Universität
des
Saarlandes
FR Informatik

Kurt Mehlhorn

WiSe 2018/19

Übungen zu Ideen der Informatik

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter18/ideen/

Blatt 6 Abgabeschluss: 3.12.2018

Aufgabe 1 (*20 Punkte*) Für einen ausgewogenen Lerneffekt muss ein Student sowohl Aufgaben vom Typ M als auch Aufgaben vom Typ A bearbeiten. Ein Student braucht 2 Stunden um eine Aufgabe vom Typ M zu lösen und 8 Stunden für eine Aufgabe von Typ A. Es gibt drei Tutoren für die Vorlesung. Der erste Tutor glaubt, dass man 4 Stunden für Aufgaben vom Typ M und 2 Stunden für Aufgaben vom Typ A braucht und dass Studenten nicht mehr als sechs Stunden am Zettel sitzen dürfen. Der zweite Tutor glaubt, M Aufgaben löst man in einer Stunde und A Aufgaben löst man in 3 Stunden. Er denkt, dass Studenten mindestens 4 Stunden arbeiten sollten. Der letzte Tutor findet man braucht 8 Stunden für M Aufgaben und nur eine Stunde für A Aufgaben. Er sagt, man muss mindestens drei Stunden am Zettel arbeiten.
Der findige Student löst gerade so viele Aufgaben vom Typ M und A, dass er mit möglichst wenig Zeitaufwand alle Tutoren zufriedenstellt.

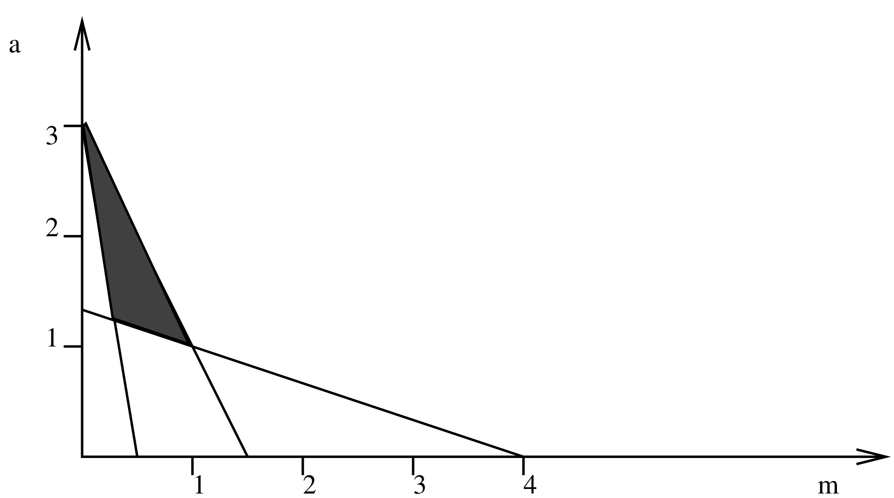
a) Stellen Sie die oben angegebenen Informationen als Ungleichungssystem dar. Geben Sie auch die Kostenfunktion an.

Lösung: Ich nehme x fuer die Anzahl der M Aufgaben und y für die Anzahl der A Aufgaben, die der Student bearbeitet. Ich habe die folgenden Gleichungen und Ungleichungen.

- Arbeitsaufwand des Studenten $= 2x + 8y$. Den gilt es zu minimieren.
- Erster Tutor: $4x + 2y \leq 6$.
- Zweiter Tutor: $x + 3y \geq 4$.
- Dritter Tutor: $8x + y \geq 3$.

b) Zeichnen Sie die Ungleichungen in der Region $x \in [0; 2]$, $y \in [0; 4]$ und bestimmen Sie die Region der Punkte, die alle Ungleichungen erfüllen. Dabei sind x und y die Anzahlen der M bzw A Aufgaben, die der Student löst. (Hinweis: falls sie Teil a) der Aufgabe nicht gelöst haben, dann nehmen sie die Ungleichungen $4x + 2y \leq 6$, $x + 3y \geq 4$, und $8x + y \geq 3$.)

Lösung:



Die Punkte in der dunklen Region erfüllen alle Ungleichungen. Die Region ist ein Dreieck mit den Ecken $(0, 3)$, $(15/69, 87/69)$ und $(1, 1)$. Man sagt zu dieser Region auch zulässiges Gebiet.

c) Nutzen Sie Ihre Zeichnung um die optimale Lösung zu finden. Wieviele Stunden arbeitet der Student? Macht es einen Unterschied, ob man Aufgaben nur ganz oder gar nicht lösen kann oder man sie auch teilweise lösen kann? Im letzteren Fall wäre es etwa erlaubt, 1.3 Aufgaben vom Typ M und 0.8 Aufgaben vom Typ A zu lösen.

Lösung: Wenn man die Aufgaben auch teilweise lösen darf, ist eine der Ecken des zulässigen Gebiets eine optimale Lösung. Die Ecken haben die Koordinaten $(0, 3)$ mit Zeitaufwand 24, $(15/69, 87/69) = (5/23, 29/23)$ mit Zeitaufwand $(30 + 696)/69 > 10$ und $(1, 1)$ mit Zeitaufwand 10. Die Ecke $(1, 1)$ ist also optimal, sogar wenn man Aufgaben teilweise lösen darf. Da diese Ecke ganzzahlig ist, ist sie auch die optimale Lösung, wenn der Student Aufgaben nur vollständig oder gar nicht lösen darf.

Warum ist das Optimum in einer Ecke? Betrachte die Geradenschar $2x + 8y = c$ für verschiedene Werte von c. Wenn die Gerade $2x + 8y = c$ für einen bestimmten Wert von c das zulässige Gebiet schneidet, dass gibt es eine Lösung mit dem Arbeitsaufwand c. Wir müssen also das kleinste c finden, für das die Gerade das zulässige Gebiet noch schneidet. Für das kleinste c, wir die Gerade das Gebiet nur noch in einer Ecke des Gebiets schneiden.

d) Benutzen Sie das Fourier-Motzkin-Verfahren, um zu entscheiden, ob es eine Lösung mit einer Arbeitszeit von höchstens 7 Stunden gibt.

Lösung: Wir fragen uns, ob das Ungleichungssystem $2x + 8y \leq 7$, $4x + 2y \leq 6$, $x + 3y \geq 4$, $8x + y \geq 3$ eine Lösung hat. Wir lösen die Ungleichungen nach y auf und erhalten $y \leq 7/8 - x/4$, $y \leq 3 - 2x$, $y \geq 4/3 - x/3$, $y \geq 3 - 8x$. Durch Kombinieren erhalten wir 4 Ungleichungen für x, nämlich,

$$3 - 8x \leq \frac{7}{8} - \frac{x}{4} \quad \frac{4}{3} - \frac{x}{3} \leq \frac{7}{8} - \frac{x}{4} \quad 3 - 8x \leq 3 - 2x \quad \frac{4}{3} - \frac{x}{3} \leq 3 - 2x.$$

Vereinfachen ergibt

$$\frac{31x}{4} \geq \frac{17}{8} \quad \frac{x}{12} \geq \frac{11}{24} \quad 6x \geq 0 \quad \frac{5x}{3} \leq \frac{5}{3},$$

und nach weiterer Vereinfachung

$$x \geq \frac{17}{62} \quad x \geq \frac{11}{2} \quad x \geq 0 \quad x \leq 1.$$

Eliminieren von x ergibt

$$\frac{17}{62} \leq 1 \quad \frac{11}{2} \leq 1 \quad 0 \leq 1.$$

Die zweite Ungleichung gilt nicht. Also gibt es keine Lösung mit Kosten kleiner gleich 7.

Aufgabe 2 (*10 Punkte*) Optimierungsverfahren können benutzt werden, um optimale Entscheidungen unter einer Vielzahl von Einschränkungen zu treffen. Beispielsweise kann die Entscheidung, ob Ihre Bank Ihnen einen Kredit gewährt, von einem Algorithmus getroffen werden. In die Berechnung könnten persönliche Informationen wie Ihr Wohnort, Ihr Bildungsstand, Details aus Ihrer Versicherungshistorie, Kontobewegungen oder Ähnliches einfließen. Diskutieren Sie vor und Nachteile eines solchen Verfahrens im Vergleich zur Vergabe basierend auf der Entscheidung Ihres Bankberaters. Überlegen Sie sich auch andere Einsatzbereiche dieser automatischen Entscheidungsverfahren.

Lösung: Man muss hier unterscheiden, wie der Algorithmus formuliert ist. Algorithmen für solche Aufgaben werden entweder explizit formuliert oder aus Beispielen gelernt (siehe Vorlesung Maschinelles Lernen).
Explizit formuliert heißt, dass Regeln explizit formuliert werden. Etwa: Wenn Alter höchstens 40 und Kredithöhe höchstens 20% des jährlichen Einkommens, dann vergib den Kredit.
Vorteil der expliziten Verfahren: transparent, fair, Nachteil: unflexibel.

Die Alternative ist, dass der Algorithmus aus vorhandenen Beispielen gelernt wird. Dann gibt es keine expliziten Regeln.

Vorteil: bequeme Entwicklung, flexibel, Abdecken vieler Kriterien, Nachteil: intransparent, nicht besser als die Beispiele.

Optimierung war	spannend ☐ okay ☐ langweilig ☐
	schwierig ☐ okay ☐ einfach ☐