

Optimierung

Kurt Mehlhorn

Adrian Neumann



max planck institut
informatik

13. Dezember 2014

- Finde den schnellsten Weg von A nach B .
- Gegeben eine Menge von Arbeitern und eine Menge von Aufgaben. Die Arbeiter brauchen unterschiedlich lang für die Bearbeitung der Arbeiten. Finde die Zuordnung der Aufgaben an die Arbeiter, die die Gesamtbearbeitungszeit minimiert (alternativ, möglichst frühe Fertigstellung).
- Steuere die Sägen in einem Sägewerk so, dass möglichst wertvolle Produkte erzeugt werden.
- Steuere einen Marschflugkörper so, dass seine Gesamtflugstrecke nicht überschritten und die Wahrscheinlichkeit eines Abschusses minimiert wird.

- Optimierte den Fahrplan der Bundesbahn, der Saarbrücker Busse,
- Finde einen guten Stundenplan für die UdS.
- Finde den Evakuierungsplan für ein Sportstadion.
- Berechne den billigsten Ernährungsplan (Diät).
- Berechne für eine Telefongesellschaft, wo Masten für den Mobilfunk aufgestellt werden sollen. Ziel ist eine möglichst große Überdeckung bei geringen Kosten.

- Formulierung des Problems und Erstellen eines mathematischen Modells.
- Lösen des Modellproblems.
- Rückübersetzen der Lösung in die reale Welt und Hinterfragen der Lösung. Ist die Lösung nützlich in der realen Welt oder weist sie eher auf eine Schwäche der Modellierung hin? Im zweiten Fall, Verbesserung des Modells.

Warnung: Ein Modell erfaßt immer nur einen Ausschnitt der Wirklichkeit. Auch beim sorgfältigen Erstellen eines Modells kann es passieren, dass man wesentliche Aspekte der Wirklichkeit weglässt. Daher ist der dritte Schritt wesentlich. Die Lösung des Optimierungsproblems weist oft auf Schwächen des Modells hin.

- Modellannahme für Fahrplan der Bundesbahn: Umsteigezeiten mindestens fünf Minuten.
- Ein optimaler Fahrplan wird für viele Verbindungen nur die Minimalumsteigezeit planen.
- Bei Benutzung/Inspektion der Lösung stellt man fest, dass auch schon kleinste Verspätungen die Lösung total durcheinander bringen.
- Als Konsequenz wird man manche Umsteigezeiten erhöhen oder sich überlegen, wie man die Robustheit eines Fahrplans gegenüber Störungen modellieren kann (stochastische Optimierung).

George Stigler formulierte 1945 folgende Optimierungsaufgabe:
Wieviel kostet eine Ernährung, die alle Grundbedürfnisse erfüllt?

George J. Stigler: The cost of subsistence. *Journal of Farm Economics*, 27(2):303–314, 1945.

Er meinte die Aufgabe halb-spaßig, halb-ernst. Halb-spaßig, weil es auch damals schon viele Bücher und Artikel zu ausgewogener und günstiger Ernährung gab, halb-ernst, weil der amerikanische Staat Hunderttausende von Soldaten zu ernähren hatte.



George Joseph Stigler (1911 – 1991) war ein US-amerikanischer Ökonom. Im Jahr 1982 erhielt er den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften. Ausgezeichnet wurde er für seine Arbeit zu Industrial Organization, dem Funktionieren von Märkten und Ursachen und Folgen von Marktregulierung.

Modellierung: Was ist eine hinreichende Ernährung?

Erste Antwort: Eine Ernährung, die die Empfehlungen des National Research Councils bezüglich 9 wesentlicher Nährstoffe erfüllt.

| Nutrient | Daily Recommended Intake |
|---------------------------|--------------------------|
| Calories | 3,000 Calories |
| Protein | 70 grams |
| Calcium | .8 grams |
| Iron | 12 milligrams |
| Vitamin A | 5,000 IU |
| Thiamine (Vitamin B1) | 1.8 milligrams |
| Riboflavin (Vitamin B2) | 2.7 milligrams |
| Niacin | 18 milligrams |
| Ascorbic Acid (Vitamin C) | 75 milligrams |

Er weißt darauf hin, dass diese Empfehlungen wahrscheinlich unvollständig und ungenau sind.

Heute: auch obere Schranke für Fett im Speiseplan, niedrigere Kalorienzahl



Stigler betrachtet die 77 Nahrungsmittel, für die das Bureau of Labor Statistics regelmäßig die Preise ermittelt.

Für jedes Nahrungsmittel entnimmt er der Literatur den Gehalt der verschiedenen Nährstoffe.

Er weißt ausdrücklich darauf hin, dass diese Zahlen mit Vorsicht zu genießen seien,

da gewisse Arten der Zubereitung oder lange Lagerung gewisse Nährstoffe zerstören und

da die Tabelle nur Mittelwerte enthält. So enthält etwa ein Apfel der Sorte Ontario 10x so viel Vitamin C wie ein Apfel der Sorte McIntosh.

Formalisierung der Aufgabe: Wieviel soll man von jedem Nahrungsmittel kaufen, damit die Anforderungen an den Speiseplan erfüllt sind und die Kosten minimal sind?

x_i = Menge (in kg) des i -ten Nahrungsmittels (NM) im optimalen Speiseplan, $i = 1..77$

9 Bedingungen (je eine pro Inhaltsstoff): Plan muss Inhaltsstoffe in hinreichender Menge zur Verfügung stellen, etwa für Kalorien:

$$\text{Kallorien/kg von NM 1} \cdot x_1 + \dots + \text{Kallorien/kg von NM 77} \cdot x_{77} \geq 3000.$$

Die Kosten des Ernährungsplans sind dann

$$\text{Kosten} = \text{Preis/kg von NM 1} \cdot x_1 + \dots + \text{Preis/kg von NM 77} \cdot x_{77}.$$

Aufgabe: finde nichtnegative Werte für die Unbekannten x_1 bis x_{77} , die alle Nebenbedingungen erfüllen und die Kosten minimieren.

In 1945 gab es keinen Algorithmus zur Lösung von Ungleichungssystemen. Stigler bestimmte auf sehr clevere Weise eine Näherungslösung.

Dominanz: Wenn A billiger ist als B, aber von jedem Inhaltstoff mindestens so viel enthält wie B, dann kann man B streichen, ohne eine optimale Lösung zu verlieren. Reduktion auf 15 NM.

Mehl dominiert Brot, Rinderleber dominiert alle anderen Fleischarten, alle patentierten Cereals und Getränke werden dominiert

“künstliche Nahrungsmittel”, etwa 5 Kilo Mehl plus 2 Kilo Kraut:
Wenn ein künstliches NM ein echtes NM dominiert, kann man das echte wieder streichen. Reduktion auf 9 NM.

Nun 9 zu erfüllende Ungleichungen in 9 Variablen (oBdA, x_1 bis x_9). Wollen Lösung minimaler Kosten. Optimale Lösung muss einige der Ungleichungen mit Gleichheit erfüllen, da ...

Es gibt $2^9 - 1 = 511$ nichtleere Teilmengen der Ungleichungen. Stiglitz betrachtet nur einige Teilmengen S (Intuition).

Für festes S löst er das entstehende Gleichungssystem und nun wird seine Beschreibung vage.

Er kommt dann auf eine Lösung mit jährlichen Kosten von 39.93 Dollar (etwa 510 Dollar mit heutigem Geld).

Er kommt dann auf eine Lösung mit jährlichen Kosten von 39.93 Dollar (etwa 510 Dollar mit heutigem Geld).

| Food | Annual Quantities | Annual Cost (in Dollars) |
|-------------------|-------------------|--------------------------|
| Wheat Flour | 370 lb. | 13.33 |
| Evaporated Milk | 57 cans | 3.84 |
| Cabbage | 111 lb. | 4.11 |
| Spinach | 23 lb. | 1.85 |
| Dried Navy Beans | 285 lb. | 16.80 |
| Total Annual Cost | | 39.93 |

Ist das optimal? Stigler argumentiert (nicht ganz sauber) eine untere Schranke: Mehl sei die billigste Kalorienquelle: Mehl für \$24.50 hat 3000 Kalorien. Aber kaum Kalzium. Die billigste Quelle für Kalzium sei Käse. Dann noch mal \$14.90 dazu.

Dantzig erfindet Lösungsalgorithmus (Simplexalgorithmus) in 47. Ein Team von 9 menschlichen Rechnern berechnet in 120 Manntagen die optimale Lösung: Der billigste Speiseplan kostet 39.69 Dollar. Stigler's Lösung lag nur 24 Cent darüber.

- algorithmisch: optimale Lösung eines Systems von Ungleichungen zu finden ist nicht einfach. Dantzig erfindet Lösungsalgorithmus in 1947. Siehe unten.
- Modellierung:
 - der Versuch, das Problem mathematisch zu fassen, ist interessant, **aber**
 - die Modellierung ist inadequat: niemand will so essen.

Kann man Abwechslung modellieren?



Lineare Optimierung = Maximierung (Minimierung) einer linearen Funktion in n reellen Variablen unter Nebenbedingungen (Nebenbedingungen sind Gleichungen und Ungleichungen).

Beispiel: Speiseplanerstellung und viele, viele andere Probleme.

- Fourier-Motzkin: einfach aber ineffizient. Joseph Fourier (1768 – 1830), Theodore Motzkin (1908 – 1970), Arbeit in 1936
- Simplex Algorithmus (Georg Dantzig, 1947): immer noch der am meisten benutzte Algorithmus; oft sehr schnell, aber im schlechtesten Fall exponentiell.
- Leonid Khachiyan, Ellipsoidmethode, und N. Karmakar, Innere Punkt Methode, entwickelten Algorithmen mit polynomieller Laufzeit. Die Innere Punkt Methode wird weit verwendet.
- Systeme: CPLEX, Gurobi, SoPlex, ...

Der Simplexalgorithmus

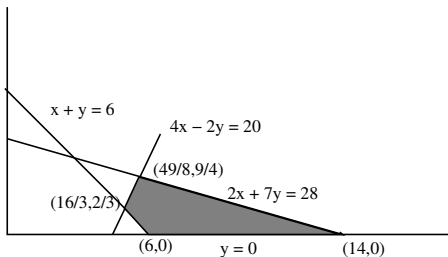
maximiere y wobei

$$2x + 7y \leq 28$$

$$4x - 2y \geq 20$$

$$x + y \geq 6$$

$$y \geq 0$$



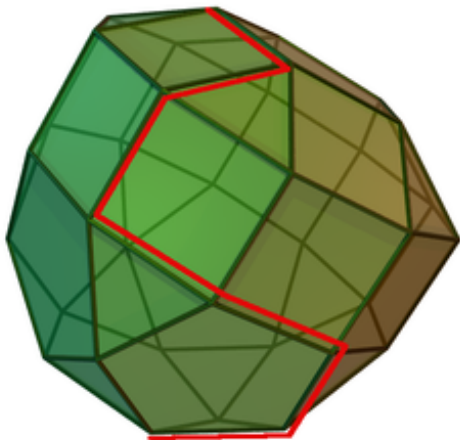
Ungleichungen definieren ein Polygon. Wir suchen die Ecke mit maximaler y -Koordinate. Der Schnittpunkt der Geraden $2x + 7y = 28$ und $4x - 2y = 20$ hat die Koordinaten $(49/8, 9/4)$. Damit $y^* = 9/4$.

Idee des Algorithmus: finde eine Ecke p des zulässigen Bereichs P und betrachte die inzidenten Kanten von P . Falls keine zu einem höheren Wert der Zielfunktion führt, ist die Ecke optimal. Falls eine Kante zu einem besseren Wert führt, laufe zu der anderen Ende der Kante und wiederhole.

3 Dim auf nächster Folie



Simplex in 3D (Bild aus Wikipedia)



Maximierung der z-Koordinate

- Fourier–Motzkin entscheidet, ob ein System von Ungleichungen lösbar ist
- löse alle Ungleichungen nach x_n auf
- es gibt drei Arten von Ungleichungen: (1) $x_n \leq \dots$, (2) $x_n \geq \dots$, und (3) erwähnen x_n nicht.
- konstruiere neues System durch Elimination von x_n : übernehme (3) unverändert. Aus jedem Paar $x_n \leq A$ und $x_n \geq B$ von (1) und (2) konstruiere $B \leq A$.
- iteriere bis alle Variablen eliminiert sind. Dann hat man eine Menge von Ungleichungen zwischen Zahlen. Trivial zu entscheiden.
- illustriere am Beispiel: siehe nächste Folie
- Erweiterung auf Optimierung: Binärsuche

Fourier – Motzkin Beispiel

$$\begin{aligned} \text{maximiere } y \text{ wobei } & 2x + 7y \leq 28 \\ & 4x - 2y \geq 20 \\ & x + y \geq 6 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

hat Lösung $9/4$. Wir benutzen Fourier-Motzkin um zu entscheiden, ob es eine Lösung mit Wert ≥ 3 gibt.



Die Gefahren schlechter Modellierung und/oder Daten

Das Ergebnis einer Optimierung kann nie besser sein als das Modell und die Daten. (George B. Dantzig, The diet problem. *Interfaces*, 20(4):43–47, 1990.)

Dantzig sollte abnehmen: ≤ 1500 Kalorien pro Tag. Hatte Angst vor Hungergefühl und wollte daher das Sättigungsgefühl maximieren:

$$\text{Nichtwassermenge} = (1 - \text{Wassergehalt von 1kg NM1})x_1 + \dots$$

Lösung 1: 500 Gallonen Essig pro Tag. Warum? In den Daten stand, dass Essig kaum Kalorien hätte und **kein** Wasser enthalte. Dantzig strich Essig.

Lösung 2: 200 Brühwürfel. Er probierte eine Suppe mit 3 Brühwürfeln; total versalzen. Obere Schranke von drei Brühwürfeln.

Lösung 3: 2 Pfund Kleie pro Tag. Seine Frau verbot ihm, soviel Kleie zu essen. Obere Schranke für Kleie.

Lösung 4: 2 Pfund Molasse

Lösung 5: Schließlich wurde es seiner Frau zu bunt und sie übernahm das Regime. Dantzig nahm 22 Pfund (amerikanische Pfund) ab.



Speiseplan, Modellierung von Abwechslung

Wir nehmen Gerichte als die Bestandteile des Speiseplans.

x_i = Anzahl der Tage, an denen wir Gericht i servieren.

Zusätzliche Nebenbedingungen:

- $x_1 + \dots + x_n = 365$, Speiseplan für ein Jahr
- $x_i \leq 26$, höchstens einmal alle zwei Wochen
- $\sum_{i \in \text{Nudelgerichte}} x_i \geq 52$, $\sum_{i \in \text{Fischgerichte}} x_i \geq 52$, ... Abwechslung
- Alles andere wie bisher.
- Problem: was bedeutet 3,37 mal Spaghetti?
- Lösung 1: x_i ganzzahlig als zusätzliche Nebenbedingung: Aber ganzzahlige Optimierung ist NP-vollständig.
- Lösung 2: finde optimale reelle Lösung. Runde alle Zahlen ab zur nächsten ganzen Zahl. Überleg dir was für die noch offenen Tage.



Speiseplan, Modellierung von Abwechslung

Wir nehmen Gerichte als die Bestandteile des Speiseplans.

x_i = Anzahl der Tage, an denen wir Gericht i servieren.

Zusätzliche Nebenbedingungen:

- $x_1 + \dots + x_n = 365$, Speiseplan für ein Jahr
- $x_i \leq 26$, höchstens einmal alle zwei Wochen
- $\sum_{i \in \text{Nudelgerichte}} x_i \geq 52$, $\sum_{i \in \text{Fischgerichte}} x_i \geq 52$, ... Abwechslung
- Alles andere wie bisher.
- **Problem: was bedeutet 3,37 mal Spaghetti?**
- Lösung 1: x_i ganzzahlig als zusätzliche Nebenbedingung: Aber ganzzahlige Optimierung ist NP-vollständig.
- Lösung 2: finde optimale reelle Lösung. Runde alle Zahlen ab zur nächsten ganzen Zahl. Überleg dir was für die noch offenen Tage.



- Lineare Optimierung (= Maximierung (Minimierung) einer linearen Funktion in n Variablen unter Nebenbedingungen (Nebenbedingungen sind Gleichungen und Ungleichungen)) ist sehr ausdrucksstark und effizient lösbar.
- Ganzzahlige Linear Optimierung (man ist nur in ganzzahligen Lösungen interessiert) ist noch viel ausdrucksstärker, aber nicht effizient lösbar (NP-vollständig).
- Ergebnis nie besser als das Modell und die Daten. Das gilt auch für Simulation.
 - Klimasimulation
 - Stresstest bei Banken

- Lineare Optimierung (= Maximierung (Minimierung) einer linearen Funktion in n Variablen unter Nebenbedingungen (Nebenbedingungen sind Gleichungen und Ungleichungen)) ist sehr ausdrucksstark und effizient lösbar.
- Ganzzahlige Linear Optimierung (man ist nur in ganzzahligen Lösungen interessiert) ist noch viel ausdrucksstärker, aber nicht effizient lösbar (NP-vollständig).
- Ergebnis nie besser als das Modell und die Daten. Das gilt auch für Simulation.
 - Klimasimulation
 - Stresstest bei Banken