

# Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilung

---

**Definition:** Eine **Äquivalenzrelation** ist eine binäre Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

**Bezeichnung:**  $x \sim y$ ,  $x \sim_R y$

**Definition:** Sei  $A$  eine nicht leere Menge. Eine **Zerlegung** (oder **Partition**, oder **Klasseneinteilung**) von  $A$  ist eine Mengenfamilie  $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(A)$  mit:

$$(1) \quad A = \bigcup \mathcal{Z}$$

$$(2) \quad \emptyset \notin \mathcal{Z}$$

$$(3) \quad \text{gilt } M_1, M_2 \in \mathcal{Z} \text{ und } M_1 \neq M_2, \text{ so folgt } M_1 \cap M_2 = \emptyset.$$

Die Elementen der Zerlegung heißen Äquivalenzklassen.

# Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilung

---

**Satz:** Sei  $A$  eine nichtleere Menge.

Jede Äquivalenzrelation  $\sim$  über  $A$  definiert eine Zerlegung  $\mathcal{Z}$  von  $A$ , und umgekehrt, jede Zerlegung  $\mathcal{Z}$  von  $A$  bestimmt eine Äquivalenzrelation über  $A$ .

**Beweis:**  $\sim$  Äquivalenzrelation  $\mapsto \mathcal{Z} = \{A_a \mid a \in A\}$  Zerlegung

$$A_a = \{x \in A \mid x \sim a\}$$

$\mathcal{Z}$  Zerlegung  $\mapsto \sim$  Äquivalenzrelation

$$x \sim y \text{ gdw. } \exists M \in \mathcal{Z}: x, y \in M.$$

**Bezeichnung:**  $[a] = \{x \in A \mid x \sim a\}$  Äquivalenzklasse von  $a$

$A/\sim = \{[a] \mid a \in A\}$  Quotientenmenge (Faktormenge)

# Rechnen mit Äquivalenzrelationen

---

**Satz:** Sind  $R$  und  $S$  Äquivalenzrelationen über  $A$ , so ist auch  $R \cap S$  eine Äquivalenzrelation über  $A$ .

**Satz:** Seien  $R$  und  $S$  Äquivalenzrelationen über  $A$ .  
 $R \circ S$  ist eine Äquivalenzrelation über  $A$  genau dann, wenn  
 $R \circ S = S \circ R$ .

**Satz:** Seien  $R$  und  $S$  Äquivalenzrelationen über  $A$  bzw.  $B$ .  
Dann ist auch  $R \otimes S$  eine Äquivalenzrelation über  $A \times B$ .

# Rechnen mit Äquivalenzrelationen

---

$R$  Relation über  $A$ , wobei  $A \neq \emptyset$ .

$A \times A$  die größte Äquivalenzrelation, die  $R$  umfaßt.

**Satz:** Die nachfolgend definierte Relation  $R'$  ist eine Äquivalenzrelation.

$$R' = \{(x, y) \mid \exists n \in \mathbb{N} : \exists x_1, \dots, x_n \in A : \\ x = x_1 \wedge y = x_n \wedge (x_i = x_{i+1} \vee x_i R x_{i+1} \vee x_{i+1} R x_i)\}$$

$R'$  ist die kleinste Äquivalenzrelation, die  $R$  umfaßt

(die durch  $R$  über  $A$  induzierte Äquivalenzrelation).

# Halbordnungsrelationen

---

## Definition

Eine binäre Relation  $R$  über  $A$  heißt **Halbordnungsrelation**, falls  $R$  reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

**Bezeichnung:**  $x \leq y$

Sei  $\leq$  Halbordnungsrelation über  $A$ .

Zwei Elemente  $a, b \in A$  heißen **vergleichbar** bezüglich  $\leq$ , falls  $a \leq b$  oder  $b \leq a$  gilt.

# Halbordnungsrelationen

---

## Definition

Eine **Halbordnungsrelation**  $\leq$  über  $A$  heißt **Ordnungsrelation**, falls für zwei beliebige  $x, y \in A$  stets  $x \leq y$  oder  $y \leq x$ .

# Halbordnungsrelationen

---

**Bezeichnung:**  $x < y \stackrel{\text{def}}{=} (x \leq y) \wedge (x \neq y)$

## Definition

Sei  $\leq$  eine Halbordnungsrelation über  $A$ .

$b \in A$  heißt **unmittelbarer Nachfolger** von  $a \in A$ , falls  $a < b$  und keinen  $c \in A$  existiert, mit  $a < c$  und  $c < b$ .

( $a$  **unmittelbarer Vorgänger** von  $b$ )

# Halbordnungsrelationen

---

Sei  $\leq$  eine Halbordnungsrelation über  $A$ .

Sei  $\emptyset \neq M \subseteq A$  eine nichtleere Teilmenge von  $A$ .

## Definition

- Ein Element  $m \in M$  heißt **maximales Element** in  $M$ , wenn für alle  $m' \in M$ , aus  $m \leq m'$  folgt  $m = m'$ .
- Ein Element  $a \in A$  heißt **obere Schranke** von  $M$ , wenn für alle  $m \in M$ ,  $a \geq m$ .
- Eine **minimale obere Schranke** von  $M$  heißt **Supremum** von  $M$ .
- Gilt  $a \in M$  für das Supremum  $a$  von  $M$  in  $A$ , dann wird  $a$  **Maximum** von  $M$  genannt.

# Halbordnungsrelationen

---

Sei  $\leq$  eine Halbordnungsrelation über  $A$ .

Sei  $\emptyset \neq M \subseteq A$  eine nichtleere Teilmenge von  $A$ .

## Definition

- Ein Element  $m \in M$  heißt **minimales Element** in  $M$ , wenn für alle  $m' \in M$ , aus  $m' \leq m$  folgt  $m = m'$ .
- Ein Element  $a \in A$  heißt **untere Schranke** von  $M$ , wenn für alle  $m \in M$ ,  $a \leq m$ .
- Eine **maximale untere Schranke** von  $M$  heißt **Infimum** von  $M$ .
- Gilt  $a \in M$  für das Infimum  $a$  von  $M$  in  $A$ , dann wird  $a$  **Minimum** von  $M$  genannt.

# Halb Ordnungsrelationen

---

**Definition** Sei  $\leq$  eine Halb Ordnungsrelation über  $A$ .

$K \subseteq A$  heißt eine Kette in  $A$  bzgl.  $\leq$  falls die auf  $K$  induzierte Halbordnung  $\leq_K$  eine Ordnung ist.

$K$  heißt **maximale Kette** in  $A$ , falls es keine umfassende Kette in  $A$  bzgl.  $\leq$  gibt.

## Maximalkettenprinzip

- (1) In jeder halbgeordneten Menge gibt es bzgl. Mengeneinklusion maximale Ketten.
- (2) In jeder halbgeordneten Menge gibt es zu jeder Kette  $K$  eine  $K$  umfassende, bzgl.  $\leq$  maximale Kette.

# Halbordnungsrelationen

---

**Definition** Sei  $\leq$  eine Halbordnungsrelation über  $A$ .

Die Halbordnung ist wohlfundiert falls für Ketten

$$x_1 \geq x_2 \geq x_2 \geq \dots \dots \geq x_n \geq \dots$$

endlich sind, d.h. ein  $m$  existiert so dass  $x_m = x_k$  für alle  $k \geq m$ .

# Abbildungen und Funktionen

---

**Definition** Sei  $f \subseteq A \times B$  eine Relation zwischen  $A$  und  $B$ .

- (1)  $F$  heißt **linksvollständig**, falls es zu jedem  $a \in A$  ein  $b \in B$  gibt, so dass  $aFb$ .
- (2)  $F$  heißt **rechtseindeutig**, falls für alle Paare  $(a, b), (a, b') \in A \times B$  mit  $aFb$  und  $aFb'$  gilt  $b = b'$ .

# Abbildungen und Funktionen

---

**Definition** Sei  $f \subseteq A \times B$  eine linksvollständig und rechtseindeutige Relation. Dann heißt das Tripel  $f = (A, B, F)$  **Abbildung** von  $A$  nach  $B$ .

$F$  heißt **Graph** von  $f$ .

$A$  **Definitionsbereich** von  $f$ ;  $B$  **Wertebereich** von  $f$ .

**Bezeichnung:**  $f : A \rightarrow B$ .

- $a \in A$ : das eindeutig bestimmte Element  $b \in B$  mit  $aFb$  wird mit  $f(a)$  bezeichnet.
- $f(a)$  **Bild** von  $a$ ;  $a$  **Urbild** von  $f(a)$ .
- $f : a \mapsto b$

# Abbildungen und Funktionen

---

## Definition

Sei  $f = (A, B, F)$  eine Abbildung. Seien  $M \subseteq A$  und  $N \subseteq B$ .

**Bild** von  $M$ :

$$f(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in B \mid \exists a : (a \in A \wedge b = f(a))\}$$

**Urbild** von  $N$ :

$$f^{-1}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid f(a) \in N\}$$

$f(A)$  **Wertebereich** von  $f$

$$f^{-1}(b) \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(\{b\})$$

# Abbildungen und Funktionen

---

**Satz** Seien  $M_1, M_2 \subseteq A$  und  $N_1, N_2 \subseteq B$ .

Für jede Abbildung  $f : A \rightarrow B$  gilt:

$$(1) \quad f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$$

$$(2) \quad f(M_1 \cap M_2) = f(M_1) \cap f(M_2)$$

$$(3) \quad f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$$

$$(4) \quad f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$$

# Abbildungen und Funktionen

---

**Definition:** Sei  $f = (A, B, F)$  eine Abbildung. Sei  $M \subseteq A$ .

Die Abbildung  $g = (M, B, F \cap (M \times B))$  heißt die **Einschränkung** von  $f$  auf  $M$ .

**Bezeichnung:**  $f|_M$

**Definition:** Seien  $f = (A, B, F)$ ,  $g = (B, C, G)$  Abbildungen.

Die Abbildung  $(A, C, F \circ G)$  heißt die **Komposition** von  $f$  und  $g$ .

**Bezeichnung:**  $g \circ f$

# Abbildungen und Funktionen

---

**Satz:** Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ, d.h. für beliebige Abbildungen  $f = (A, B, F)$ ,  $g = (B, C, G)$ ,  $h = (C, D, H)$  gilt:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Beweis: Übung

# Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

---

**Definition:** Sei  $f : A \rightarrow B$  eine Abbildung.

- (1)  $f$  heißt **surjektiv**, falls  $f(A) = B$
- (2)  $f$  heißt **injektiv** (oder **eindeutig**), falls  
für alle  $a, a' \in A$  gilt: aus  $f(a) = f(a')$  folgt  $a = a'$ .
- (3)  $f$  heißt **bijektiv** (oder **umkehrbar eindeutig**),  
falls  $f$  surjektiv und injektiv ist.

# Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

---

**Satz:** Sei  $f : A \rightarrow B$  eine Abbildung. Die folgenden Aussagen sind logisch äquivalent:

(1)  $f$  ist surjektiv

(2) Für alle  $b \in B$  gilt  $f^{-1}(b) \neq \emptyset$

(3) Es gibt eine Abbildung  $g : B \rightarrow A$  mit  $f \circ g = id_B$

(4) Für alle Mengen  $C$  und alle Abbildungen  $r, s : B \rightarrow C$  gilt:  
Aus  $r \circ f = s \circ f$  folgt  $r = s$ .

**Bemerkung:** Im Beweis der Implikation (2)  $\Rightarrow$  (3) wird die Tatsache benutzt, dass es eine Funktion gibt, die jeder nichtleeren Menge  $M$  ein Element  $F(M) \in M$  zuordnet.

# Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

---

## Auswahlaxiom (Zermelo)

Zu jeder Menge  $\mathcal{M}$  von nichtleeren Mengen  
gibt es eine Abbildung  $f$  von  $\mathcal{M}$ ,  
mit  $f(A) \in A$  für jede Menge  $A \in \mathcal{M}$ .

# Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

---

**Satz** Sei  $f : A \rightarrow B$  eine Abbildung. Die folgenden Aussagen sind logisch äquivalent:

(1)  $f$  ist injektiv

(2) Für alle  $b \in B$  gilt  $|f^{-1}(b)| = 1$

(3) Es gibt eine Abbildung  $g : B \rightarrow A$  mit  $g \circ f = id_A$

(4) Für alle Mengen  $D$  und alle Abbildungen  $r, s : D \rightarrow A$  gilt:  
Aus  $f \circ r = f \circ s$  folgt  $r = s$ .

# Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

---

**Satz** Sei  $f : A \rightarrow B$  eine Abbildung. Die folgenden Aussagen sind logisch äquivalent:

- (1)  $f$  ist bijektiv
- (2) Für alle  $b \in B$  gilt  $|f^{-1}(b)| = 1$
- (3) Es gibt genau eine Abbildung  $g : B \rightarrow A$   
mit  $g \circ f = id_A$  und  $f \circ g = id_B$

Die stets existierende Abbildung  $g : B \rightarrow A$  mit  $g \circ f = id_A$  und  $f \circ g = id_B$  heißt die zu  $f$  **inverse Abbildung** (oder **Umkehrabbildung**).

**Bezeichnung:**  $f^{-1}$

# Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

---

## Satz:

- (1) Die Komposition von injektiven Abbildungen ist injektiv
- (2) Die Komposition von surjektiven Abbildungen ist surjektiv
- (3) Die Komposition von bijektiven Abbildungen ist bijektiv

Beweis: Übung