Universität
des
Saarlandes
FR Informatik

Kurt Mehlhorn und Antonios Antoniadis **WiSe 2019/20**

Übungen zu Ideen der Informatik

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter19/ideen/

Blatt 2 Abgabeschluss: 28.10.2019

In dieser Übung lernen wir die Grundzüge des inneren Aufbaus von Rechenanlagen.
Ein Schaltnetz besteht aus Gattern. Wir arbeiten mit drei Arten von Gattern, Und-Gatter, Oder-Gatter, und Nicht-Gatter. Und-Gatter ($\wedge$) und Oder-Gatter ($\vee$) haben je zwei Eingänge und einen Ausgang, Nicht-Gatter ($\neg$) haben einen Eingang und einen Ausgang. Die Gatter operieren auf den booleschen Werten (auch Bits genannt) 0 und 1 gemäß folgenden Regeln.

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\neg x$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

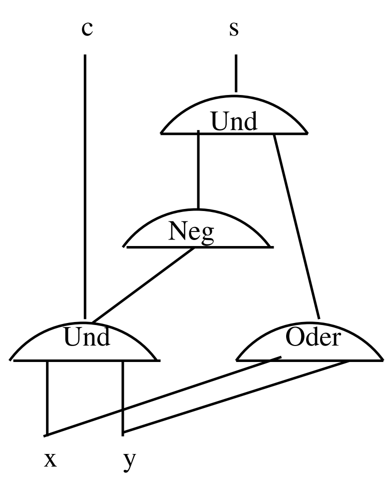
Aufgabe 1 (*7 Punkte*) Welche Funktionen wird durch den Ausdruck $(x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y)$ berechnet? Geben Sie die Funktionstafel an. Gibt es für diese Funktion einen gebräuchlichen Namen?

Lösung:

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\neg(x \wedge y)$	$(x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y)$
0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Gebräuchliche Namen: Ungleich, Exclusives Oder, Summe modulo 2, Entweder-Oder.

Aufgabe 2 (*7 Punkte*) Betrachte den folgenden Schaltkreis mit zwei Eingängen x und y und zwei Ausgängen c und s. Die Information fließt von unten nach oben.



a) Geben Sie Ausdrücke für c und s an. Für c lautet die Antwort $c = x \wedge y$.

b) Geben Sie die Funktionstabellen für c und s an.

c) Verifizieren Sie, dass gilt $x + y = 2c + s$. Dabei werden Bits als Zahlen interpretiert, d.h., das Bit 0 wird als die Zahl 0 interpretiert und das Bit 1 wird als die Zahl 1 interpretiert. Für $x = y = 1$, ergibt sich $c = 1$ und $s = 0$, also $x + y = 1 + 1 = 2 \cdot 1 + 0 = 2c + 2$.

d) Welchen Namen würden Sie dem Schaltkreis geben?

Lösung:

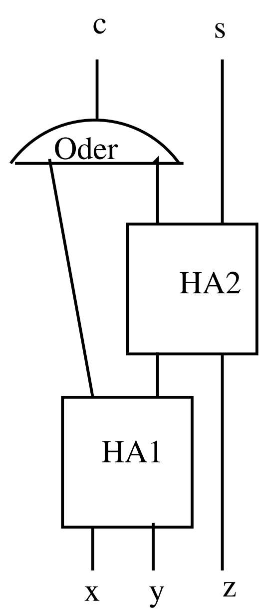
a) Wir haben $c = x \wedge y$ und $s = x \oplus y$. Dabei ist $\oplus$ die Funktion aus der ersten Aufgabe. In der ersten Aufgabe finden Sie auch die Funktionstabellen für beide Funktionen.

b) Der Übertrag c ist 1 genau wenn x und y beide 1 sind. Das Summenbit s ist 1 wenn genau eines von x und y gleich 1 ist. Alternativ: Den Funktionstabellen entnimmt man, dass gilt:

- Für $x = y = 0$ gilt $c = s = 0$, also $x + y = 0 = 2c + s$.
- Wenn $x = 0$ und $y = 1$ oder $x = 1$ und $y = 0$, dann $c = 0$ und $s = 1$, also $x+y = 1 = 2\cdot 0+1 = 2c+s$.
- Wenn $x = y = 1$, dann $c = 1$ und $s = 0$, also $x + y = 1 + 1 = 2 \cdot 1 + 0 = 2c + s$.

c) Addition von zwei Bits.

Aufgabe 3 (*9 Punkte*) Wir bezeichnen nun den Schaltkreis aus der zweiten Aufgabe durch HA. Das steht für Halbaddierer. HA hat zwei Eingänge und zwei Ausgänge. Betrachte folgenden Schaltkreis mit drei Eingängen x, y und z. Die Ausgänge heißen wieder c und s. Beachten Sie dass das Summenbit des unteren Halbaddierers eine Eingabe für den oberen Halbaddierer ist.



Zeigen Sie

$$x + y + z = 2c + s.$$

Dieser Schaltkreis läuft unter dem Namen Volladdierer.

Lösung: Wir probieren alle Möglichkeiten für die Eingaben durch:

- Alle null: Dann sind die Ausgänge beider Halbaddierer Null und daher beide Ausgänge des Volladdierers Null.

- Genau eine Eins: Wenn z Eins ist und x und y Null, dann sind beide Ausgänge von HA1 Null und bei HA2 ist c Null und s Eins. Also ist der s-Ausgang des Volladdierers Eins und der c-Ausgang Null. Falls z Null ist und entweder x oder y gleich 1, dann ist der c-Ausgang von HA1 gleich Null und der s-Ausgang Eins. Also bekommt HA2 eine Null und eine Eins und liefert eine Eins am s-Ausgang und eine Null am c-Ausgang. Damit ist der s-Ausgang des Volladdierers Eins und der c-Ausgang Null.

- Genau zwei Einsen: Falls z Eins ist und entweder x oder y, dann ist der s-Ausgang von HA1 gleich 1 und der c-Ausgang gleich Null. Damit sind beider Eingänge von HA2 gleich Eins und HA2 liefert eine Null am s-Ausgang und eine Eins am c-Ausgang. Für den Volladdierer gilt daher $(c, s) = (1, 0)$. Falls z Null ist und x und y Eins, dann gilt für HA1 $(c, s) = (1, 0)$. HA2 bekommt daher zwei Nullen und liefert zwei Nullen. Damit gilt für den Volladdierer $(c, s) = (1, 0)$.
- Drei Einsen: Dann liefert HA1 $(c, s) = (1, 0)$. Daher bekommt HA2 eine Eins und eine Null und liefert $(c, s) = (0, 1)$. Damit gilt für den Volladdierer $(c, s) = (1, 1)$.

Alternative Argumentation für mehr mathematisch orientiere Hörer: Seien c_1 und s_1 die Ausgaben des unteren Halbaddierers und c_2 und s_2 die Ausgaben des obigen Halbaddierers. Dann gilt

$$s_2 = s_1 \oplus z = (x \oplus y) \oplus z = (x + y + z) \bmod 2.$$

und

$$c = c_1 \vee c_2 = (x \wedge y) \vee ((x \oplus y) \wedge z) = (x + y + z) \div 2.$$

Beachte dabei $(x \wedge y) \vee ((x \oplus y) \wedge z)$ auf jeden Fall 1 liefert wenn x und y 1 sind und auf jeden Fall 0, wenn x und y 0 sind. Wenn genau eines von x und y 1 ist, dann liefert der Ausdruck 1 falls z gleich 1 ist.

Aufgabe 4 (*7 Punkte*) In der Vorlesung sahen wir eine Turingmaschine, die zählt. Dabei war die Annahme, dass das Band mit

$$\ldots 0000000BBBBBBB\ldots$$

initialisiert ist und der Kopf der Maschine am Anfang auf der rechtesten Null steht. Modifizieren Sie die Turingmaschine so, dass sie für den Anfangsbandinhalt

$$\ldots BBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBB\ldots$$

funktioniert.

Zur Erinnering: in der Vorlesung nahmen wir an, dass das Band am Anfang mit ....00000BBBBBB..... beschriftet ist, der Kopf auf der rechtesten Null steht und die Maschine im Zustand q1 ist. Das Program war

```
q1  0  q2  1  S
q1  1  q1  0  L
q2  0  q2  0  R
q2  1  q2  1  R
q2  B  q1  B  L
```

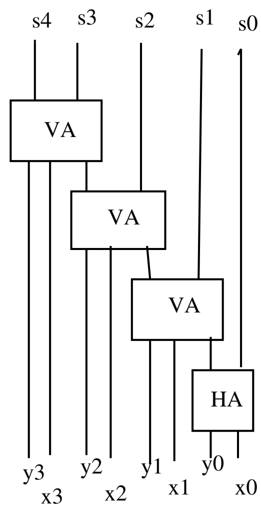
Lösung: Wir geben der Maschine einen neuen Anfangszustand q0. Sie druckt eine 0 und geht in den Zustand q1 über. Danach kann sie fast so arbeiten, wie in der Vorlesung. Wenn wir im Zustand q1 eine 1 lesen, schreiben wir eine 0 und gehen nach links. Sobald wir eine 0 oder ein B (DAS IST NEU) lesen, drucken wir eine 1 und gehen in den Zustand q2 über. Im Zustand q2 gehen wir nach rechts bis wir ein B lesen. Wir gehen eins nach links und wieder in den Zustand q1. Die ganze Tafel ist

q0	B	q1	0	S
q1	1	q1	0	L
q1	0	q2	1	R
q1	B	q2	1	R
q2	0/1	q2	0/1	R
q2	B	q1	B	L

Einer der Hörer hat noch eine elegantere Lösung gefunden. Er braucht keinen neuen Zustand, sondern startet die Maschine wie bisher im Zustand q_1. Es kommt nur eine Zeile dazu. Falls die Maschine im Zustand q_1 ein B liest, druckt sie eine Eins und geht nach rechts und in den Zustand q_2. Also

q1	1	q1	0	L
q1	0	q2	1	R
q1	B	q2	1	R
q2	0/1	q2	0/1	R
q2	B	q1	B	L

Aufgabe 5 (*0, optional Punkte*) Wir bezeichnen den Schaltkreis aus der dritten Aufgabe mit VA. Das steht für Volladdierer. Ein Volladdierer hat drei Eingänge und zwei Ausgänge. Betrachte folgenden Schalkkreis mit 8 Eingängen und 5 Ausgängen.



Was macht dieser Schaltkreis?

Lösung: Er addiert die beiden Binärzahlen $x_3x_2x_1x_0$ und $y_3y_2y_1y_0$. Erinnern Sie sich, wie man zwei Zahlen addiert. Man schreibt die Zahlen übereinander.

$$\begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\ y_3 & y_2 & y_1 & y_0 \end{array}$$

Dann geht man die beiden Zahlen von rechts nach links durch. Man addiert x_0 und y_0 und erhält eine Summe s_0 und einen Übertrag c_1. Den Übertrag schreibt man in die Spalte mit dem Zahlen x_1 und y_1. Also

$$\begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\ y_3 & y_2 & y_1 & y_0 \\ & & c_1 & \\ & & & s_0 \end{array}$$

Genau das macht auch der HA in dem Schaltkreis. Nun addiert man die 3 Bits x_1, y_1 und c_1 und erhält eine Summe s_1 und einen Übertrag c_2. Genau das macht auch der erste VA. Wir erhalten:

$$\begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\ y_3 & y_2 & y_1 & y_0 \\ & c_2 & c_1 & \\ & & s_1 & s_0 \end{array}$$

Und so weiter.

Rechner war	spannend ☐	okay ☐	langweilig ☐
	schwierig ☐	okay ☐	einfach ☐