

Übungen zu Ideen der Informatik

<https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter19/ideen/>

Blatt 11

Abgabeschluss: 13.1.2020

Aufgabe 1 (10 Punkte) 100 von 10000 (1%) Frauen über vierzig haben Brustkrebs. Wir machen Mammographien um Brustkrebs nachzuweisen. 900 von 1000 (90%) Frauen mit Brustkrebs haben eine positive Mammographie. Nur 90 von 9900 (weniger als 1%) Frauen ohne Brustkrebs haben eine (fälschlicherweise) positive Mammographie.

Nehmen Sie an, sie seien eine Frau über vierzig und erhalten ein positives Mammographieergebnis. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie Brustkrebs haben?

Männliche Hörer ersetzen Brustkrebs durch Prostatakrebs.

Die oben angegebenen Wahrscheinlichkeiten entsprechen ungefähr der Wirklichkeit.

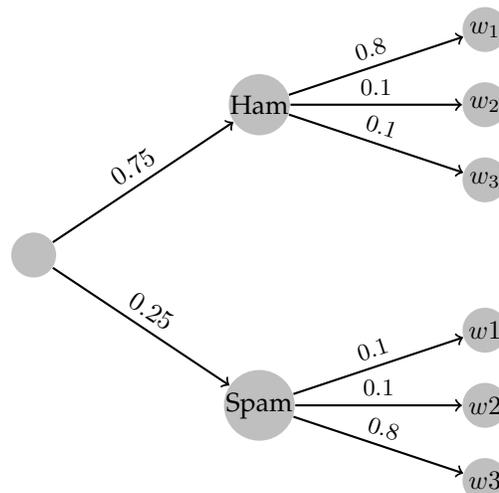
Lösung: Nehmen wir eine Population von 10000 Frauen. Davon haben 100 Brustkrebs und 9900 sind gesund. Von den 100 Frauen mit Brustkrebs bekommen 90 einen positiven Befund. Von den 9900 bekommen auch 90 einen positiven Befund. Also bekommen insgesamt 180 Frauen einen positiven Befund. Die Hälfte davon hat Brustkrebs, die andere Hälfte ist gesund. Die Wahrscheinlichkeit, dass man bei einem positiven Befund tatsächlich krank ist, ist 0.5.

Und nun mit Formeln. Ich benutze folgende Abkürzungen: BK = Brustkrebs, G = Gesund, PB = positiver Befund, NB = negativer Befund.

$$\begin{aligned} \text{prob}(\text{BK}|\text{PB}) &= \frac{\text{prob}(\text{PB}|\text{BK}) \cdot \text{prob}(\text{BK})}{\text{prob}(\text{PB}|\text{BK}) \cdot \text{prob}(\text{BK}) + \text{prob}(\text{PB}|\text{G}) \cdot \text{prob}(\text{G})} \\ &= \frac{0.9 \cdot 0.01}{0.9 \cdot 0.01 + 90/9900 \cdot 9900/10000} = \frac{9/1000}{9/1000 + 9/1000} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist 50%.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Wir benutzen einen Bayes-Filter zur Klassifikation von emails. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass emails immer nur aus einem Wort bestehen und zwar aus einem der drei Worte w_1 , w_2 und w_3 . Das generative Modell ist wie in folgender Abbildung.



Die email, die nur aus dem Wort w_1 besteht, wird also mit Wahrscheinlichkeit $0.75 \cdot 0.8 + 0.25 \cdot 0.1$ erzeugt. Entsprechend für w_2 und w_3 .

Der Filter erklärt eine email, die aus dem Wort w_i besteht zu Spam, wenn $\text{prob}(\text{Spam}|w_i) \geq 0.7$.

- Wird eine email, die aus dem Wort w_1 besteht zu Ham erklärt? Ja/Nein. Analog für w_2 und w_3 .
- Welche Wege im Modell stehen für emails, die falsch klassifiziert werden.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Ham-Email als Spam klassifiziert?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Spam-Email als Ham klassifiziert?

Hinweis: Sie können diese Aufgabe auf zwei Arten bearbeiten. Entweder wenden Sie die Bayessche Regel an. Oder Sie betrachten eine Kollektion von 1000 Emails. Davon sind nach dem Modell 750 Ham und 250 Spam. Von dem 750 Hams sind $0.8 \cdot 750 = 8 \cdot 75 = 600$ das Wort w_1 , $0.1 \cdot 750 = 75$ das Wort w_2 und $0.1 \cdot 750 = 75$ das Wort w_3 . Jetzt machen Sie eine entsprechende Rechnung für Spam.

Lösung:

- Die Rechnung für Spam sieht so aus. Von dem 1000 Emails sind 250 Spam. Davon bestehen 25 aus dem Wort w_1 , 25 aus dem Wort w_2 und 200 aus dem Wort w_3 .

Es gibt also 625 emails, die aus dem Wort w_1 bestehen. Davon sind $25/625 = 1/25 = 0.04 = 4\%$ Spam.

Es gibt 100 emails, die aus dem Wort w_2 bestehen. Davon sind $25/100 = 1/4 = 25\%$ Spam.

Es gibt 275 emails, die aus dem Wort w_3 bestehen. Davon sind $200/275 = 8/11 \approx 0.72 = 72\%$ Spam.

Und nun mit Rechnung.

$$\begin{aligned} \text{prob}(\text{Spam}|w_1) &= \frac{\text{prob}(w_1|\text{Spam}) \cdot \text{prob}(\text{Spam})}{\text{prob}(w_1|\text{Spam}) \cdot \text{prob}(\text{Spam}) + \text{prob}(w_1|\text{Ham}) \cdot \text{prob}(\text{Ham})} \\ &= \frac{0.1 \cdot 0.25}{0.1 \cdot 0.25 + 0.8 \cdot 0.75} = \frac{25}{625} = \frac{1}{25} = 0.04. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{prob}(\text{Spam}|w_2) &= \frac{\text{prob}(w_2|\text{Spam}) \cdot \text{prob}(\text{Spam})}{\text{prob}(w_2|\text{Spam}) \cdot \text{prob}(\text{Spam}) + \text{prob}(w_2|\text{Ham}) \cdot \text{prob}(\text{Ham})} \\ &= \frac{0.1 \cdot 0.25}{0.1 \cdot 0.25 + 0.1 \cdot 0.75} = \frac{0.25}{1} = \frac{1}{4} = 0.25. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{prob}(\text{Spam}|w_3) &= \frac{\text{prob}(w_3|\text{Spam}) \cdot \text{prob}(\text{Spam})}{\text{prob}(w_3|\text{Spam}) \cdot \text{prob}(\text{Spam}) + \text{prob}(w_3|\text{Ham}) \cdot \text{prob}(\text{Ham})} \\ &= \frac{0.8 \cdot 0.25}{0.8 \cdot 0.25 + 0.1 \cdot 0.75} = \frac{2}{2.75} = 0.72. \end{aligned}$$

w_3 wird als Spam klassifiziert und w_1 und w_2 werden als Ham klassifiziert.

- $\rightarrow \text{Ham} \rightarrow w_3$ und $\rightarrow \text{Spam} \rightarrow w_1|w_2$.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Ham-Email als Spam klassifiziert? 0.1, da eine Ham-Email, die aus w_3 besteht als Spam klassifiziert wird.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Spam-Email als Ham klassifiziert? 0.2, da eine Spam Email, die entweder aus w_1 oder aus w_2 besteht, als Ham klassifiziert wird.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Automatisierte Verfahren werden immer mehr zur Entscheidungsfindung verwendet. Bestätigen Sie, dass Sie eine Stunde im dem GI-Stellungnahme zur algorithmischen Entscheidungsfindung gelesen haben. Die Stellungnahme steht als Materialie auf der Webseite.

Lösung: KM fand unter anderem die folgenden Punkte interessant.

- Die Schufa (Auskunftei für kreditrelevante Informationen) bevorzugt einfache Modelle (lineare Regression) zur Vorhersage von Kreditwürdigkeit, weil diese verständlich seien. Komplexere Modelle würden geringfügig bessere Ergebnisse liefern wäre aber weniger transparent.

- Schufa testet ihre Methoden auf Diskriminierung, etwa ob die Methoden Frauen und Männer gleichbehandeln. Sie können aber NICHT testen, ob Personen mit Migrationshintergrund benachteiligt werden, weil sie dieses Datum nicht wissen und auch nicht erfragen dürfen. Die Autoren leiten daraus ab, dass es vom Staat gepflegte und anonymisierte Datensätze geben müsste, die auch solche Informationen enthalten.
- Es sollte eine gesetzliche Pflicht geben, dass Verfahren offen gelegt werden und sich Tests unterziehen müssen.
- Verschiedene Versionen von Gleichbehandlung können nicht gleichzeitig garantiert werden. Sie dazu das Video Ethische Fragen.

Maschinelles Lernen I war spannend okay langweilig
schwierig okay einfach