

Mengen und Mengenoperationen

Mengen

- Definition, Beispiele
- Endliche u. Unendliche Mengen, Kardinalität.
- Darstellung mittels definierenden Eigenschaften
- Gleichheit von Mengen
- Komplement von M in U
- Teilmenge und Obermenge
- Potenzmenge und Mengenfamilien
- Mengenoperationen
(Vereinigung, Durchschnitt, Differenz, Produkt)

Produkt von Mengen

$$M_1 \times \cdots \times M_k = \{(m_1, \dots, m_k) \mid m_1 \in M_1 \wedge \cdots \wedge m_k \in M_k\}$$

Notation:

Gilt $M_1 = M_2 = \cdots = M_k = M$, dann schreibt man anstelle von $M_1 \times \cdots \times M_k$ kurz M^k .

Bemerkung: $M^0 = \emptyset$ $M^1 = M$

Weitere Rechenregeln für Mengenoperationen

Kommutativität

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

Assoziativität

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Distributivität

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

Weitere Rechenregeln für Mengenoperationen

Idempotenz

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

Doppelnegation

$$\overline{\overline{A}} = A$$

deMorgans Regeln

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Absorption

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cap C = A, \text{ falls } A \subseteq C$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cup C = C, \text{ falls } A \subseteq C$$

Relationen

Seien M und N zwei beliebige Mengen.

Eine **binäre Relation** R zwischen M und N ist eine Teilmenge der Produktmenge $M \times N$.

Bezeichnung: $(x, y) \in R \quad R(x, y) \quad xRy$

Seien M_1, \dots, M_n n beliebige Mengen, wobei $n \geq 0$.

Eine **n -stellige Relation** R zwischen M_1, \dots, M_n ist eine Teilmenge der Produktmenge $M_1 \times \dots \times M_n$.

Bezeichnung: $(x_1, \dots, x_n) \in R \quad R(x_1, \dots, x_n)$

Relationen

Ist R eine Relation zwischen den Mengen M_1, \dots, M_n und gilt $M_1 = \dots = M_n = M$, dann heißt R eine (n -stellige) Relation über M .

- Die Nullrelation über M : $R = \emptyset \subseteq M \times M$

- Die Gleichheitsrelation über M :

$\Delta_M = \{(x, x) \mid x \in M\} \subseteq M \times M$ Diagonale von $M \times M$.

id_M (Identitätsrelation über M)

Operationen auf Relationen

Mengenoperationen

$$R = S \quad \text{g.d.w.} \quad \forall(x, y) : (xRy \Leftrightarrow xSy)$$

$$R \subseteq S \quad \text{g.d.w.} \quad \forall(x, y) : (xRy \Rightarrow xSy)$$

$$\neg R = \{(x, y) \mid \neg(xRy)\}$$

$$R \cup S = \{(x, y) \mid (xRy) \vee (xSy)\}$$

$$R \cap S = \{(x, y) \mid (xRy) \wedge (xSy)\}$$

Operationen auf Relationen

Seien $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$

Inverse Relation

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid xRy\}$$

Komposition von R und S

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y : ((xRy) \wedge (ySz))\}$$

Seien $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq C \times D$

Inneres Produkt von R und S

$$R \otimes S = \{((x, z), (y, u)) \mid (xRy) \wedge (zSu)\}$$

Operationen auf Relationen: Eigenschaften

Satz: Seien M_1, M_2 beliebige Mengen und seien R und S Relationen zwischen $M_1 \times M_2$. Dann gilt:

$$(1) \quad (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$$

$$(2) \quad (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$$

Satz: Seien M_1, M_2, M_3 beliebige Mengen und seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$. Dann gilt:

$$(3) \quad (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$$

Operationen auf Relationen: Eigenschaften

Satz: Sei M eine beliebige Menge und seien R, S, T Relationen über M . Dann gilt:

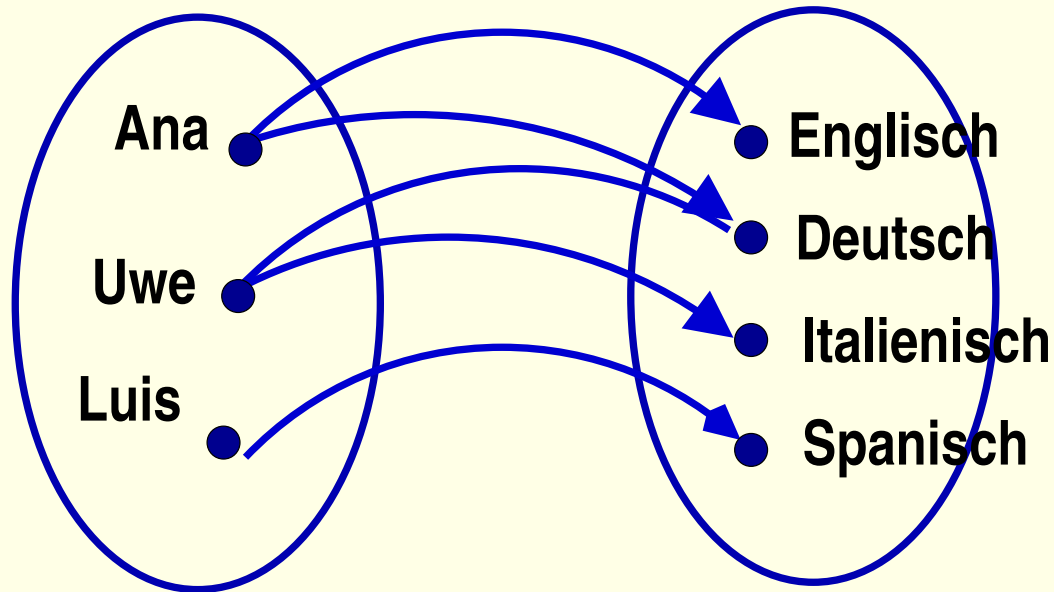
$$(1) \quad (R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$$

$$(2) \quad T \circ (R \cap S) \subseteq (T \circ R) \cap (T \circ S)$$

$$(3) \quad (R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$$

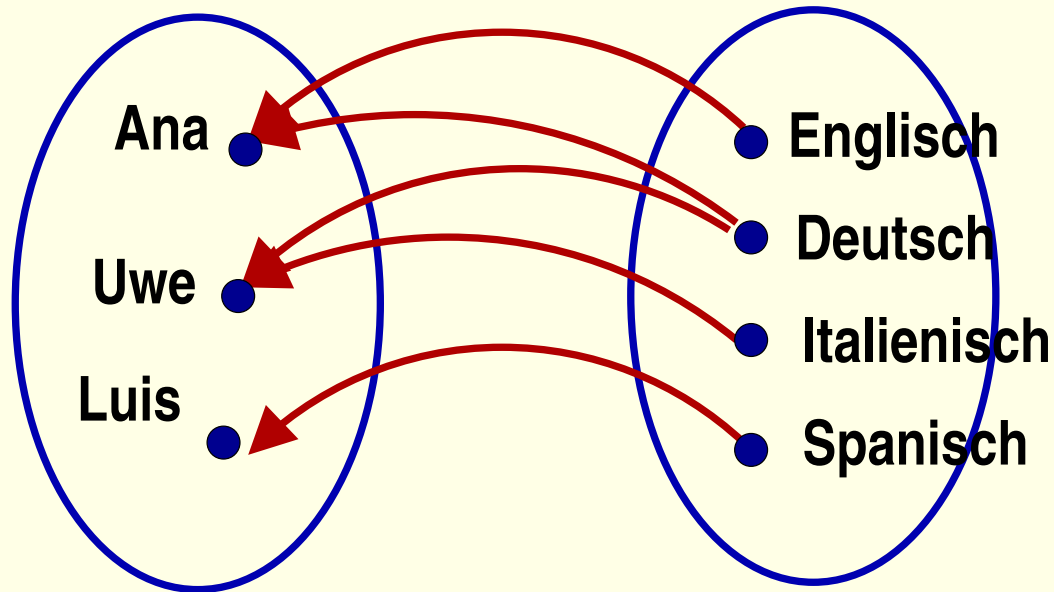
$$(4) \quad T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S)$$

Relationen



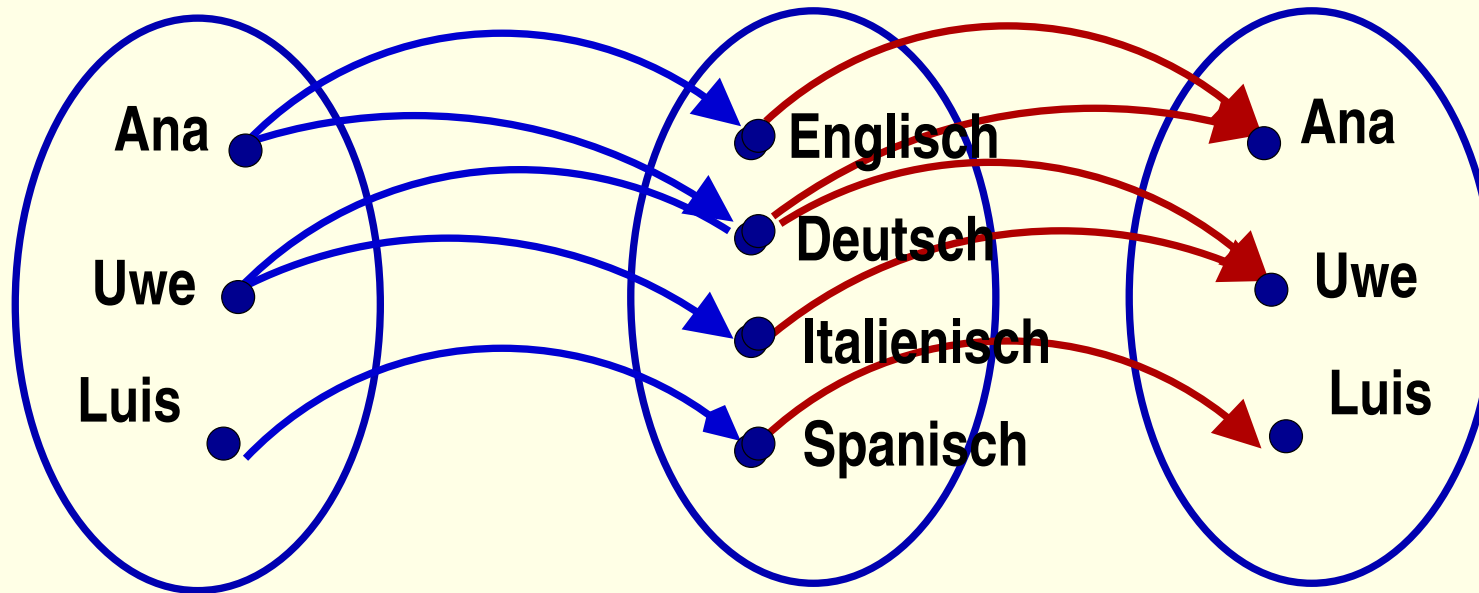
$R = \{ (Ana, Englisch), (Ana, Deutsch), (Uwe, Deutsch), (Uwe, Italienisch), (Luis, Spanisch) \}$

Relationen



$$R^{-1} = \{ (\text{Englisch}, \text{Ana}), (\text{Deutsch}, \text{Ana}), (\text{Deutsch}, \text{Uwe}), (\text{Italienisch}, \text{Uwe}), (\text{Spanisch}, \text{Luis}) \}$$

Relationen



$$R \circ R^{-1} = \{ (Ana, Ana), (Ana, Uwe), \\ (Uwe, Uwe), (Uwe, Ana), \\ (Luis, Luis) \}$$

Wichtige Eigenschaften von Relationen

Sei R eine Relation über A .

(1) R heißt **reflexiv** falls

für jedes $x \in A$ gilt xRx .

(2) R heißt **symmetrisch** falls

für alle $x, y \in A$ aus xRy stets folgt yRx .

(3) R heißt **antisymmetrisch** falls

für alle $x, y \in A$ aus xRy und yRx stets folgt $x = y$.

(4) R heißt **transitiv** falls

für alle $x, y, z \in A$ aus xRy und yRz stets folgt xRz .

(5) R heißt **nacheindeutig** falls

für alle $x, y, z \in A$ aus xRy und xRz stets folgt $y = z$.

Wichtige Eigenschaften von Relationen

Bemerkung:

“antisymmetrisch” nicht gleichbedeutend mit “nicht symmetrisch”!

R antisymmetrisch: $\forall x, y : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y.$

R symmetrisch: $\forall x, y : (xRy \Rightarrow yRx)$

R nicht symmetrisch: $\exists x, y : (xRy \wedge \neg(yRx))$

Wichtige Eigenschaften von Relationen

Satz: Sei R eine Relation über M .

- (1) R reflexiv genau dann, wenn $\Delta_M \subseteq R$.
- (2) R symmetrisch genau dann, wenn $R^{-1} \subseteq R$
genau dann, wenn $R^{-1} = R$
- (3) R transitiv genau dann, wenn $R \circ R \subseteq R$
- (4) R antisymmetrisch genau dann, wenn $R \cap R^{-1} = \Delta_M$

Wichtige Eigenschaften von Relationen

Sei R eine Relation über M , und sei P eine Eigenschaft.

Die Relation R^* heißt Abschluss von R bezüglich P wenn:

(1) R^* besitzt die Eigenschaft P

(2) $R \subseteq R^*$

(3) R^* ist die kleinste Menge die (1) und (2) erfüllt:

für alle Relationen S , so dass

S besitzt die Eigenschaft P , und

$R \subseteq S$

gilt $R^* \subseteq S$.