $p(M) \neq 0$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $P$  ist ein Halbbandfilter, also  $P(z) + P(-z) = 2$ ,
- (ii)  $p(k) = \bar{p}(-k)$  für alle  $k \in \{-M, \dots, M\}$ ,
- (iii)  $P(e^{2\pi i\omega}) \geq 0$  für alle  $\omega \in \mathbb{R}$ .

Optional sollen auch gelten:

- (iv)  $P$  hat reelle Koeffizienten.
- (v)  $P(z) = 2$  für  $z = 1$ .

**Schritt 2:** Finde die Nullstellen von  $P$  und führe eine Spektralzerlegung

$$P(z) = \overline{H}(z^{-1})H(z),$$

nach Satz 7.2.3 durch, wobei  $H$  ein kausales FIR-Filter ist. Hierzu reichen die Eigenschaften (ii) und (iii). Hat  $P$  auch Eigenschaft (iv), dann kann nach Korollar 7.2.4 erreicht werden, daß auch  $H$  reelle Koeffizienten hat. Gilt (v) dann kann  $H$  so gewählt werden, daß die Tiefpaßbedingung  $H(z) = \sqrt{2}$  für  $z = 1$  erfüllt ist.

**Schritt 3:** Das Filter  $H$  genügt wegen Eigenschaft (i) der Bedingung

$$\overline{H}(z^{-1})H(z) + \overline{H}(-z^{-1})H(-z) = 2,$$

und definiert damit einen Prototyp für eine 2-Band ON-FB. Konstruiere die Filter  $h_0, h_1, f_0$  und  $f_1$  wie in Unterabschnitt (6.3.3).

**Ergebnis:** Alle Filter der so konstruierten ON-FB haben die Länge  $M + 1$ , wobei  $h_0$  und  $h_1$  kausal sind. Durch einen zusätzlichen  $M$ -fachen Delay  $z^{-M}$  der Synthesebankfilter  $f_0$  und  $f_1$  kann erreicht werden, daß alle Filter kausal sind (siehe Unterabschnitt 6.3.3). Falls Eigenschaft (iv) gilt, sind die Koeffizienten aller Filter reell. Falls Eigenschaft (v) gilt, dann ist  $h_0$  ein Tiefpaß- und  $h_1$  ein Hochpaßfilter.

Natürlich läßt das so beschriebene Verfahren noch viele Fragen offen, ist das Problem der Konstruktion von ON-FB doch nun auf das Problem der Konstruktion von Filtern  $P$  mit den Eigenschaften (i) bis (v) verschoben worden. Wir werden im nächsten Unterabschnitt konkret eine Klasse solcher Polynome konstruieren, die schließlich zu den Daubechies-Filtern führen werden.

Ein weiterer kritischer Punkt ist die Berechnung der Nullstellen von  $P$  in Schritt 2. Es gibt im allgemeinen keine Algorithmen für die exakte Bestimmung der Nullstellen, so daß numerische Verfahren verwendet werden müssen. Das bekannteste numerische Verfahren ist das sogenannte *Newton-Verfahren*, es gibt aber effizientere Verfahren. MATLAB verwendet zum Beispiel eine Eigenwertmethode, bei der die Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms vom Grad  $N$  auf die Bestimmung der Eigenwerte einer  $N \times N$ -Matrix zurückgeführt wird. Dennoch bleibt die Nullstellenbestimmung insbesondere für Polynome hohen Grades ein numerisch schwieriges Problem, was zu schlechten Approximationen der Nullstellen führen kann. (Mit diesem Problem beschäftigt sich seit langer Zeit Herr Schönhage, der u. a. in [Schönhage] und [Schönhage/Grotefeld/Vetter] numerisch stabile Verfahren zur Nullstellenbestimmung beschreibt.) Werden diese fehlerhaften Nullstellen zur Bestimmung der Filterkoeffizienten des Prototyp  $H$  verwendet, so kann dies zu Filterbänken führen, die unter Umständen nicht mehr annähernd der PR-Eigenschaft genügen, geschweige denn orthonormal sind.

## 7.2.4 Konstruktion der Daubechies-Halbbandfilter

Wir geben in diesem Unterabschnitt die Konstruktion einer Familie von Polynomen  $P_d$ ,  $d \in \mathbb{N}$ , an, und weisen nach, daß diese den Eigenschaften (i) bis (v) in Schritt 1 des Unterabschnittes 7.2.3 genügen. Dieses Polynom wollen wir im folgenden auch *Daubechies-Halbbandfilter* nennen. Im nächsten Unterabschnitt 7.2.5 behandeln wir eine spezielle Spektralfaktorisierung dieser Polynome, die auf die sogenannten *Daubechies-* oder *Maxflat-Filter* führen. Dort werden wir auch die Motivation für die hier definierten Polynome geben und konzentrieren uns in diesem Unterabschnitt auf die rein algebraische Konstruktion.

Es bezeichne  $\mathbb{C}[[X]]$  den Ring der formalen Potenzreihen über  $\mathbb{C}$  in der Unbestimmten  $X$ . Ausgangspunkt der Konstruktion ist die Potenzreihe

$$\left(\frac{1}{1-X}\right)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d+k-1}{k} X^k \quad (7.22)$$

für ein beliebiges, aber festes  $d \in \mathbb{N}$ . Die Gleichung (7.22) kann man leicht durch vollständige Induktion beweisen. Wir wollen hier als mathematisches Bonbon einen direkten Beweis vorführen.

**Beweis von (7.22):** Die linke Seite von (7.22) schreibt sich unter Benutzung der geometrischen Reihe und Ausmultiplikation wie folgt:

$$\left(\frac{1}{1-X}\right)^d = \left(\sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} X^\ell\right)^d = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \left(\sum_{(\ell_1, \dots, \ell_d) \in \mathbb{N}_0^d: \sum \ell_i = k} 1\right) X^k.$$

Wir müssen also für  $k \in \mathbb{N}_0$  die Anzahl der  $d$ -Tupel  $(\ell_1, \dots, \ell_d) \in \mathbb{N}_0^d$  bestimmen, für die gerade  $\sum \ell_i = k$  gilt. Definiert man  $\lambda_i = \ell_1 + \dots + \ell_i$  für  $i = 1, \dots, d$ , dann gilt  $\lambda_d = k$  und obige Anzahl entspricht gerade der Anzahl der schwach monoton steigenden Folgen

$$0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{d-1} \leq k.$$

Diese wiederum stehen durch die Relation  $\mu_i = \lambda_i + i$  für  $i = 1, \dots, d-1$ , in Bijektion zu den stark monoton steigenden Folgen

$$1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_{d-1} \leq k + d - 1.$$

Die Anzahl solcher Folgen ist aber nichts anderes als die Anzahl der  $(d-1)$ -elementigen Teilmengen der Menge  $\{1, 2, \dots, k + d - 1\}$ , die durch die Binomialkoeffizienten

$$\binom{k + d - 1}{d - 1} = \binom{k + d - 1}{k}$$

gegeben ist. Das ist gerade die Behauptung.  $\square$

Die Zahl  $d$  wird den Grad von  $P_d$  bestimmen und damit die Anzahl der Filterkoeffizienten. Wir definieren das Polynom  $\tilde{B}_d(X)$  vom Grad  $(d-1)$ , also  $d$  Koeffizienten, durch die ersten  $d$  Terme dieser Potenzreihe:

$$\tilde{B}_d(X) := \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d+k-1}{k} X^k = 1 + dX + \frac{d(d+1)}{2} X^2 + \dots + \binom{2d-2}{d-1} X^{d-1}.$$

Dann gilt die Beziehung

$$\tilde{B}_d(X) = (1-X)^{-d} + O(X^d), \quad (7.23)$$

wobei die Bezeichnung  $O(X^d)$  für eine Potenzreihe in  $\mathbb{C}[[X]]$  stehen soll, deren Monome vom Grad kleiner als  $d$  verschwinden. Setzt man

$$\tilde{P}_d(X) := 2(1-X)^d \tilde{B}_d(X), \quad (7.24)$$

dann definiert  $\tilde{P}_d$  ein Polynom vom Grad  $(2d-1)$  mit der Eigenschaft

$$\tilde{P}_d(X) = 2(1-X)^d [(1-X)^{-d} + O(X^d)] = 2 + O(X^d). \quad (7.25)$$

Mit anderen Worten haben  $\tilde{P}_d$  und seine ersten  $(d-1)$  Ableitungen eine Nullstelle bei  $X = 1$  und  $X = 0$ , außer  $\tilde{P}_d(0) = 2$ . Aus Gradgründen ist  $\tilde{P}_d$  durch

diese Eigenschaft eindeutig festgelegt. Für die Ableitung  $\tilde{P}'_d$  ergibt sich daraus die Darstellung

$$\tilde{P}'_d(X) = -c \cdot X^{d-1}(1-X)^{d-1} \quad (7.26)$$

mit einer geeigneten Konstanten  $c \in \mathbb{R}$ . Addiert man die Polynome  $\tilde{P}_d(X)$  und  $\tilde{P}_d(1-X)$ , beide vom Grad  $(2d-1)$ , so nimmt dieses an den Stellen  $X=0$  und  $X=1$  den Wert 2 an, während die ersten  $(d-1)$  Ableitungen an diesen Stellen verschwinden. Wiederum folgt aus Gradgründen ( $2d$  Bedingungen dieser Art legen ein Polynom vom Grad  $(2d-1)$  eindeutig fest):

$$\tilde{P}_d(X) + \tilde{P}_d(1-X) = 2. \quad (7.27)$$

Man erkennt, daß dies schon sehr einer Halbbandbedingung ähnelt. Wir ersetzen nun die unabhängige Variable  $X$  durch

$$X = \left(\frac{1-z}{2}\right) \left(\frac{1-z^{-1}}{2}\right). \quad (7.28)$$

Damit erhalten wir

$$P_d(z) := \tilde{P}_d\left(\left(\frac{1-z}{2}\right) \left(\frac{1-z^{-1}}{2}\right)\right) \quad (7.29)$$

und

$$B_d(z) := \tilde{B}_d\left(\left(\frac{1-z}{2}\right) \left(\frac{1-z^{-1}}{2}\right)\right). \quad (7.30)$$

Aus (7.28) berechnet man

$$1-X = \left(\frac{1+z}{2}\right) \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right), \quad (7.31)$$

womit sich dann für  $P_d$  die Formel

$$P_d(z) = 2 \left(\frac{1+z}{2}\right)^d \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^d \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d+k-1}{k} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \left(\frac{1-z^{-1}}{2}\right)^k$$

ergibt. Damit definiert  $P_d$  ein Element in  $\mathbb{C}[[z]]$ , und stellt die  $z$ -Transformierte eines FIR-Filters dar. Wir zeigen nun, daß  $P_d$  den Eigenschaften (i) bis (v) in Schritt 1 des Unterabschnittes 7.2.3 genügt.

Das Polynom  $\tilde{P}_d$  ist vom Grad  $(2d-1)$  (entspricht  $2d$  Koeffizienten) und damit ist nach (7.29) das Filter  $P_d$  von der Form

$$P_d(z) = \sum_{k=-M}^M p(k)z^{-k}$$

mit  $M = 2d-1$  (also  $(4d-1)$  Koeffizienten). Die Bedingung (iv), daß  $P_d$  reelle Koeffizienten hat, folgt sofort aus den Definitionen. Damit reduziert sich Bedingung (ii) auf  $p(k) = p(-k)$  für alle  $k \in \{-M, \dots, M\}$ , was äquivalent zu  $P_d(z) = P_d(z^{-1})$  ist. Diese Eigenschaft von  $P_d$  ist aber unmittelbar aus der

Definition (7.29) ersichtlich. Ebenso unmittelbar sieht man  $P_d(z) = 2$  für  $z = 1$ , also Eigenschaft (v). Die Halbbandeigenschaft (i) von  $P_d$  ergibt sich aus (7.27) und den Substitutionen (7.28) und (7.31). Es gilt:

$$P_d(z) + P_d(-z) = \tilde{P}_d(X) + \tilde{P}_d(1 - X) \stackrel{(7.27)}{=} 2.$$

Damit ist also nur noch Bedingung (iii) zu zeigen. Dazu untersuchen wir, wie sich  $P_d$  im  $\omega$ -Bereich darstellt. Wir setzen in (7.29)  $z = e^{2\pi i\omega}$  unter Berücksichtigung der Identitäten

$$\begin{aligned} X &= \left(\frac{1-z}{2}\right) \left(\frac{1-z^{-1}}{2}\right) = \frac{1-\cos\omega}{2}, \\ 1-X &= \left(\frac{1+z}{2}\right) \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right) = \frac{1+\cos\omega}{2}, \end{aligned}$$

die man leicht nachrechnet. Damit erhält man die folgende Darstellung von  $P_d$  im  $\omega$ -Bereich:

$$P_d(\omega) = \left(\frac{1+\cos\omega}{2}\right)^d \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d+k-1}{k} \left(\frac{1-\cos\omega}{2}\right)^k. \quad (7.32)$$

Da in dieser Darstellung jeder auftretende Faktor und damit auch Summand offensichtlich für alle  $\omega \in \mathbb{R}$  reell und nicht-negativ ist, gilt dasselbe für  $P_d(\omega)$ , womit auch (iii) gezeigt ist.

### 7.2.5 Daubechies- oder Maxflat-Filter

Nach Unterabschnitt 7.2.3 besitzt  $P_d$  eine Spektralzerlegung mit einem Spektralfaktor  $H$ , der ein FIR-Filter der Länge  $d$  mit reellen Koeffizienten ist und einen Prototypen mit Tiefpaßeigenschaft für eine 2-Band ON-FB definiert. Dieser Spektralfaktor ist aber nach Satz 7.2.3 im allgemeinen nicht eindeutig definiert. Eine spezielle Wahl des Spektralfaktors, die sich durch *minimale Phase* und *maximale Flachheit* im  $\omega$ -Bereich auszeichnet, führt auf die sogenannten *Daubechies-Filter* oder *Maxflat-Filter*. Wir gehen nun auf die Details näher ein.

Zunächst untersuchen wir die Nullstellen des Halbbandfilters  $P_d$ , das die Darstellung

$$P_d(z) = 2 \left(\frac{1+z}{2}\right)^d \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^d B_d(z)$$

besitzt. Die ersten beiden Faktoren liefern jeweils in  $z = -1$  eine  $d$ -fache Nullstelle. Wir müssen nur noch den dritten Faktor  $B_d(z)$  untersuchen, der sich im  $\omega$ -Bereich

$$B_d(\omega) = \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d+k-1}{k} \left(\frac{1-\cos\omega}{2}\right)^k$$

schreibt (vgl. (7.32)). Dieser Faktor ist offensichtlich für alle  $\omega \in \mathbb{R}$  echt positiv, was im  $z$ -Bereich zur Folge hat, daß  $B_d(z)$  für  $|z| = 1$  keine Nullstellen hat.

Weiterhin ist  $z = 0$  keine Nullstelle und mit  $z_k$  ist auch  $(\bar{z}_k)^{-1}$  Nullstelle. Damit hat  $B_d(z)$  eine Nullstellenmenge der Form

$$\left\{ z_1, \dots, z_{d-1}, \frac{1}{\bar{z}_1}, \dots, \frac{1}{\bar{z}_{d-1}} \right\}$$

wobei  $0 < |z_k| < 1$  für  $k \in \{1, \dots, d-1\}$ . Wir definieren nun einen Faktor von  $P_d$  durch  $d$  Nullstellen bei  $z = -1$  und die Nullstellen  $z_1, \dots, z_{d-1}$  innerhalb des Einheitskreises. Dies liefert nach dem Beweis des Satzes 7.2.3 bei Multiplikation mit einer geeigneten Konstanten  $c \in \mathbb{C}$  auch tatsächlich einen Spektralfaktor, der sich durch die Wahl der betragsmäßig kleinsten Nullstellen auszeichnet und dadurch eindeutig bestimmt ist. Dieser Spektralfaktor heißt *Daubechies-Filter* oder *Maxflat-Filter*, den wir im folgenden mit  $D_d$  bezeichnen. Es gilt also

$$D_d(z) = c \cdot (1 + z^{-1})^d \prod_{k=1}^{d-1} (1 - z_k z^{-1}). \quad (7.33)$$

Wir fassen nun die Eigenschaften der Daubechies-Filter  $D_d$  zusammen und gehen danach auf die einzelnen Punkte näher ein.

- (i)  $D_d$  ist ein kausales FIR-Filter mit  $2d$  reellen Koeffizienten. Es ist Doppelschift-orthonormal und erfüllt die Tiefpaßbedingung und definiert damit einen Prototypen für eine 2-Band ON-FB.
- (ii) Unter allen möglichen Spektralfaktoren von  $P_d$  besitzt  $D_d$  sogenannte *minimale Phase*, was gleichbedeutend mit der Wahl der betragsmäßig kleinsten Nullstellen ist.
- (iii) Die Frequenzantwort  $D_p(\omega)$  ist *maximal flach* bei  $\omega = \frac{1}{2}$  unter allen Doppelschift-orthonormalen FIR-Filtern mit Tiefpaßeigenschaft der Filterlänge  $2d$ . Der Grad der Flachheit bei  $\omega = \frac{1}{2}$  ist  $(d-1)$ , was einer  $d$ -fachen Nullstelle bei  $\omega = \frac{1}{2}$  entspricht. Daher bezeichnet man  $D_d$  auch als *Maxflat-Filter*.

Die Eigenschaften in (i) folgen aus Satzes 7.2.3. Da bei der Wahl der Nullstellen für  $D_d$  automatisch mit  $z_k$  auch  $\bar{z}_k$  verwendet wird, sind die Koeffizienten reell.

Ein Filter mit *minimaler Phase* ist nach Definition ein Filter, dessen  $z$ -Transformierte nur Nullstellen innerhalb oder auf dem Einheitskreis hat. Damit ist (ii) nach Konstruktion von  $D_d$  gültig. Diese Eigenschaft ist aus Stabilitätsgründen erwünschenswert (siehe z. B. [ASVI]).

Wir kommen nun auf (iii) zu sprechen, was uns auch zu der Motivation der Produktfilter  $P_d$  führt. Man sagt, die Fouriertransformierte  $H$  eines Filters  $h$  ist in  $\omega$  *flach vom Grad  $d$* , wenn an dieser Stelle die ersten  $d$  Ableitungen von  $H$  verschwinden. Für ein Doppelschift-orthonormales FIR-Filter  $H$  mit Tiefpaßeigenschaft gilt im  $\omega$ -Bereich  $H(0) = \sqrt{2}$  und  $H(\frac{1}{2}) = 0$ . Ein solches FIR-Filter mit  $N$  Koeffizienten heißt dann *maximal flach*, wenn es an der Stelle  $\omega = \frac{1}{2}$

unter allen Doppelschift-orthonormalen FIR-Filtern fester Filterlänge mit Tiefpaßeigenschaft die maximale Anzahl verschwindender Ableitungen hat. Die Eigenschaft (iii) folgt nun aus dem folgenden Satz:

**Satz 7.2.5** *Ein Doppelschift-orthonormales kausales FIR-Filter  $H$  mit Tiefpaßeigenschaft, das in  $\omega = \frac{1}{2}$  flach vom Grad  $(d - 1)$  ist, hat mindestens  $2d$  Koeffizienten.*

**Beweis:** Wir verweisen auf Kapitel 5 des Buches von [Strang/Nguyen] und geben nur eine kurze Beweisskizze. Da  $H(\frac{1}{2}) = 0$  gilt, hat die Fouriertransformierte  $H(\omega)$  in  $\omega = \frac{1}{2}$  eine Nullstelle der Ordnung  $d$ . Man zeigt nun, daß in diesem Fall die  $z$ -Transformierte  $H$  in  $z = -1$  eine  $d$ -fache Nullstelle hat. Damit hat das Produktfilter  $P(z) = H(z^{-1})H(z)$  eine Darstellung der Form

$$P(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^d \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^d Q(z) \quad (7.34)$$

mit einem geeigneten Filter  $Q$ . Der entscheidende Punkt ist es nun zu zeigen, daß das Produktfilter  $P$  aufgrund der Symmetrie  $P(z) = P(z^{-1})$  und Halbbandeigenschaft  $P(z) + P(-z) = 2$  mindestens vom Grad  $(4d - 2)$  sein muß, womit dann  $H$  mindestens vom Grad  $(2d - 1)$  ist, also mindestens  $2d$  Koeffizienten besitzt.  $\square$

Dies liefert auch die Motivation für die Definition des Daubechies-Produktfilters in (7.29). Ziel ist es, ein Filter  $H$  maximaler Flachheit vom Grad  $(d - 1)$  zu konstruieren. Als notwendige Bedingung muß dann ein Produktfilter  $P$  von der Form (7.34) sein. Nun bestimmt man das Filter  $Q$  von minimalem Grad, so daß  $P$  den Eigenschaften (i) bis (v) von Unterabschnitt 7.2.3 genügt. Dies ist gerade  $Q(z) = B_d(z)$  in (7.30), das durch diese Eigenschaften auch eindeutig bestimmt ist.

**Bemerkung 7.2.6** Für das Daubechies-Filter  $H = D_d$  rechnet man nach, daß aus der Flachheit vom Grad  $(d - 1)$  an der Stelle  $\omega = \frac{1}{2}$  folgt, daß auch die ersten  $(d - 1)$  Ableitungen von  $D_d$  an der Stelle  $\omega = 0$  verschwinden, wobei  $D_d(0) = 2$  gilt. Eine große Anzahl verschwindender Ableitungen an den Stellen  $\omega = 0$  und  $\omega = \frac{1}{2}$  bedeutet, daß die Frequenzantwort  $D_d$  an diesen Stellen sehr flach ist, und damit das Filter eine gute Tiefpaßeigenschaft hat. Bei wachsendem  $d$  wird der Übergang vom Durchlaßband (niedrige Frequenzen bei  $\omega = 0$ ) zum Stopband (hohe Frequenzen bei  $\omega = \frac{1}{2}$ ) immer steiler und nähert sich immer mehr dem idealen Tiefpaßfilter an (siehe Abbildung 7.7). Deshalb ist ein großer Grad für die Flachheit wünschenswert, was aber bei wachsendem Grad mit einer wachsenden Anzahl von Filterkoeffizienten erkauft werden muß.

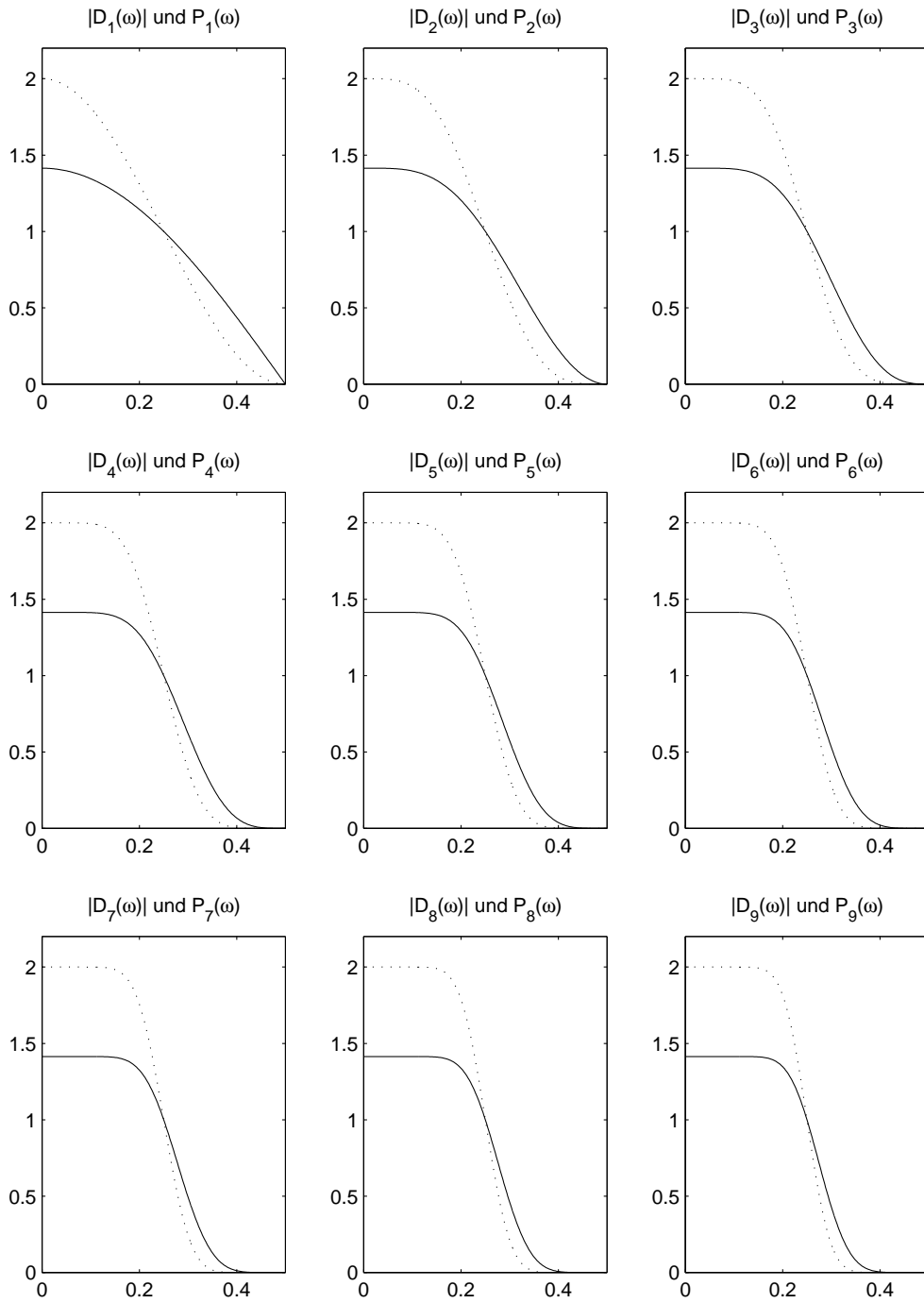


Abbildung 7.7: Frequenzantworten der Daubechies-Filter.

### 7.2.6 Die Fälle $d = 1$ und $d = 2$ für Daubechies-Filter $D_d$

Wir wollen uns die bisherige Theorie noch einmal an den Fällen  $d = 1$  und  $d = 2$  verdeutlichen.

Der Fall  $d = 1$  ist schnell erledigt. Es gilt  $\tilde{B}_1(X) = 1$  und damit

$$P_1(z) = 2 \left( \frac{1+z}{2} \right) \left( \frac{1+z^{-1}}{2} \right) = \frac{1}{2}z^{-1} + 1 + \frac{1}{2}z.$$

Damit ist der Spektralfaktor  $D_1$  gegeben durch

$$D_1(z) = \sqrt{2} \left( \frac{1+z^{-1}}{2} \right).$$

Das Daubechies-Filter  $D_1$  definiert als Prototyp eine 2-Band ON-FB mit den Analysebankfiltern  $H_0 = D_1$  und  $H_1$ .  $H_0$  bzw.  $H_1$  sind nichts anderes als das Tiefpaßfilter (4.43)

$$h_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h_0(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

bzw. das Hochpaßfilter (4.44)

$$h_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h_1(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

die uns schon in dem Beispiel 4.4 der Haar-MRA begegnet sind (allerdings mit ein wenig anderen Bezeichnungen). Die im Fall  $d = 1$  konstruierte Filterbank heißt auch *Haar-Filterbank*.

Der Fall  $d = 2$  ist instruktiver. Es gilt  $\tilde{B}_2(X) = 1 + 2X$  und damit  $B_2(z) = \frac{1}{2}(-z + 4 - z^{-1})$ .  $\tilde{B}_2$  hat die Nullstelle  $X = -\frac{1}{2}$  woraus sich aus der Substitution (7.28)

$$X = \left( \frac{1-z}{2} \right) \left( \frac{1-z^{-1}}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{4}z^{-1}$$

die Bedingung  $z + z^{-1} = 4$  für die Nullstellen von  $B_2$  ergibt. Diese „quadratische Gleichung“ hat die Wurzeln  $z = 2 \pm \sqrt{3}$ . Damit ist der Spektralfaktor  $D_2$  definiert durch die  $2d - 1 = 3$  Wurzeln  $z = -1, z = -1$  und  $z = (2 - \sqrt{3})$ , also gilt mit geeigneter Konstanten  $c \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} D_2(z) &= c \cdot z^{-3}(z+1)^2(z - (2 - \sqrt{3})) \\ &= \left[ (1 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})z^{-1} + (3 - \sqrt{3})z^{-2}(1 - \sqrt{3})z^{-3} \right] / 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten von  $D_2$  sind damit

$$\begin{aligned} d_2(0) &= (1 + \sqrt{3})/4\sqrt{2} \approx 0.4830 \\ d_2(1) &= (3 + \sqrt{3})/4\sqrt{2} \approx 0.8365 \\ d_2(2) &= (3 - \sqrt{3})/4\sqrt{2} \approx 0.2241 \\ d_2(3) &= (1 - \sqrt{3})/4\sqrt{2} \approx -0.1294 \end{aligned}$$

Man rechnet nach, daß  $d_2(0) + d_2(1) + d_2(2) + d_2(3) = \sqrt{2}$  gilt. Dies muß auch so sein, da dies äquivalent zur Tiefpaßbedingung  $D_2(\omega) = 0$  für  $\omega = 0$  ist. Aus  $D_2(\omega) = \sqrt{2}$  für  $\omega = \frac{1}{2}$  folgt dann  $d_2(0) + d_2(2) = d_2(1) + d_2(3) = \sqrt{2}/2$ .

## 7.3 Konstruktion von MRAs und Wavelets

In Abschnitt 7.1 haben wir gezeigt, daß die Skalierungskoeffizienten einer MRA einen Prototypen für eine 2-Band ON-FB definieren. In diesem Abschnitt stellen wir uns die umgekehrte Frage: Welche Filter definieren eine MRA? Notwendigerweise haben natürlich nur Doppelshift-orthonormale Filter mit Tiefpaßeigenschaft eine Chance, aber das ist nicht ausreichend. Die Filter müssen eine zusätzliche Eigenschaft erfüllen, so daß der sogenannte *Kaskadenalgorithmus* konvergiert, über den die Skalierungsfunktion einer MRA aus den Filterkoeffizienten konstruiert werden kann. Wir geben in Unterabschnitt 7.3.3 hierfür hinreichende Kriterien an. Damit ist die Existenz von MRAs bewiesen, und man erhält einen expliziten Algorithmus zur Konstruktion der Skalierungsfunktionen  $\varphi$  und damit des Mutterwavelets  $\psi$ .

Mit diesem Ergebnis schließt sich auch der Kreis dieser Vorlesung: Ausgehend von den Wavelets haben wir über die MRA und deren Skalierungskoeffizienten die Welt der Filterbänke betreten und finden nun über Filter mit speziellen Eigenschaften den Weg zurück in die Welt der Wavelets.

### 7.3.1 Kaskadenalgorithmus für die Skalierungsfunktion

Hat man eine MRA mit Skalierungsfunktion  $\varphi$ , dann genügt diese nach Lemma 4.2.1 einer Skalierungsgleichung

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) \varphi(2x - k). \quad (7.35)$$

mit Skalierungskoeffizienten  $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ . Hat man nun ein Filter  $(h(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  gegeben und sucht eine Funktion  $\varphi$ , die einer Gleichung wie in (7.35) genügen soll, könnte man versuchen, diese Funktion durch einen iterativen Algorithmus zu konstruieren, der eine Folge von Approximationen  $(\varphi^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  generiert. Konvergiert dieser Algorithmus gegen eine Fixpunkt, dann liefert dieser eine Lösung  $\varphi$  zu (7.35). Die Iterationen  $\varphi^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sind definiert durch

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} h(k) \varphi^{(n)}(2x - k), \quad (7.36)$$

wobei der Iterationsanfang  $\varphi^{(0)}$  durch die Rechteckfunktion  $\mathbf{1}_{[0,1]}$  gegeben ist. Dieser Algorithmus wird wegen seiner iterativen Form, bei dem derselbe Prozeß immer wieder auf die vorherige Ausgabe angewendet wird, auch als *Kaskadenalgorithmus* bezeichnet.

Der Kaskadenalgorithmus läßt sich sehr leicht implementieren. Dabei sei  $h = (h(0); \dots, h(N))$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , ein kausales FIR-Filter. Dann ist die  $n$ -te Iteration  $\varphi^{(n)}$  eine zeitkontinuierliche Funktion mit kompaktem Träger, die für negative Werte verschwindet. Nach Konstruktion ist  $\varphi^{(n)}$  konstant auf Teilintervallen der Form  $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , so daß es ausreicht, die Werte auf diesen

Teilintervallen zu kennen. Diese seien im Vektor  $x^{(n)}$  enthalten, so daß

$$\varphi^{(n)} = \sum_{k=0}^{\ell(x^{(n)})} x^{(n)}(k) \mathbf{1}_{[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[}$$

gelte. Die Vektoren können nun folgendermaßen konstruiert werden:

<u>Kaskadenalgorithmus</u>	
<u>Eingabe:</u>	Filter $h = (h(0), \dots, h(N))$ , $N \in \mathbb{N}$ Anzahl der Iterationen $M$ Startvektor $x^{(0)} = (1)$ für die Iteration
<u>Berechnung:</u>	for $n = 1$ to $M$ $x^{(n)} = h * x^{(n-1)}$ $h = (\uparrow 2)h$ end
<u>Ausgabe:</u>	$x^{(n)}$ , $n = 0, \dots, M$

Man kann zeigen, daß der Kaskadenalgorithmus für die Daubechies-Filter  $D_d$ ,  $d \in \mathbb{N}$ , die wir in Unterabschnitt 7.2.5 konstruiert haben, konvergiert. Dies führt auf die Daubechies-Skalierungsfunktionen und damit auf die Daubechies-Wavelets. Wir haben jeweils die ersten 8 Iterationen für den Fall  $d = 2$  bzw.  $d = 5$  in den Abbildungen 7.8 bzw. 7.9 dargestellt. Es fällt auf, daß der Kaskadenalgorithmus im Konvergenzfall mit nur wenigen Iterationen gute Approximationen der Skalierungsfunktionen generiert.

Der Fall  $d = 1$  ist besonders einfach: In diesem Fall gilt nämlich  $\varphi^{(1)} = \varphi^{(0)}$  und damit ist der Kaskadenalgorithmus stationär, d. h. der Fixpunkt ist die Rechteckfunktion  $\varphi^{(0)}$  selbst. Dies sollte auch so sein, da die Rechteckfunktion die Skalierungsfunktion zur Haar-MRA (siehe Abschnitt 4.4) ist, die in Filterbanksprache nichts anderes als die Haar-Filterbank mit Prototyp  $D_1$  ist.

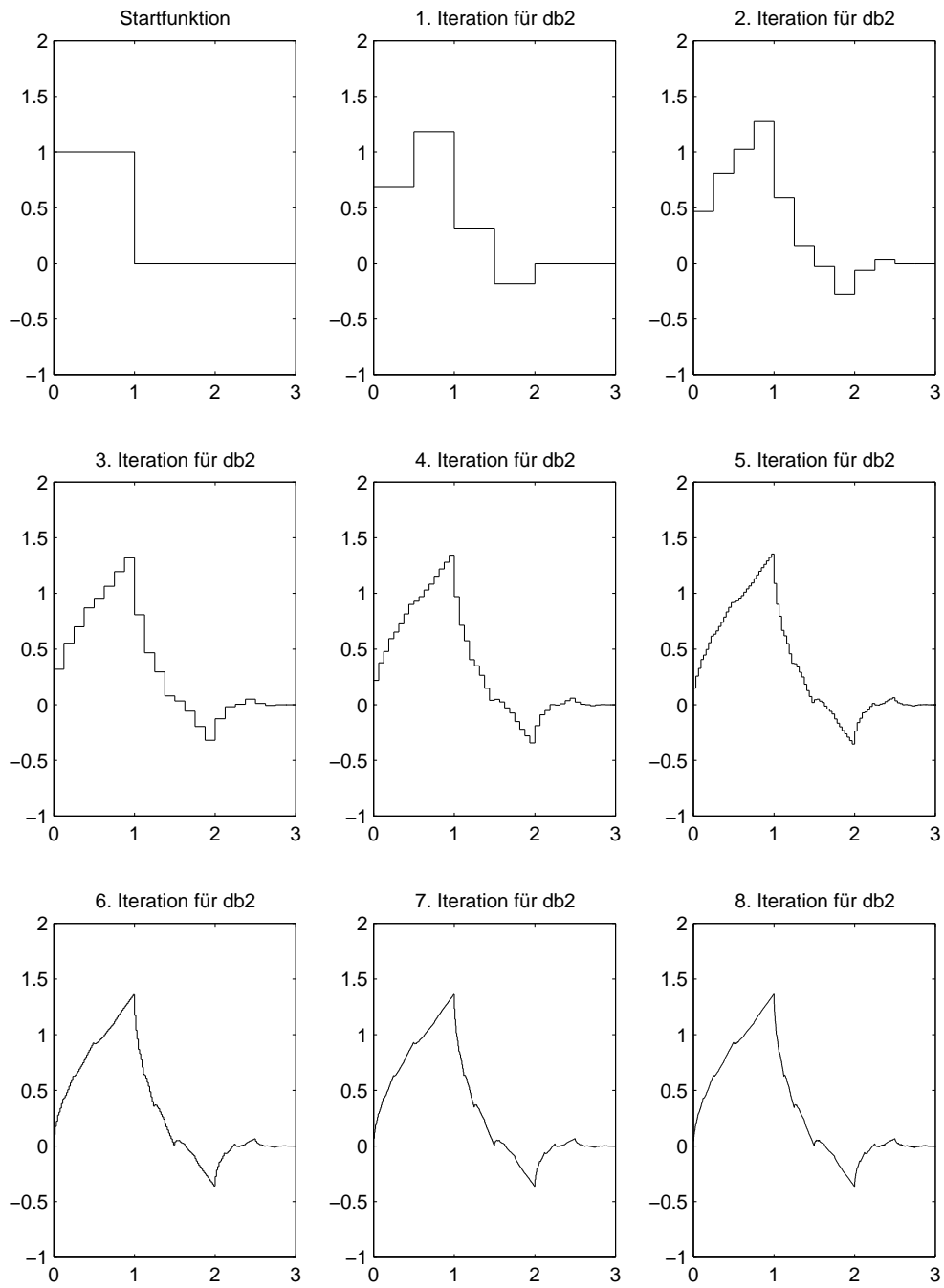


Abbildung 7.8: Kaskadenalgorithmus zur Approximation der Skalierungsfunktion zum db2-Wavelet aus den  $D_2$ -Koeffizienten.

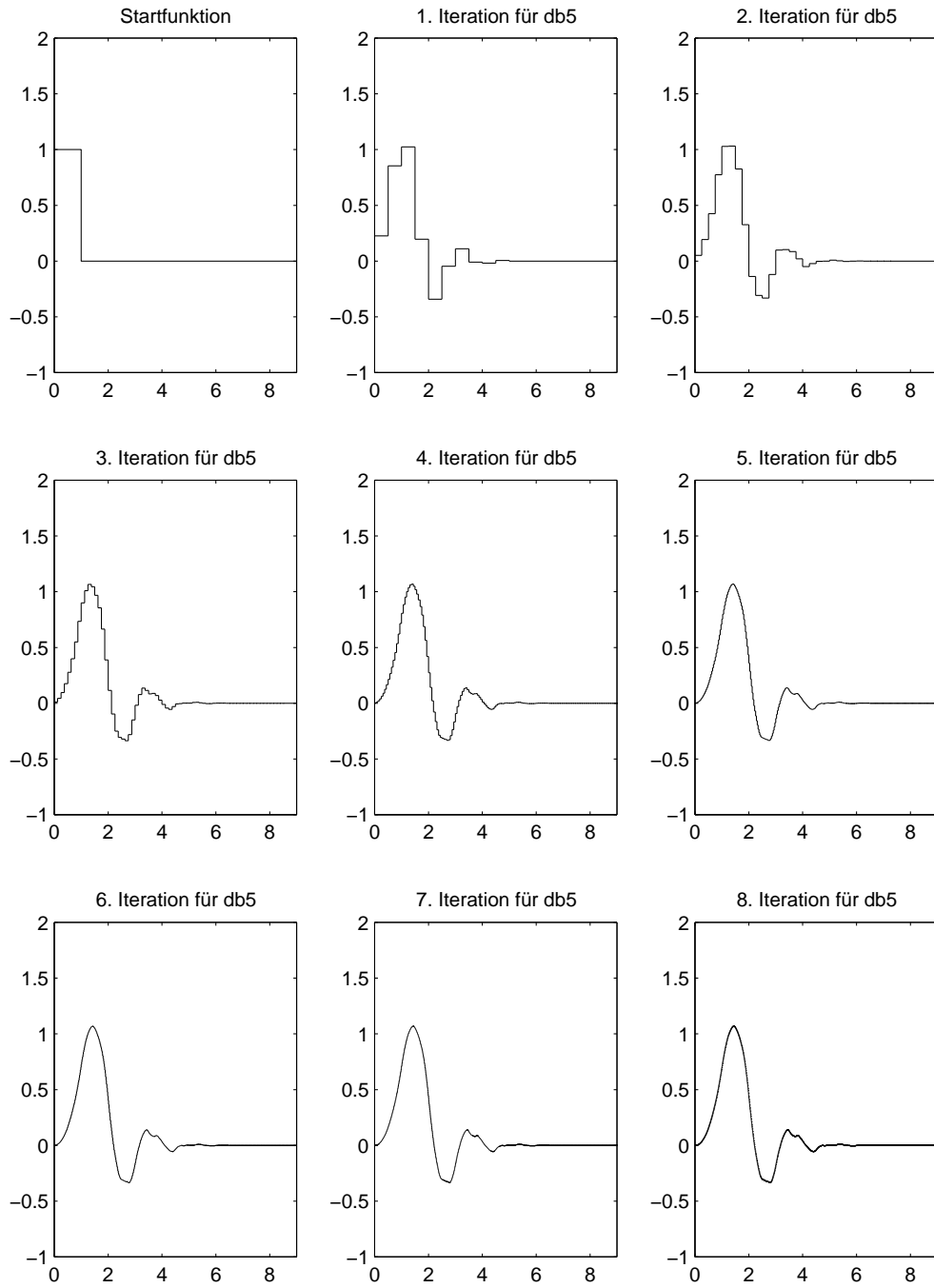


Abbildung 7.9: Kaskadenalgorithmus zur Approximation der Skalierungsfunktion zum db5-Wavelet aus den  $D_5$ -Koeffizienten.

### 7.3.2 Konstruktion von MRAs

Bevor wir auf hinreichende Bedingungen an das Filter  $h$  für die Konvergenz des Kaskadenalgorithmus eingehen, wollen wir zuerst auf einige der Konsequenzen, die sich aus der Konvergenz ergeben, eingehen. Wir setzen also in diesem Abschnitt folgendes voraus:

**Voraussetzung 7.3.1** *Es sei  $h = (h(0), \dots, h(N))$  ein kausales FIR-Filter vom Grad  $N \in \mathbb{N}$  mit reellen Koeffizienten, so daß der Kaskadenalgorithmus in der  $L^2(\mathbb{R})$ -Norm gegen eine Funktion  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  konvergiert, also*

$$\|\varphi - \varphi^{(n)}\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

**Lemma 7.3.2** *Sei  $h$  wie in Voraussetzung 7.3.1, dann erfüllt  $\varphi$  die Skalierungsgleichung*

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N-1} h(k) \varphi(2x - k).$$

**Beweis:** Dies ist nichts anderes als die Aussage, daß  $\varphi$  Fixpunkt der Iteration ist und folgt sofort aus:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n+1)}(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{2} \sum_{k=0}^N h(k) \varphi^{(n)}(2x - k) \right) \\ &= \sqrt{2} \sum_{k=0}^N h(k) \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(2x - k) \\ &= \sqrt{2} \sum_{k=0}^N h(k) \varphi(2x - k). \end{aligned}$$

□

**Lemma 7.3.3** *Sei  $h$  wie in Voraussetzung 7.3.1, also insbesondere habe das kausale Filter  $N + 1$  Koeffizienten, dann hat  $\varphi$  kompakten Träger  $[0, N]$ .*

**Beweis:** Wir beweisen zuerst, daß  $\varphi$  einen kompakten Träger hat, der in  $[0, N]$  enthalten ist. Dazu benötigen wir folgende Beobachtung: Hat eine Funktion  $\phi$  einen Träger, der im Intervall  $[0, b]$ ,  $b > 0$  enthalten ist, dann ist der Träger der Funktion  $x \mapsto \sum_{k=0}^N h(k) \phi(2x - k)$  im Intervall  $[0, \frac{b+N}{2}]$  enthalten. Startet man also mit der Rechteckfunktion  $\varphi^{(0)}$  mit dem Träger  $[0, 1]$ , dann ist der Träger von  $\varphi^{(1)}$  in  $[0, \frac{1+N}{2}]$  enthalten. Induktiv folgt

$$\text{supp}(\varphi^{(n)}) \subset \left[ 0, \frac{1+(2^n-1)N}{2^n} \right] \subset [0, N].$$

Damit ist gezeigt, daß  $\varphi$  außerhalb von  $[0, N]$  verschwindet. Wir nehmen an,  $\varphi$  habe einen kompakten Träger der Form  $[a, b]$ . Dann hat  $x \mapsto \varphi(2x - k)$  den Träger  $[\frac{a+k}{2}, \frac{b+k}{2}]$ . Der Index  $k$  läuft in der Skalierungsgleichung von Null bis  $N$ , so daß die durch  $x \mapsto \sum_{k=0}^N h(k)\varphi(2x - k)$  definierte Funktion den Träger  $[\frac{a}{2}, \frac{b+N}{2}]$  hat. Da  $\varphi$  der Skalierungsgleichung genügt, folgt

$$[a, b] = [\frac{a}{2}, \frac{b+N}{2}],$$

woraus  $a = 0$  und  $b = N$  folgt.  $\square$

**Lemma 7.3.4** *Sei  $h$  wie in Voraussetzung 7.3.1, und erfülle die Doppelshift-Orthonormalität, d. h. für alle  $m \in \mathbb{N}$  gelte*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k)h(k + 2m) = \delta(m).$$

*Dann sind die ganzzahligen Translate von  $\varphi$  orthonormal zueinander, d. h. für alle  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  gilt*

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\cdot - m_1) | \varphi(\cdot - m_2) \rangle &= \int_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x - m_1)\varphi(x - m_2) dx \\ &= \delta(m_2 - m_1). \end{aligned} \quad (7.37)$$

*Insbesondere gilt  $\|\varphi\|_{L^2} = 1$ .*

**Beweis:** Wir beweisen zunächst durch Induktion, daß für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  die Orthogonalitätsaussage (7.37) für  $\varphi^{(n)}$  gilt. Für die Rechteckfunktion  $\varphi^{(0)}$  ist dies klar. Wir zeigen nun, daß die Gültigkeit von (7.37) für  $\varphi^{(n)}$ , die für  $\varphi^{(n+1)}$  impliziert:

$$\begin{aligned} &\langle \varphi^{(n+1)}(\cdot - m_1) | \varphi^{(n+1)}(\cdot - m_2) \rangle \\ &= \int_{x \in \mathbb{R}} \varphi^{(n+1)}(x - m_1)\varphi^{(n+1)}(x - m_2) dx \\ &= 2 \int_{x \in \mathbb{R}} \left( \sum_k h(k)\varphi^{(n)}(2x - 2m_1 - k) \right) \left( \sum_k h(k)\varphi^{(n)}(2x - 2m_2 - k) \right) dx \\ &= 2 \int_{x \in \mathbb{R}} \left( \sum_k h(k)\varphi^{(n)}(2x - 2m_1 - k) \right) \\ &\quad \cdot \left( \sum_k h(k - 2(m_2 - m_1))\varphi^{(n)}(2x - 2m_1 - k) \right) dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_k h(k)h(k - 2(m_2 - m_1)) \\ &\stackrel{(**)}{=} \delta(m_2 - m_1), \end{aligned}$$

wobei in (\*) die Induktionsvoraussetzung für  $n$  und in (\*\*) die Doppelshift-Orthonormalität des Filters  $h$  verwendet wurden. Aus der  $L^2(\mathbb{R})$ -Konvergenz der

$\varphi^{(n)}$  gegen  $\varphi$  gilt (7.37):

$$\begin{aligned}\langle \varphi(\cdot - m_1) | \varphi(\cdot - m_2) \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi^{(n)}(\cdot - m_1) | \varphi^{(n)}(\cdot - m_2) \rangle \\ &= \delta(m_2 - m_1).\end{aligned}$$

□

Die Aussagen der Lemmata sind als Teilaussagen im folgenden Satz enthalten. Die restlichen Aussagen des Satzes wollen wir hier nicht beweisen, sondern verweisen auf die Literatur, z. B. Kapitel 6 von [Blatter] oder auf den Klassiker der Waveletliteratur „*Ten Lectures on Wavelets*“ von [Daubechies].

**Satz 7.3.5** *Sei  $h$  wie in Voraussetzung 7.3.1, das zusätzlich Doppelshift-orthonormal ist und die Tiefpaßeigenschaft besitzt. Dann definiert der Fixpunkt  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  des Kaskadenalgorithmus eine orthonormale Skalierungsfunktion für eine MRA auf folgende Weise:*

$$V_m := \overline{\text{span}\{\varphi(2^{-m} \cdot -k) | k \in \mathbb{Z}\}}, \quad (7.38)$$

für  $m \in \mathbb{Z}$ . Dabei ist  $V_0$  der Grundraum der MRA. Weiterhin gilt für den Träger  $\text{supp}(\varphi) = [0, N]$ .

**Bemerkung anstelle des Beweises:** Im Hinblick auf die Definition der MRA (siehe Definition 4.1.1) bleibt einem keine andere Wahl, als die Räume  $V_m$  wie in (7.38) zu definieren. Mit dieser Definition sind Eigenschaften (4.6) und (4.9) automatisch erfüllt. Daß die Translate von  $\varphi$  eine Orthonormalbasis von  $V_0$  definieren, also (4.10), folgt aus Lemma 7.3.4. Nur die Aussagen (4.7) und (4.8) bleiben damit unbewiesen.

### 7.3.3 Konvergenzkriterien für den Kaskadenalgorithmus

In diesem Unterabschnitt geht es um die Existenz einer Lösung  $\varphi$  für die Skalierungsgleichung bei vorgegebenen Koeffizienten  $h = (h(0); \dots, h(N))$ . Wir haben gesehen, daß bei Konvergenz des Kaskadenalgorithmus diese Frage bejaht werden kann: Die Grenzfunktion des Kaskadenalgorithmus ist Lösung der Skalierungsgleichung. Für den Fall einer MRA gilt die Umkehrung ebenfalls: Ist  $\varphi$  die Skalierungsfunktion der MRA, so konvergiert der Kaskadenalgorithmus gegen diese Funktion. Damit ist auch die Eindeutigkeit der Skalierungsfunktion einer MRA bewiesen.

In diesem Unterabschnitt folgen wir in weiten Teilen Kapitel 7 des Buches von [Strang/Nguyen]. Wir verzichten daher auf einen Teil der Beweise und verweisen auf die Literatur. Es sei im folgenden  $h = (h(0); \dots, h(N))$  ein kausales Filter, an das wir momentan keine weiteren Forderungen stellen.

Zunächst leitet man eine notwendige Bedingung für die Konvergenz  $\varphi^{(n)} \rightarrow \varphi$  her, von der sich später herausstellen wird, daß sie auch hinreichend ist. Dazu

betrachtet man die inneren Produkte

$$a^{(n)}(k) := \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(n)}(x)\varphi^{(n)}(x+k)dx \quad (7.39)$$

für  $k \in \mathbb{Z}$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Es gilt offensichtlich  $a^{(n)}(k) = a^{(n)}(-k)$  und  $a^{(n)}(0) = \|\varphi^{(n)}\|^2$ . Da  $\varphi^{(n)}$  außerhalb des Intervalls  $[0, N[$  verschwindet, verschwinden die inneren Produkte  $a^{(n)}(k)$  für  $|k| \geq N$ . Die translatierte Funktion  $\varphi^{(n)}(\cdot + N)$  überlappt nicht mit  $\varphi^{(n)}$ , so daß nur die  $2N - 1$  mittleren Komponenten von  $a^{(n)}$  nicht verschwinden.

Konvergiert der Kaskadenalgorithmus  $\varphi^{(n)} \rightarrow \varphi$  in der  $L^2(\mathbb{R})$ -Norm, dann konvergiert sicherlich auch die Folge der inneren Produkte  $a^{(n)}(k) \rightarrow a(k)$  punktweise, wobei  $a$  durch

$$a(k) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\varphi(x+k)dx, \quad (7.40)$$

$k \in \mathbb{Z}$ , definiert ist. Da die Koeffizienten aller Folgen  $a^{(n)}$  für Indizes  $|k| \geq N$  verschwinden, folgt dasselbe auch für  $a$  (aus der punktweisen Konvergenz folgt dann z. B. auch Konvergenz in der  $\ell^2(\mathbb{Z})$ -Norm). Wir können also diese Folgen als Elemente in  $\mathbb{C}^{2N-1} \subset \ell^2(\mathbb{Z})$  auffassen unter der Einbettung

$$\begin{aligned} \iota : \mathbb{C}^{2N-1} &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \\ (x(-N+1), \dots, x(0), \dots, x(N-1)) &\mapsto \\ (\dots, 0, x(-N+1), \dots; x(0); \dots, x(N-1), 0, \dots) & \end{aligned} \quad (7.41)$$

Wir untersuchen nun notwendige und hinreichende Kriterien für die Konvergenz der Folge  $(a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ . Das folgende Lemma gibt an, wie sich die Folge  $a^{(n+1)}$  aus  $a^{(n)}$  transformiert:

**Lemma 7.3.6** *Es sei  $h^* \in \ell^2(\mathbb{Z})$  definiert durch  $h^*(k) := h(-k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ( $h^*$  ist also der adjungierte Faltungsoperator zu  $h$  bezüglich des  $\ell^2(\mathbb{Z})$ -Skalarproduktes). Dann gilt für  $n \in \mathbb{N}$ :*

$$a^{(n+1)} = (\downarrow 2)[h * h^* * a^{(n)}]$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
a^{(n+1)}(k) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(n+1)}(x) \varphi^{(n+1)}(x+k) dx \\
&\stackrel{(a)}{=} \sum_l \sum_m h(l) h(m) 2 \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(n)}(2x-l) \varphi^{(n)}(2x+2k-m) dx \\
&\stackrel{(b)}{=} \sum_l \sum_m h(l) h(m) \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(n)}(y) \varphi^{(n)}(y+l+2k-m) dy \\
&= \sum_l \sum_m h(l) h(m) a^{(n)}(l+2k-m) \\
&\stackrel{(c)}{=} \sum_l \sum_m h(l) h(m+l) a^{(n)}(2k-m) \\
&\stackrel{(d)}{=} \sum_l \sum_m h(-l) h(m-l) a^{(n)}(2k-m) \\
&= (\downarrow 2)[h * h^* * a^{(n)}](k).
\end{aligned}$$

Dabei wurde in (a) die Skalierungsgleichung verwendet, in (b) wurde mit  $y = 2x - l$  transformiert, in (c) wurde  $m - l$  durch  $m$  und in (d) wurde  $l$  durch  $-l$  ersetzt.  $\square$

Wir machen uns das Ergebnis in Matrixschreibweise klar. Der Faltungsfiler  $h$  wird durch eine Toeplitzmatrix  $\mathbf{H} := T(h(N), \dots, h(1); h(0))$  dargestellt. Die Toeplitzmatrix des adjungierten Faltungsfiler  $h^*$  ist die transponierte Matrix  $\mathbf{H}^T = T(h(0); h(1), \dots, h(N))$ . Downsampling mit  $(\downarrow 2)$  nach einer Faltung bedeutet, daß jede zweite Zeile der Faltungsmatrix entfernt wird. In Matrixschreibweise schreibt sich das Ergebnis von Lemma 7.3.6 als

$$a^{(n+1)} = \mathbf{T}(a^{(n)}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} := (\downarrow 2)\mathbf{H}\mathbf{H}^T. \quad (7.42)$$

Dabei ist  $\mathbf{T}$  eine Block-Toeplitzmatrix, deren Zeile mit Index 0 durch die Koeffizienten  $h * h^*$  gegeben ist. Man überlegt sich, daß  $\mathbf{T}$  die Menge  $\iota(\mathbb{C}^{2N-1})$  invariant läßt, und damit auf  $\iota(\mathbb{C}^{2N-1})$  eingeschränkt werden kann. Man erhält somit eine  $(2N-1) \times (2N-1)$  Teilmatrix  $\mathbf{T}_{2N-1}$ , die den Übergang von  $a^{(n)}$  zu  $a^{(n+1)}$  vollständig beschreibt, d. h. faßt man die  $a^{(n)}$  als Elemente in  $\mathbb{C}^{2N-1}$  auf, dann gilt

$$a^{(n+1)} = \mathbf{T}_{2N-1}(a^{(n)}). \quad (7.43)$$

Damit gewinnt man  $a^{(n)}$  durch  $n$ -fache Iteration der Matrizen  $\mathbf{T}$  bzw.  $\mathbf{T}_{2N-1}$  angewendet auf  $a^{(0)}$ . Konvergenzaussagen der Folge  $(a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  werden so zu Aussagen bezüglich Potenzen von Matrizen. Konvergiert die Folge  $a^{(n)} \rightarrow a$ , dann ist  $a$  wegen (7.42) bzw. (7.43) Eigenvektor der Matrizen  $\mathbf{T}$  bzw.  $\mathbf{T}_{2N-1}$  zum Eigenwert 1. Damit ist also ein Eigenwert  $\lambda = 1$  der Matrizen  $\mathbf{T}$  bzw.  $\mathbf{T}_{2N-1}$  eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der  $a^{(n)}$ . Wie der folgende Satz zeigt, läßt sich die Konvergenz solcher Folgen vollständig über die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{T}_{2N-1}$  charakterisieren.

**Satz 7.3.7** Für die Matrix  $\mathbf{T}_{2N-1}$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Für die Eigenwerte  $\lambda$  der Matrix  $\mathbf{T}_{2N-1}$  gilt

$$|\lambda| < 1 \text{ bis auf einen einfachen Eigenwert } \lambda = 1. \quad (7.44)$$

Der normierte Eigenvektor zu  $\lambda = 1$  sei mit  $a \in \mathbb{C}^{2N-1}$  bezeichnet.

(ii) Es gibt einen normierten Vektor  $a \in \mathbb{C}^{2N-1}$ , so daß für einen beliebigen Startvektor  $a^{(0)} \in \mathbb{C}^{2N-1}$  die Iteration  $a^{(n+1)} = \mathbf{T}_{2N-1}a^{(n)}$  gegen die orthogonale Projektion von  $a^{(0)}$  auf den Vektor  $a$  konvergiert (d. h. auf den Anteil mit dem  $a$  in  $a^{(0)}$  enthalten ist).

**Beweis:** Wir geben nur eine Beweisskizze. Betrachte die Jordansche Normalform zu  $\mathbf{T}_{2N-1}$ . Gilt (i), so hat diese für  $\lambda = 1$  einen  $1 \times 1$ -Block, alle weiteren Blöcke haben eine Diagonaleintrag  $|\lambda| < 1$ . Damit konvergieren die Potenzen  $T^n$  gegen eine Matrix, die bis auf einen Diagonaleintrag 1 vom Eigenwert  $\lambda = 1$  nur aus Nullen besteht. Es folgt damit (ii). Die Richtung (ii)  $\Rightarrow$  (i) zeigt man ähnlich durch einen Widerspruchsbeweis.  $\square$

Der entscheidende Punkt ist nun, daß die Eigenwertbedingung in Satz 7.3.7 auch hinreichend ist für die Konvergenz des Kaskadenalgorithmus.

**Satz 7.3.8** Für die Matrix  $\mathbf{T}_{2N-1}$  gelte die Eigenwertbedingung

$$|\lambda| < 1 \text{ bis auf einen einfachen Eigenwert } \lambda = 1.$$

Dann bilden die  $(\varphi^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $L^2(\mathbb{R})$ , d. h.

$$\|\varphi^{(m)} - \varphi^{(n)}\| \rightarrow 0 \quad \text{für } n, m \rightarrow \infty.$$

Wegen der Vollständigkeit von  $L^2(\mathbb{R})$  existiert damit eine  $L^2(\mathbb{R})$ -Grenzfunktion  $\varphi$  dieser Funktionenfolge.

**Beweis:** Wir geben nur eine Beweisskizze. Der Term  $\|\varphi^{(m)} - \varphi^{(n)}\|^2$  schreibt sich als

$$\|\varphi^{(m)}\|^2 - 2\langle \varphi^{(m)} | \varphi^{(n)} \rangle + \|\varphi^{(n)}\|^2.$$

Es sei  $a$  der Eigenvektor von  $\mathbf{T}_{2N-1}$  zum Eigenwert  $\lambda = 1$  und  $\tilde{a}$  die orthogonale Projektion von  $a^{(0)}$  auf  $a$ , wobei  $a^{(0)}$  so gewählt sei, daß  $\tilde{a} \neq 0$ . Der erste und dritte Term sind  $a^{(m)}(0)$  und  $a^{(n)}(0)$ , die nach Satz 7.3.7 gegen  $\tilde{a}(0)$  konvergieren. Man muß nun zeigen, daß  $\langle \varphi^{(m)} | \varphi^{(n)} \rangle$  für  $m, n \rightarrow \infty$  auch gegen  $\tilde{a}(0)$  konvergiert, woraus dann die Behauptung des Satzes folgt. Dies folgt wieder unter Verwendung der Jordanschen Normalform von  $T_{2N-1}$ . Wir wollen dies hier nicht vorführen, sondern verweisen auf S. 241 von [Strang/Nguyen].  $\square$

Damit ist schon fast alles gezeigt. Wir haben ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz des Kaskadenalgorithmus, und in diesem Fall auch eine Lösung der Skalierungsgleichung. Interessant wäre nun auch zu wissen, ob sich jede Funktion, die die Skalierungsgleichung erfüllt, als Grenzwert des Kaskadenalgorithmus darstellt. Dies ist tatsächlich genau dann der Fall, wenn  $\mathbf{T}_{2N-1}$  der Eigenwertbedingung genügt. Wir formulieren das Ergebnis in folgendem Satz:

**Satz 7.3.9** *Es sei  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  eine Lösung der Skalierungsgleichung. Die Kaskadenfolge  $(\varphi^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert (im  $L^2(\mathbb{R})$ -Sinne) genau dann gegen  $\varphi$  wenn für die Matrix  $\mathbf{T}_{2N-1}$  die Eigenwertbedingung*

$$|\lambda| < 1 \text{ bis auf einen einfachen Eigenwert } \lambda = 1.$$

*gilt. In diesem Fall ist die Lösung der Skalierungsgleichung eindeutig.*

**Beweis:** Siehe S. 239, [Strang/Nguyen]. □

Für Doppelshift-orthonormale Filter haben alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $\mathbf{T}_{2N-1}$  den Betrag  $|\lambda| \leq 1$ . (Man kann zeigen, daß die Norm von  $\mathbf{T}$  durch  $\frac{1}{2} \sup(|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \frac{1}{2})|^2)$  gegeben ist, was im Fall Doppelshift-orthonormales Filter 1 ist.) Die Eigenwertbedingung für  $\mathbf{T}_{2N-1}$  reduziert sich in diesem Fall auf die sogenannte *Cohen-Lawton-Bedingung*, daß  $\lambda = 1$  ein einfacher Eigenwert ist. In diesem Fall sind die  $\{\varphi(\cdot - k) | k \in \mathbb{Z}\}$  orthonormal und  $a = \delta$ . Wir zitieren folgenden Satz, der ein handliches Kriterium dafür liefert, wann in diesem Fall die Eigenwertbedingung für  $\mathbf{T}_{2N-1}$  erfüllt ist.

**Satz 7.3.10** *Ist  $h$  ein Doppelshift-orthonormales Filter, dann gilt die Eigenwertbedingung für  $T_{2N-1}$ , falls  $H(\omega) \neq 0$  für  $|\omega| \leq \frac{1}{2}$ .*

**Beweis:** Für einen Literaturhinweis siehe Bemerkung 2, S. 241 im Buch von [Strang/Nguyen]. □

**Korollar 7.3.11** *Die Daubechies-Filter  $D_d$  definieren eine MRA.*

**Beweis:** Man überprüft leicht, daß die Filter  $D_d$  den Bedingungen von Satz 7.3.10 genügen. Damit konvergiert der Kaskadenalgorithmus nach Satz 7.3.8 gegen eine Funktion  $\varphi$ , die nach Satz 7.3.5 eine MRA definieren. □

### 7.3.4 Kaskadenalgorithmus im $\omega$ -Bereich

In der Literatur wird der Kaskadenalgorithmus und hinreichende Kriterien für dessen Konvergenz oft über die Fouriertransformierten im  $\omega$ -Bereich formuliert. Wir wollen in diesem Abschnitt nur herleiten, wie die Iteration der Skalierungsgleichung zu der berühmten Produktformel im  $\omega$ -Bereich führt. Für Ausführung der Theorie im  $\omega$ -Bereich verweisen wir u. a. auf das Buch von [Blatter] oder die Wavelet-Bibel von [Daubechies].

Wir wenden die Fouriertransformation auf beiden Seiten der Skalierungsgleichung

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) \varphi(2x - k)$$

an und erhalten

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \omega t} \left( \sqrt{2} \sum_k h(k) \varphi(2t - k) \right) dt \\
&\stackrel{(*)}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_k h(k) \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \omega \frac{s+k}{2}} \varphi(s) ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sum_k h(k) e^{2\pi i k \frac{\omega}{2}} \right) \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i s \frac{\omega}{2}} \varphi(s) ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).
\end{aligned}$$

Dabei wurde in (\*) die Substitution  $s = 2t - k$  vorgenommen. Iteriert man dieses Verfahren, so erhält man nach  $M$  Schritten die Formel

$$\hat{\varphi}(\omega) = 2^{-\frac{M}{2}} \left( \prod_{j=1}^M H\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^M}\right). \quad (7.45)$$

Der Kaskadenalgorithmus (7.36) schreibt sich im  $\omega$ -Bereich dann als

$$\hat{\varphi}^{(n+1)}(\omega) = 2^{-\frac{1}{2}} H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}^{(n)}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Die Frage nach der Konvergenz des Kaskadenalgorithmus führt damit auf die Frage nach Konvergenzkriterien für das unendliche Produkt

$$\prod_{j=1}^{\infty} H\left(\frac{\omega}{2^j}\right).$$

Dabei reicht punktweise Konvergenz des Produktes für jedes  $\omega$  nicht aus. Die durch das Produkt dargestellte Funktion in  $\omega$  sollte zumindest eine  $L^2(\mathbb{R})$ -Funktion sein, damit ein Kandidat  $\varphi$  für die Skalierungsfunktion als umgekehrte Fouriertransformierte

$$\varphi = \prod_{j=1}^{\infty} H\left(\frac{\cdot}{2^j}\right)^{\vee}$$

dieser Grenzfunktion definiert werden kann. Aber wir wollten ja eigentlich nur ein paar Andeutungen machen ...

# Literaturverzeichnis

Anstelle einer langen Literaturliste haben wir uns darauf beschränkt, nur die Bücher zu erwähnen, die für die Ausarbeitung dieses Skriptes auch tatsächlich verwendet wurden. Für ausführliche Literaturlisten über Wavelettheorie und Filterbänke verweisen wir auf die zitierten Bücher.

Wir besprechen nun, welche Quellen den einzelnen Kapiteln zugrundeliegen. Die meisten mathematischen Resultate samt Beweisen von **Kapitel 1** (insbesondere Integrationstheorie, Fourieranalysis, Faltungen) findet man z. B. in dem Buch von **[Folland]**, ein schönes Lehrbuch der Mathematik, allerdings auf einem sehr allgemeinen und abstrakten Niveau. Die Grundlagen der Signaltheorie und der klassischen Fouriertransformation findet man im Skript **[ASVI]** zur Vorlesung Audiosignalverarbeitung I und in großer Ausführlichkeit in **[Oppenheim/Willsky]**, das sich insbesondere auch für Nicht-Mathematiker eignet. Eine gute Zusammenfassung der mathematischen Grundlagen gibt es auch im Buch von **[Wickerhauser]**. Hier findet man auch weitere Einzelheiten über die in Kapitel 2 definierten Informationszellen.

Die **Kapitel 2** und **Kapitel 3** kann man in weiten Teilen im Buch von **[Kaiser]** nachlesen, in dem einige Resultate, insbesondere über die CWT, in etwas allgemeinerer Darstellung bewiesen sind. Diesem Buch wurde u. a. auch die Idee entnommen, die Funktionen  $g_{\omega,t}$  und  $\psi^{s,t}$  als „musikalische Noten“ zu interpretieren. Während **[Kaiser]** eine anschauliche Einführung in die Themenbereiche WFT und CWT gibt, sind die mathematischen Beweise oft mit Vorsicht zu genießen. In mathematischer Hinsicht kann man sich auf das Buch von **[Louis/Maß/Rieder]** verlassen, wo allerdings aufgrund der vielen technischen Details die Intuition und Anschauung zu kurz kommen. Dem eher mathematisch interessierten Leser sei dieses Buch aufgrund seiner vielen mathematischen Bezüge und exakten Definitionen dennoch empfohlen. **Kapitel 4** dieses Skriptes folgt vor allem den Ausführungen in **[Louis/Maß/Rieder]**, wo man auch die fehlenden Beweise findet.

Für die Anwendungen von **Kapitel 5** wurde auf mehrere Quellen zurückgegriffen, insbesondere **[Strang/Nguyen]**, **[Kurth]**, **[Burrus/Gopinath/Guo]**, der Artikel von **[Donoho]** (Donoho ist im Bereich des Denoising einer der führenden Wissenschaftler) und das MATLAB-Handbuch **[Matlab]** der Wavelet-Toolbox. Die benötigten statistischen Grundlagen findet man z. B. in den Büchern von **[Krengel]** und **[Hayes]**. Für den an Anwendungen interessierten

Leser wollen wir aber vor allem das Softwarepaket MATLAB mit der Wavelet-Toolbox empfehlen, das auf die Bedürfnisse der digitalen Signalverarbeitung zugeschnitten ist. Hiermit läßt sich schon frühzeitig mit geringen mathematischen Vorkenntnissen experimentieren, um so ein intuitives Verständnis für die Grundideen der Wavelettheorie, die auch übersichtlich im Handbuch [Matlab] dargestellt sind, zu entwickeln. Mit MATLAB wurden auch die meisten Abbildungen dieses Skriptes entworfen. Zur Warnung sei allerdings angemerkt, daß bei konkreten Anwendungen für die „richtige“ Wahl des Wavelets und die „richtige“ Interpretation der Waveletkoeffizienten ein tieferes Verständnis der Wavelettheorie unumgänglich ist.

Die Verbindung der Wavelettheorie zur Theorie der Filterbänke ist Gegenstand des Buches von [Strang/Nguyen], das thematisch als Grundlage von **Kapitel 6** und **Kapitel 7** des Skriptes diente. Dieses Buch, das sich den Verkaufszahlen zufolge einer größeren Beliebtheit erfreuen muß, baut auf einem Minimum an mathematischen Grundlagen auf, und deckt dennoch einen großen Bereich sowohl der Wavelet- als auch der Filterbanktheorie ab. Der vor allem zu Anfang des Buches etwas plauderhafte Ton entbehrt nicht eines gewissen Charmes, und der Leser wird sachte in die Thematik eingeführt. Bei fortschreitenden Kapiteln verliert man allerdings, vor allem als Anfänger, leicht den Faden, und fühlt sich vor allem bei näherem Hinsehen im Wirrwarr der Behauptungen, Definitionen, Andeutungen und Beweise, die leider oft ihren Namen nicht verdienen, im Stich gelassen. Eine vollständige und mathematisch exakte Darstellung des Stoffes ist vielleicht auch gar nicht die Intention von [Strang/Nguyen], schreiben die Autoren doch selber auf S. 240 ihres Buches: „This is not a book about proofs.“ Von einer höheren Warte aus ist dieses Buch aufgrund seiner thematischen Zusammenhänge aber auf jeden Fall eine Fundgrube.

Für eine übersichtliche Darstellung der wesentlichen Definitionen und Zusammenhänge von Wavelet- und Filterbanktheorie empfehlen wir das Buch von [Burrus/Gopinath/Guo]. Die verschiedenen Charakterisierungen in **Kapitel 6** von PR- und ON-Filterbänken werden z. B. auch in [Mertins] dargestellt. Eine saubere und übersichtliche Einführung in die Wavelettheorie findet man auch in dem Buch von [Blatter], das u.a. als Grundlage für Teile von **Kapitel 7** diente. Der Autor versteht es mit seinem kompakten Buch, sich geschickt durch die Welt der Wavelets zu schlängeln, beschränkt sich dabei aber notwendigerweise auf die Darstellung von nur einer Perspektive aus (z. B. wird der Zusammenhang zur Filterbanktheorie nicht behandelt).

Abschließend wollen wir noch drei weitere Quellen erwähnen, die an verschiedenen Stellen für das Skript sehr hilfreich waren. In der Diplomarbeit von [Kurth] findet man nicht nur gute Zusammenfassungen über die WFT, DWT und Filterbanktheorie, insbesondere der (in dieser Vorlesung nicht behandelten)  $M$ -Band Waveletpackets, sondern auch Anwendungen der Theorien in der digitalen Audiosignalverarbeitung, u. a. Denoising und Kompression. Eine sehr schöne Einführung ist auch das Buch von [Hubbard], in dem die Autorin in journalistisch aufbereiteter Form sehr verständlich die Welt der Wavelets darstellt: ein Buch zum Schmökern. Es spricht eigentlich nicht sehr für die Zunft der Mathe-

matiker, daß es einer Nichtfachfrau (Hubbard ist Journalistin!) bedarf, um ein auch für Laien zugängliches Buch über mathematische Methoden zu schreiben. Zu guter Letzt sei noch die „Waveletbibel“ von [Daubechies] zitiert, eines der ersten Bücher, in dem Wavelettheorie so umfassend und mathematisch präzise dargestellt ist. Viele Bücher über die Theorie der Wavelets zitieren [Daubechies] als eine ihrer wesentlichen Quellen.

- [ASVI] Michael Clausen: *Audiosignalverarbeitung I*. Skript zur gleichnamigen Vorlesung im SS 1998, Universität Bonn
- [Birge/Massart] L. Bergé, P. Massart: Preprint Universität Paris Sud, France 95.41, S. 1 - 32, 1995, To appear in Festschrift in honor of Le Cam (D. Pollard, E. Torgersen, G. Young Eds.), Springer Verlag
- [Blatter] Christian Blatter: *Wavelets - Eine Einführung*. Vieweg 1998
- [Burrus/Gopinath/Guo] C. Sidney Burrus, Ramesh A. Gopinath, Haitao Guo: *Wavelets and Wavelet Transforms*. Prentice Hall, New Jersey 1998
- [Clausen/Baum] Michael Clausen, Ulrich Baum: *Fast Fourier Transforms*. BI Wissenschaftsverlag 1993
- [Daubechies] Ingrid Daubechies: *Ten lectures on wavelets*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM 1992
- [Donoho] David L. Donoho: *Denoising by Soft-Thresholding*. IEEE Transaction on Information Theory, Vol. 41, Nr. 3, S. 613 - 627, Mai 1995
- [Folland] Gerald B. Folland: *Real Analysis*. John Wiley & Sons, 1984
- [Hayes] Monson H. Hayes: *Statistical Digital Signal Processing and Modelling* John Wiley & Sons, 1996
- [Hubbard] Barbara Burke Hubbard: *The world according to wavelets*. AK Peters, Wellesley, Massachusetts, 1996
- [Kaiser] Gerald Kaiser: *A friendly guide to wavelets*. Birkhäuser 1994
- [Krengel] Ulrich Krengel: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Vieweg, 1991
- [Lang] Serge Lang: *Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, 1993
- [Kurth] Frank Kurth: *Adaptive Waveletpackets und Anwendungen in der Audiosignalverarbeitung*. Diplomarbeit der Universität Bonn, Institut für Informatik, 1997

- [**Louis/Maß/Rieder**] Alfred K. Louis, Peter Maaß, Andreas Rieder: *Wavelets*. B. G. Teubner, Stuttgart 1994
- [**Matlab**] M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim J.-M. Poggi: *Wavelet Toolbox for Use with MATLAB*. The MathWorks, Inc. 1996
- [**Mertins**] Alfred Mertins: *Signaltheorie*. B. G. Teubner, Stuttgart 1996
- [**Oppenheim/Willsky**] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky: *Signale und Systeme*. VCH, 1992
- [**Schönhage**] Arnold Schönhage: *Equation solving in terms of computational complexity*. Proc. Int. Congress of Mathematics, Vol.1, S. 131-153, Berkeley 1986
- [**Schönhage/Grotefeld/Vetter**] Arnold Schönhage, Andreas Grotefeld, Ekekehart Vetter: *Fast Algorithms - A Multitape Turing Machine Implementation*. BI Wissenschaftsverlag, 1994
- [**Strang/Nguyen**] Gilbert Strang, Truong Nguyen: *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley-Cambridge Press 1996
- [**Wickerhauser**] Mladen V. Wickerhauser: *Adaptive Wavelet-Analysis*. Vieweg 1993