

Übungen zu Ideen der Informatik

<https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter18/ideen/>

Blatt 13

Abgabeschluss: Die Uebung muss nicht abgegeben werden.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Eine Clique in einem Graphen G ist eine Menge von Knoten, in dem jeder mit jedem durch eine Kante verbunden ist. Eine unabhängige Knotenmenge ist eine Menge von Knoten, zwischen denen es keine Kante gibt.

- Gegeben ein Graph und eine Zahl k . Hat der Graph eine unabhängige Knotenmenge der Größe k ? Argumentieren Sie das dieses Problem in NP ist. Was ist ein Lösungsvorschlag? Wie überprüfen sie ihn?
- Gegeben ein Graph und eine Zahl k . Hat der Graph eine Clique der Größe k ? Argumentieren Sie das dieses Problem in NP ist. Was ist ein Lösungsvorschlag? Wie überprüfen sie ihn?
- Nehmen Sie an, dass Sie in Polynomzeit Cliques der Größe k in Graphen finden können. Argumentieren Sie, dass Sie dann auch unabhängige Knotenmengen der Größe k in Graphen finden können. Hinweis: Sie müssen dazu den Graphen abändern.
- Nehmen Sie an, dass Sie in Polynomzeit unabhängige Knotenmengen der Größe k in Graphen finden können. Argumentieren Sie, dass Sie dann auch Cliques der Größe k in Graphen finden können. Hinweis: Sie müssen dazu den Graphen abändern.

Lösung:

- Lösungsvorschlag ist eine Menge S von k Knoten. Überprüfung: Für jedes Paar von Knoten in S verifiziere ich, dass die Kante zwischen diesen Knoten vorhanden ist.

Genauer: Ich laufe über alle Kanten und suche die heraus, die beide Endpunkte in S haben. Falls ich annehmen darf, dass es zwischen zwei Knoten höchstens eine Kante gibt, dann überprüfe ich noch, dass die Anzahl der ausgesuchten Kanten gleich $k(k-1)/2$ ist.

Falls es parallele Kanten geben darf, dann schreibe ich die Kanten als Paare (u, v) , wobei der Knoten mit dem kleineren Namen zuerst geschrieben wird. Dann sortiere ich die Menge der ausgesuchten Kanten. Parallele Kanten stehen nun nebeneinander. Ich gehe über die sortierte Folge und streiche Duplikate.

- Lösungsvorschlag ist eine Menge S von k Knoten. Überprüfung: Für jedes Paar von Knoten in S verifiziere ich, dass es keine Kante zwischen diesen Knoten gibt.

Genauer: Ich laufe über die Kanten. Falls ich auf eine Kante treffe, die beide Endpunkte in S hat, lehne ich den Lösungsvorschlag ab.

- Sei $G = (V, E)$. Sei \bar{G} der folgende Graph auf der gleichen Knotenmenge. In \bar{G} gibt es eine Kante (u, v) genau wenn es diese Kante in G nicht gibt. Dann ist S eine unabhängige Knotenmenge in G genau wenn S eine Clique in \bar{G} ist.

Das ergibt folgenden Algorithmus:

- Konstruiere \bar{G} .
- Finde eine Clique S der Größe k in \bar{G} .
- Gib S zurück.

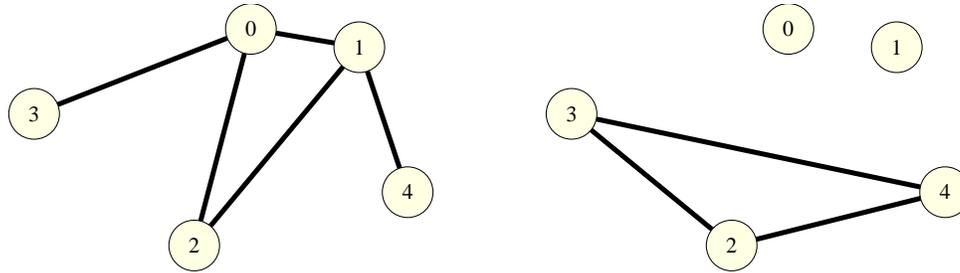


Abbildung 1: Ein Graph G und sein Komplement \bar{G} . Die Menge $\{0, 1, 2\}$ ist eine Clique in G und eine unabhängige Knotenmenge in \bar{G} . Die Menge $\{2, 3, 4\}$ ist eine unabhängige Knotenmenge in G und eine Clique in \bar{G} .

- d) Es gilt auch, S ist eine Clique in G genau wenn S eine unabhängige Knotenmenge in \bar{G} ist. Das ergibt folgenden Algorithmus.
- Konstruiere \bar{G} .
 - Finde eine unabhängige S der Größe k in \bar{G} .
 - Gib S zurück.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

100 Autos wollen von Start nach Ziel fahren. Die Fahrzeiten sind wie angegeben. Auf der Straße von Start nach B ist die Fahrzeit $20 + x/2$ Minuten, wenn sie von x Autos befahren wird. Nehmen Sie zunächst an, dass die Straße zwischen A und B NICHT existiert.

- Was ist das globale Optimum (Globales Optimum = minimale Gesamtfahrzeit)? Wie viele Autos fahren oben rum und wieviele fahren unten rum? Stellt sich dieses Optimum auch ein, wenn jeder einzelne Fahrer seine Fahrzeit optimiert?
- Wir nehmen nun die Straße zwischen A und B hinzu. Was ist nun das globale Optimum? Welches Gleichgewicht stellt sich ein, wenn jeder Fahrer seine Fahrzeit optimiert? Nehmen sie dabei an, dass in jedem Schritt genau ein Fahrer seine Route wechselt.

Lösung:

- a) Wir nehmen zunächst an, dass es keine Straße zwischen A und B gibt.

Wenn n Fahrer oben rum fahren und $100 - n$ unten rum, dann ist die Gesamtfahrzeit

$$n \cdot (100 + 10 + n) + (100 - n) \cdot (20 + (100 - n)/2 + 100) = 17000 + 3n^2/2 - 110n.$$

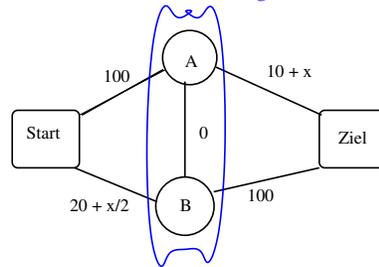
Ableiten zeigt und, dass das Minimum für $n = 100/3$ angenommen wird. Jetzt vergleichen wir noch 36 oben rum und 37 oben rum. 37 ist besser. Dann ist die Gesamtfahrzeit $37 \cdot 147 + 63 \cdot 151.5 = 14983.5$. Beachten Sie, dass die oben-Fahrer länger brauchen als die unten-Fahrer.

Als Gleichgewicht stellt sich ein, dass die unten-Fahrer genauso lang brauchen wie die oben-Fahrer.

Wenn n Personen oben fahren, ist ihre Fahrzeit $110 + n$. Die Fahrzeit der Fahrer, die unten fahren, ist $170 - n/2$. Gleichlange Fahrzeit haben wir für $n = 40$. Dann ist die Gesamtfahrzeit $100 \cdot 150 = 15000$.

- b) Jetzt kommt die Verbindung zwischen A und B dazu. Fahrer, die B – Ziel benutzen, werden zu B – A – Ziel wechseln, solange weniger als 90 Autos die Straße A – Ziel benutzen. Fahrer die Start – A benutzen sind auf jeden Fall besser dran, wenn sie Start – B – A benutzen. Also fahren im Gleichgewicht 100 Autos von Start nach B. Dort fahren 90 weiter über A und 10 direkt nach Ziel. Die Gesamtfahrzeit ist $100 \cdot 170 = 17000$.

Zur Berechnung des globalen Optimums machen wir folgende Beobachtung. Die Fahrzeit zwischen A und B beträgt 0 Minuten. Daher können wir die Knoten wie in Abbildung gezeigt verschmelzen und die linke Hälfte und die rechte Hälfte des Netzwerks getrennt betrachten.



Wenn x Autos unten herum von Start nach AB fahren dann ist die Gesamtfahrzeit $(20 + x/2)x + 100(100 - x) = 10000 - 80x + x^2/2$. Die Ableitung ist Null für $x = 80$. Also fahren 80 Autos über die Straße Start - B und 20 über die Straße Start - A. Die Gesamtfahrzeit für das linke Teilnetzwerk ist $60 \cdot 80 + 100 \cdot 20 = 6800$.

Nun zum rechten Teilnetzwerk. Wenn x Autos die Straße A - Ziel benutzen, dann ist die Gesamtfahrzeit $(10 + x)x + 100(100 - x) = 10000 - 90x + x^2$. Die Ableitung ist Null für $x = 45$. Also fahren 45 Autos auf der Straße A - Ziel und 55 Autos auf der Straße B - Ziel. Die Gesamtfahrzeit für das rechte Teilnetzwerk ist $55 \cdot 45 + 100 \cdot 55 = 7975$.

Die Gesamtfahrzeit ist $6800 + 7975 = 14775$.

25 Autos benutzen die Straße von B nach A.

Auktionen, Gleichgewichte, Nutzenmaximierende Agenten war spannend okay langweilig
 schwierig okay einfach