Universität
des
Saarlandes
FR Informatik

Kurt Mehlhorn und Antonios Antoniadis **WiSe 2019/20**

Übungen zu Ideen der Informatik

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter19/ideen/

Blatt 3 Abgabeschluss: 4. November 2019

Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

a) Der Wert einer Variablen ist unveränderlich. Wahr oder falsch? (2 Punkte)

b) Die Werte der Variablen x und y seien 7 und 11. Was ist der Wert des Ausdrucks $x + y$? (2 Punkte)

c) Wie bestimmt man den Wert eines Ausdrucks? (4 Punkte)

d) Seien die Werte der Variablen x und y wie in b). Was ist der Wert von x nach der Zuweisung $x \leftarrow x + y$? (2 Punkte)

Lösung:

a) Falsch

b) $7 + 11 = 18$.

c) Man ersetzt alle Vorkommen von Variablen durch ihre Werte und bestimmt dann den Wert des Ausdrucks.

d) Der Wert des Ausdrucks ist 18. Dieser Wert wird an x zugewiesen. Der Wert von x nach der Zuweisung ist 18.

Aufgabe 2 (*20 Punkte*) Betrachten Sie folgendes Programm:

$n \leftarrow$ input;
$s \leftarrow 0$;
$i \leftarrow 1$;
while $i \leq n$
  $s \leftarrow s + 4 * i$;
  $i \leftarrow i + 1$;
drucke s;

Fragen:

a) Führen sie das Programm für den Eingabewert $n = 3$ aus. (4 Punkte)

b) Geben sie den Endwert von s an für die Eingabewerte $1, 2, 3$ und 4. (4 Punkte)

c) Was ist der Endwert von i, wenn der Eingabewert für n gleich 4 ist? Hinweis: Die Antwort 4 ist falsch. (4 Punkte)

d) (4 Punkte) Fortsetzung von Frage a): Was ist der Endwert von s für einen allgemeinen Eingabewert n? Begründen sie die Antwort

$$4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + \ldots + 4 \cdot n = 4 \cdot (1 + 2 + \ldots + n).$$

e) (4 Punkte) Ändern sie das Programm so ab, dass es die Summe $1 + 2 + \ldots + n$ bildet. Ändern sie das Programm weiter ab, so dass es nur die Summe der ungeraden Zahlen kleiner gleich n bildet.

f) (optional, 0 Punkte) Beweisen sie die Summenformel $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$.

Lösung:

a)

$n \leftarrow 3$
$s \leftarrow 0$
$i \leftarrow 1$
"$i \leq n$" ist wahr, da $1 \leq 3$. Wir führen den Rumpf der Schleife aus.
$s \leftarrow s + 4 * i = 0 + 4 * 1 = 4$
$i \leftarrow i + 1 = 1 + 1 = 2$
"$i \leq n$" ist wahr, da $2 \leq 3$. Wir führen den Rumpf der Schleife aus.
$s \leftarrow s + 4 * i = 4 + 4 * 2 = 12$
$i \leftarrow i + 1 = 2 + 1 = 3$
"$i \leq n$" ist wahr, da $3 \leq 3$. Wir führen den Rumpf der Schleife aus.
$s \leftarrow s + 4 * i = 12 + 4 * 3 = 24$
$i \leftarrow i + 1 = 3 + 1 = 4$
"$i \leq n$" ist falsch, da $4 > 3$. Wir führen den Rumpf der Schleife nicht aus, sondern setzen die Ausführung nach der Schleife fort.
drucke s gibt 24 aus.

b) Die Lösungen sind 4, 12, 24, 40 für die Eingaben 1, 2, 3, 4. Für die Eingabe 4 wird die Schleife viermal durchlaufen Im ersten Schleifendurchlauf addieren wir 4 auf s, im zweiten 8, im dritten 12 und im vierten 16.

c) Die Antwort ist 5, denn beim letzen Schleifendurchlauf wird i nocheinmal erhöht.

d) Für einen Eingabewert n berechnen wir die Summe

$$4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + \ldots + 4 \cdot n = 4 \cdot (1 + 2 + \ldots + n).$$

Die Variable i durchläuft die Werte $1, 2, \ldots, n + 1$. In jedem Durchlauf summieren wir $4i$ zu s. Also hat s den Endwert $4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + \ldots + 4 \cdot n$. Beachte dabei, dass der Rumpf nicht mehr ausgeführt wird, wenn i den Wert $n + 1$ erreicht hat.

e) Wenn wir $s \leftarrow s + 4 * i$ durch $s \leftarrow s + i$ ersetzen, bilden wir die Summe $1 + \ldots + n$. Es gibt mehrere Möglichkeiten nur die ungeraden Zahlen zu addieren. Hier sind ein paar.

$s \leftarrow 0; i \leftarrow 1;$
while $i \leq n$
  if i is ungerade
    $s \leftarrow s + i;$
  $i \leftarrow i + 1;$

oder

$s \leftarrow 0; i \leftarrow 1;$
while $2 * i - 1 \leq n$
  $s \leftarrow s + 2 * i - 1;$
  $i \leftarrow i + 1;$

oder

$s \leftarrow 0; i \leftarrow 1;$
while $i \leq n$
  $s \leftarrow s + i;$
  $i \leftarrow i + 2;$

Die letzte Lösung ist am elegantesten.

f) Es gilt:

$$(1+2+\ldots+n)+(n+(n-1)+\ldots+1)=(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)=n(n+1).$$

Daraus folgt $1+\ldots+n = n(n+1)/2$. Angeblich hat Gauss diese Summenformel als Volksschüler gefunden.

Aufgabe 3 (*optional, 0 Punkte*) Schreiben Sie ein Programm im Stil von Aufgabe 2, das die Summe $3+9+18+30+\ldots+3n(n+1)/2$ bildet.

Lösung: Ich gebe wieder mehrere Lösungen an.
Bei der ersten Lösung benutzen wir, dass wir eine explizite Formel für die Glieder der Summe haben.

$s \leftarrow 0;$
$i \leftarrow 1;$
while $i \leq n$
  $s \leftarrow s + 3 * n * (n+1)/2;$
  $i \leftarrow i+1;$

Bei der zweiten Lösung benutzen wir die Summenformel nicht, sondern unser Programm, das Vielfache von 3 aufsummiert. Ich schreibe das Programm nochmals hin und nenne die Schranke in m um.

$s \leftarrow 0;$
$i \leftarrow 1;$
while $i \leq m$
  $s \leftarrow s + 3 * i;$
  $i \leftarrow i+1;$

summiert $3\cdot 1+3\cdot 2+\ldots 3\cdot m$. Wir müssen nun noch die Ergebnisse für $m=1,2,\ldots,n$ aufsummieren.

$n \leftarrow$ input;
$S \leftarrow 0;$
$m \leftarrow 1;$
while $m \leq n$
  nun kommt das Programm von oben
  $s \leftarrow 0;$
  $i \leftarrow 1;$
  while $i \leq m$
    $s \leftarrow s + 3 * i;$
    $i \leftarrow i+1;$

  wir summieren nun s zu S und erhöhen m um 1.
  $S \leftarrow S + s;$
  $m \leftarrow m+1;$

drucke S;

Es geht aber auch eleganter. Die innere Schleife brauchen wir nicht, denn die tut für $m+1$ erst das was sie auch für m tut und addiert dann noch einen letzten Wert drauf. Wir können das auch in einer Schleife machen. Erst addieren wir $3i$ zu s und dann s zu S. Damit erhalten wir.

$s \leftarrow 0;$
$S \leftarrow 0;$
$i \leftarrow 1;$
while $i \leq n$
  $s \leftarrow s + 3 * i;$
  $S \leftarrow S + s;$
  $i \leftarrow i+1;$

drucke S;

Algorithmen und Programme war	spannend ☐ okay ☐ langweilig ☐
	schwierig ☐ okay ☐ einfach ☐