Universität
des
Saarlandes
FR Informatik

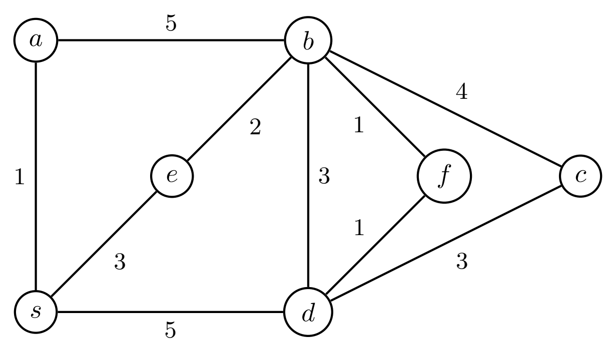
Kurt Mehlhorn und Antonios Antoniadis WiSe 2019/20

Übungen zu Ideen der Informatik

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter19/ideen/

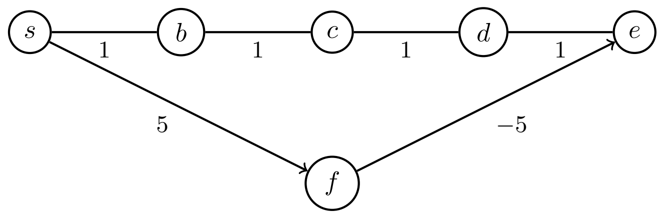
Blatt 6 Abgabeschluss: 25.11.2019

Aufgabe 1 (*10 Punkte*) Berechnen Sie mit Hilfe von Dijkstras Algorithmus die kürzesten Wege von s zu allen anderen Knoten in folgendem Graphen und geben Sie alle Schritte an:



Alle Kanten können in beide Richtungen durchlaufen werden.

Aufgabe 2 (*10 Punkte*) Wir nehmen nun an, dass es auch negative Kantenlängen (auch Kantengewichte genannt) geben darf. Die nächste Aufgabe gibt ein Beispiel für die Sinnhaftigkeit von negativen Kantenlängen. Ein Weg mit Kanten der Länge 5, -5, 1 hat Gesamtlänge $5 + (-5) + 1 = 1$. Im folgenden Beispiel kann man die Kanten in der oberen Reihe in beide Richtungen und die Kanten (s, f) und (f, e) nur in Pfeilrichtung benutzen.



a) Geben Sie die Entfernungen von s zu allen Knoten an.

b) Funktioniert Dijkstras Algorithmus für diesen Graphen? Die wesentliche Eigenschaft von Dijkstras Algorithmus ist, dass Entfernungen über jede Kante nur einmal progagiert werden.

c) Funktioniert der ursprüngliche Algorithmus noch?

Erinnern Sie sich: Der Logarithmus eines Produkts ist die Summe der Logarithmen der Faktoren. In Formeln, $\log a \cdot b = \log a + \log b$. Der Logarithmus von 1 ist 0. In Formeln, $\log 1 = 0$. Die Basis des Logarithmus spielt dabei keine Rolle.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*) Wir betrachten einen Graphen, dessen Knoten für die verschiedenen Währungen stehen. Für jede Währung gibt es einen Knoten. Von jeder Währung gibt es eine Kante zu jeder anderen Währung.
Für zwei Währungen a und b sei x_{ab} die Anzahl der Einheiten der Währung b, die man für eine Einheit der Währung a bekommt (alternativ: bezahlen muss). Im November 2018 hat man etwa für einen Euro 1,14 US \$ bekommen (alternativ: für einen Euro musste man 1,14 US \$ bezahlen) und für einen US \$ 113,57 Yen.

a) Wenn man einen Euro zuerst in Dollar und dann weiter in Yen umtauscht, vieviele Yen hat man dann?

b) Begründen Sie: Wenn man a in b umtauscht und dann b in c und dann c in d, dann bekommt man $x_{ab} \cdot x_{bc} \cdot x_{cd}$ Einheiten der Währung d für eine Einheit der Währung a.

c) Wir starten nun mit einer Währung a nach b, dann b nach c, $\ldots$, und schließlich wieder zurück nach a. Sei x das Produkt der Umtauschraten auf diesem Pfad. Was bedeutet es, wenn das Produkt kleiner, gleich, größer als 1 ist?

d) Wir möchten herausfinden, ob es einen Zyklus gibt, auf dem das Produkt größer als 1 ist. Dazu formulieren wir ein kürzestes Wegeproblem. Wir beschriften die Kante von a nach b mit $-\log x_{ab}$; dabei spielt die Basis des Logarithmus keine Rolle.

   Was wird aus einem Zyklus, auf dem das Produkt der x-Werte größer als 1 ist, mit der neuen Beschriftung?

e) Wir wollen herausfinden, ob es unter der neuen Beschriftung einen Kreis durch die Währung a (wir probieren dann alle Währungen durch) gibt, auf dem die Summe der Kantenbeschriftungen kleiner 0 ist. Dazu starten wir eine kürzeste Wegeberechnung mit dem Startknoten a. Was passiert, wenn es einen Kreis durch a gibt mit negativer Länge?

Im Bereich des High-Speed Trading werden solche Situationen ausgenutzt.

Aufgabe 4 (*0 Punkte*) (Diese Aufgabe ist eine Herausforderung). Nehmen Sie an, Sie befinden sich in einem Knoten eines Ihnen unbekannten Graphen. In irgendeinem anderen Knoten liegt ein Schatz, den Sie gern finden würden. Der Graph hat moderate Größe, so dass Sie ihn ein paar Mal (zum Beispiel fünf Mal) ganz ablaufen könnten, bevor Sie verdursten. Es ist aber zu kompliziert, als dass Sie den ganzen Aufbau im Kopf behalten könnten.
In Ihrer Tasche befindet sich eine ausreichend große Menge farbiger Kreide, mit der Sie auf Knoten und Kanten schreiben können.
Überlegen Sie sich ein Verfahren, mit dem Sie mit Sicherheit den Schatz finden, bevor sie verhungern. Erproben Sie Ihr Verfahren an dem Graphen von Aufgabe 1. Sie starten im Knoten s. Der Knoten f enthält den Schatz.

Kürzeste Wege war	spannend ☐ okay ☐ langweilig ☐
	schwierig ☐ okay ☐ einfach ☐