



## Übungen zu Ideen der Informatik

<https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter18/ideen/>

Blatt 11

Abgabeschluss: 21.01.2019

### Aufgabe 1 (10 Punkte)

Geben sie Lösungsvorschläge für die folgenden Probleme an und zeigen sie, wie man überprüfen kann, ob sie tatsächlich eine Lösung sind. Einen Lösungsvorschlag, der die Prüfung übersteht, nennt man Zertifikat.

- Gibt es einen Weg<sup>1</sup> der Länge *höchstens*  $k$  zwischen zwei Knoten  $u$  und  $v$  in einem Graphen?  
Ich hätte gern folgende Antwort: Der Lösungsvorschlag ist eine Folge von Knoten. Man überprüft, dass die Folge mit  $u$  beginnt und mit  $v$  aufhört, dass je zwei aufeinanderfolgende Knoten durch eine Kante verbunden sind, und dass die Folge aus höchstens  $k + 1$  Knoten besteht.
- Gibt es einen Weg der Länge *mindestens*  $k$  zwischen zwei Knoten  $u$  und  $v$  in einem Graphen?
- Für eine feste Sequenz von Tetris-Blöcken: Kann man so spielen, dass man mehr als  $k$  Punkte erreicht?
- Gegeben einen Graphen  $G$ , kann man  $G$  auf ein Blatt Papier zeichnen, ohne dass sich Kanten kreuzen?
- Gegeben ein Graph  $G$  und eine Zahl  $k$ , gibt es eine Teilmenge  $S$  der Knoten der Größe  $k$ , so dass alle Knoten in  $S$  paarweise durch eine Kante verbunden sind?

### Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sie sind der Manager für zwei identische Arbeiter  $X$  und  $Y$ . Ihre Firma bekommt im Laufe des Tages nach und nach Aufträge, die sie an  $X$  und  $Y$  verteilen müssen. Natürlich wissen Sie nichts von den Aufträgen, bevor sie eingehen. Der Auftrag  $A_i$  geht zur Zeit  $t_i$  ein und braucht Zeit  $w_i$  um bearbeitet zu werden und muss sofort zugeteilt werden. Ein Auftrag, der einmal zugeteilt wurde, kann dem Arbeiter nicht mehr weggenommen werden. Es ist Feierabend, wenn der letzte Arbeiter seinen letzten Auftrag fertig gestellt hat. Eine einfache Strategie zum Verteilen der Aufträge ist es, den Auftrag immer dem Arbeiter zu geben, der augenblicklich weniger unerledigte Arbeit hat, also als erster fertig würde, kämen keine neuen Aufträge mehr rein.

- Wie ordnet die einfache Strategie die Aufträge mit Arbeitsaufwand  $w_1 = 10, w_2 = 20, w_3 = 10, w_4 = 30, w_5 = 40, w_6 = 20$  und Eingangszeit  $t_i = i$  den Arbeitern zu?
- Geben Sie ein Beispiel an, in dem ein hellseherischer Manager, der Aufträge optimal zuteilen kann, die Aufträge mindestens 1.49 mal schneller abarbeiten lässt, als ihre einfache Strategie.
- Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass der erste Auftrag zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  kommt und dass die Auftragslage so gut ist, dass bei der einfachen Strategie beide Arbeiter stets zu tun haben. Nur am Schluss muss einer der beiden Arbeiter warten, bis auch der andere fertig ist. Sei  $w_{\max} = \max_i w_i$  die längste Bearbeitungszeit eines Auftrags und sei  $W = \sum_i w_i$  die Gesamtlänge der Aufträge.
  - Argumentieren sie, dass bei der einfachen Strategie spätestens um  $W/2 + w_{\max}$  Feierabend ist. Hinweis: betrachten sie den Zeitpunkt, zu dem einem der beiden Arbeiter die Arbeit ausgeht. Wie lange muss dann der andere höchstens noch arbeiten? Wann geht einem der beiden spätestens die Arbeit aus?

<sup>1</sup>Ein Weg der Länge  $k$  ist eine Folge von Knoten  $x_0, \dots, x_k$ , so dass sich keine zwei Knoten wiederholen und stets eine Kante zwischen aufeinanderfolgenden Knoten ist.

- (b) Argumentieren sie, dass beim hellseherischer Manager frühestens um  $\max(W/2, w_{\max})$  Feierabend ist.

**Aufgabe 3** (10 Punkte)

Sie möchten alle ihre Freunde zu einer Party einladen. Da ihr Freundeskreis recht groß ist, verstehen sich nicht alle ihrer Freunde untereinander. Sie organisieren daher mehrere Partys. Um die Partys angenehm zu gestalten, wollen Sie nie zwei Personen zur gleichen Party einladen, die sich nicht mögen. Sie möchten rausfinden, ob es eine Lösung mit  $k$  Partys gibt.

Wir nehmen an, dass Sie wissen, welche Ihrer Freunde sich gegenseitig nicht mögen, und das „mögen“ eine symmetrische Relation ist: A mag B genau dann wenn B auch A mag.

- Formulieren Sie das Party-Problem als ein Problem auf Graphen und skizzieren Sie einen kleinen Beispielgraphen an, der Ihre Übersetzung erläutert.
- Argumentieren Sie, dass dieses Problem in NP ist.
- Nehmen Sie an, Sie können Graphen effizient mit der minimalen Zahl von Farben färben. Geben Sie ein Verfahren an, das das Party-Problem effizient löst.

Komplexität war    spannend  okay  langweilig   
                          schwierig  okay  einfach