Universität
des
Saarlandes
FR Informatik

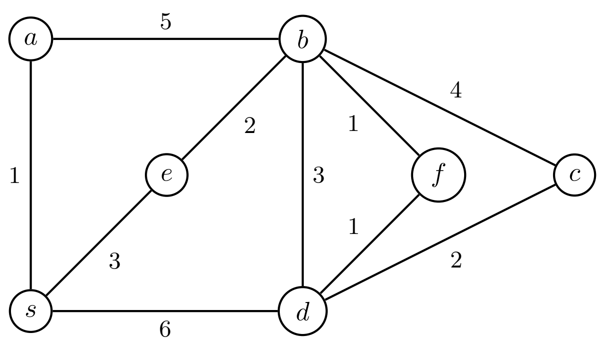
Kurt Mehlhorn und Antonios Antoniadis **WiSe 2019/20**

Übungen zu Ideen der Informatik

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter19/ideen/

Blatt 6 Abgabeschluss: 25.11.2019

Aufgabe 1 (*10 Punkte*) Berechnen Sie mit Hilfe von Dijkstras Algorithmus die kürzesten Wege von s zu allen anderen Knoten in folgendem Graphen und geben Sie alle Schritte an:



Alle Kanten können in beide Richtungen durchlaufen werden.

Lösung: Am Anfang werden alle Knoten rot gefärbt, dist[s] wir auf 0 gesetzt und dist[v] auf unendlich fuer alle anderen Knoten.

Knoten	s	a	b	c	d	e	f
Farbe	rot	rot	rot	rot	rot	rot	rot
Distanz	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞

s ist der rote Knoten mit dem kleinsten Distanzwert. Wir färben s schwarz und setzen die Distanzen der Knoten a, e und d auf 1, 3 und 6.

Knoten	s	a	b	c	d	e	f
Farbe	schwarz	rot	rot	rot	rot	rot	rot
Distanz	0	1	∞	∞	6	3	∞

a ist der rote Knoten mit dem kleinsten Distanzwert. Wir färben a schwarz und setzen die Distanz von b auf 6.

Knoten	s	a	b	c	d	e	f
Farbe	schwarz	schwarz	rot	rot	rot	rot	rot
Distanz	0	1	6	∞	6	3	∞

e ist der rote Knoten mit dem kleinsten Distanzwert. Wir färben e schwarz und verringern die Distanz von b auf 5.

Knoten	s	a	b	c	d	e	f
Farbe	schwarz	schwarz	rot	rot	rot	schwarz	rot
Distanz	0	1	5	∞	6	3	∞

b ist der rote Knoten mit dem kleinsten Distanzwert. Wir färben b schwarz und verringern die Distanz von c und f auf 9 und 6.

Knoten	s	a	b	c	d	e	f
Farbe	schwarz	schwarz	schwarz	rot	rot	schwarz	rot
Distanz	0	1	5	9	6	3	6

d ist der rote Knoten mit dem kleinsten Distanzwert. Wir färben d schwarz und verringern die Distanz von c auf 8.

Knoten	s	a	b	c	d	e	f
Farbe	schwarz	schwarz	schwarz	schwarz	rot	schwarz	rot
Distanz	0	1	5	8	6	3	6

f ist der rote Knoten mit dem kleinsten Distanzwert. Wir färben f schwarz.

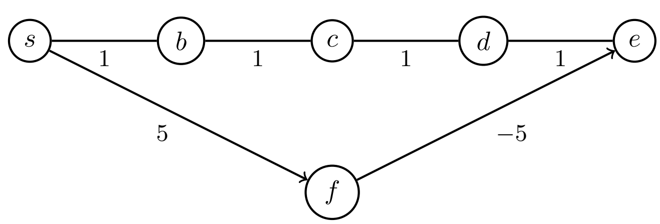
Knoten	s	a	b	c	d	e	f
Farbe	schwarz	schwarz	schwarz	schwarz	rot	schwarz	schwarz
Distanz	0	1	5	8	6	3	6

c ist der rote Knoten mit dem kleinsten Distanzwert. Wir färben c schwarz.

Knoten	s	a	b	c	d	e	f
Farbe	schwarz	schwarz	schwarz	schwarz	schwarz	schwarz	schwarz
Distanz	0	1	5	8	6	3	6

Wir sind fertig.

Aufgabe 2 (*10 Punkte*) Wir nehmen nun an, dass es auch negative Kantenlängen (auch Kantengewichte genannt) geben darf. Die nächste Aufgabe gibt ein Beispiel für die Sinnhaftigkeit von negativen Kantenlängen. Ein Weg mit Kanten der Länge 5, -5, 1 hat Gesamtlänge $5 + (-5) + 1 = 1$. Im folgenden Beispiel kann man die Kanten in der oberen Reihe in beide Richtungen und die Kanten (s, f) und (f, e) nur in Pfeilrichtung benutzen.



a) Geben Sie die Entfernungen von s zu allen Knoten an.

b) Funktioniert Dijkstras Algorithmus für diesen Graphen? Die wesentliche Eigenschaft von Dijkstras Algorithmus ist, dass Entfernungen über jede Kante nur einmal progagiert werden.

c) Funktioniert der ursprüngliche Algorithmus noch?

Lösung:

a) s und e haben Distanz 0, b und d haben Distanz 1, c hat Distanz 2, und f hat die Distanz 5. Zu c gibt es zwei kürzeste Wege: $s \to b \to c$ and $s \to f \to e \to d \to c$.

b) Der Algorithmus funktioniert nicht mehr. Wir färben die Knoten s, b, c, d, e schwarz in dieser Reihenfolge mit Distanzwerten 0, 1, 2, 3, 4. Dann färben wir f schwarz und veringern die Distanz von e auf 0. Nun sind alle Knoten schwarz und der Algorithmus endet.

c) Der ursprüngliche Algorithmus funktioniert noch. Er würde naemlich nicht aufhören, sondern bemerken, dass er die Distanz von d auf 1 verringern kann.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*) Sie haben ein Bußunternehmen. Wenn Sie eine Straße befahren, entstehen ihnen Kosten für Benzin, Abnutzung, und so weiter. Auf manchen Strecken können Sie Personen transportieren und dann haben sie auch Einnahmen. Ihr modellieren das Straßennetzwerk als Graph. Ihr Unternehmen ist in einem Knoten beheimatet. Wir möchten wissen ob es eine Rundtour gibt, bei der das Unternehmen Geld verdient, d.h., bei der die Einnahmen größer sind als die Kosten.
Wir nehmen der Einfachheit halber an. Für jede Kante haben wir zwei Zahlen: c_e sind die Kosten, die bei der Benutzung der Kante entstehen, und r_e sind die Einnahmen. Die Einnahmen hängen also nicht von der Anzahl der beförderten Personen ab.
Modellieren Sie die Aufgabe wie folgt: Sie beschriften jede Kante mit $w_e = c_e - r_e$. Dieser Wert kann positiv oder null oder negativ sein.

- Betrachten Sie jetzt eine Tour, die ihm Heimatknoten beginnt und wieder endet. Sei W die Summe der Kantenbeschriftungen auf dieser Tour. Was bedeutet es, dass W positiv (null, negativ) ist.
- Sei s der Heimatknoten. Rechnen Sie kürzeste Wege von s aus. Was passiert mit dist[s], falls es eine Rundtour mit negativem Wert gibt?

Lösung:

- Der Wert W ist die Summe der Kosten minus die Summe der Einnahmen auf der Tour. Dieser Wert ist positiv (null, negativ), wenn die Kosten größer (gleich, kleiner) sind als die Einnahmen.
- Falls es eine Rundtour mit negativem Wert gibt, wird $\mathrm{dist}[s]$ irgendwann auf einen negativen Wert gesetzt. Falls es keine Rundtour mit negativem Wert gibt, dann bleibt $\mathrm{dist}[s]$ bei Null.

Erinnern Sie sich: Der Logarithmus eines Produkts ist die Summe der Logarithmen der Faktoren. In Formeln, $\log a \cdot b = \log a + \log b$. Der Logarithmus von 1 ist 0. In Formeln, $\log 1 = 0$. Die Basis des Logarithmus spielt dabei keine Rolle.

Aufgabe 4 (*10 Punkte*) Wir betrachten einen Graphen, dessen Knoten für die verschiedenen Währungen stehen. Für jede Währung gibt es einen Knoten. Von jeder Währung gibt es eine Kante zu jeder anderen Währung.
Für zwei Währungen a und b sei x_{ab} die Anzahl der Einheiten der Währung b, die man für eine Einheit der Währung a bekommt (alternativ: bezahlen muss). Im November 2018 hat man etwa für einen Euro 1,14 US $ bekommen (alternativ: für einen Euro musste man 1,14 US $ bezahlen) und für einen US $ 113,57 Yen.

a) Wenn man einen Euro zuerst in Dollar und dann weiter in Yen umtauscht, vieviele Yen hat man dann?

b) Begründen Sie: Wenn man a in b umtauscht und dann b in c und dann c in d, dann bekommt man $x_{ab} \cdot x_{bc} \cdot x_{cd}$ Einheiten der Währung d für eine Einheit der Währung a.

c) Wir starten nun mit einer Währung a nach b, dann b nach c, …, und schließlich wieder zurück nach a. Sei x das Produkt der Umtauschraten auf diesem Pfad. Was bedeutet es, wenn das Produkt kleiner, gleich, größer als 1 ist?

d) Wir möchten herausfinden, ob es einen Zyklus gibt, auf dem das Produkt größer als 1 ist. Dazu formulieren wir ein kürzestes Wegeproblem. Wir beschriften die Kante von a nach b mit $-\log x_{ab}$; dabei spielt die Basis des Logarithmus keine Rolle.

   Was wird aus einem Zyklus, auf dem das Produkt der x-Werte größer als 1 ist, mit der neuen Beschriftung?

e) Wir wollen herausfinden, ob es unter der neuen Beschriftung einen Kreis durch die Währung a (wir probieren dann alle Währungen durch) gibt, auf dem die Summe der Kantenbeschriftungen kleiner 0 ist. Dazu starten wir eine kürzeste Wegeberechnung mit dem Startknoten a. Was passiert, wenn es einen Kreis durch a gibt mit negativer Länge?

Im Bereich des High-Speed Trading werden solche Situationen ausgenutzt.

Lösung:

a) Man hat $1,14 \cdot 113,57$ Yen.

b) Aus einer Einheit a werden x_{ab} Einheiten von b, daraus dann $x_{ab}x_{bc}$ Einheiten von c, daraus dann $x_{ab} \cdot x_{bc} \cdot x_{cd}$ Einheiten der Währung d.

c) Man hat am Schluß des Zyklus x Einheiten der Währung a. Wenn also x größer 1 ist, dann hat sich das Geld vermehrt, wenn x kleiner 1 ist, dann hat man Geld verloren, und wenn x gleich 1 ist, dann hat man genauso viel Geld wie vor dem zyklischen Tausch.

d) Betrachte einen Zyklus $a \to b \to c \to \ldots \to z \to a$. Dann ist $x = x_{ab}x_{bc} \ldots x_{za}$ und es gilt

$$x > 1 \text{ genau wenn } -\log x < 0 \text{ genau wenn } (-\log x_{ab}) + (-\log x_{bc}) + \ldots + (-\log x_{za}) < 0.$$

Unter der neuen Beschriftung wird also aus einem Zyklus mit Produkt größer als 1 ein Zyklus mit negativer Summe.

e) Wir rechnen kürzeste Wege mit dem Startknoten a. Wenn es einen Zyklus negativer Länge durch a gibt, wird dist[a] irgendwann auf einen negativen Wert gesetzt. Wenn es keinen solchen Zyklus gibt, dann bleibt dist[a] auf seinem Anfangswert 0.

Aufgabe 5 (*0 Punkte*) (Diese Aufgabe ist eine Herausforderung). Nehmen Sie an, Sie befinden sich in einem Knoten eines Ihnen unbekannten Graphen. In irgendeinem anderen Knoten liegt ein Schatz, den Sie gern finden würden. Der Graph hat moderate Größe, so dass Sie ihn ein paar Mal (zum Beispiel fünf Mal) ganz ablaufen könnten, bevor Sie verdursten. Es ist aber zu kompliziert, als dass Sie den ganzen Aufbau im Kopf behalten könnten.
In Ihrer Tasche befindet sich eine ausreichend große Menge farbiger Kreide, mit der Sie auf Knoten und Kanten schreiben können.
Überlegen Sie sich ein Verfahren, mit dem Sie mit Sicherheit den Schatz finden, bevor sie verhungern. Erproben Sie Ihr Verfahren an dem Graphen von Aufgabe 1. Sie starten im Knoten s. Der Knoten f enthält den Schatz.

Lösung:
Die Standardlösung: Das Verfahren durchläuft jede Kante höchstens zweimal, je einmal in jede Richtung. Am Anfang sind alle Knoten und Kanten des Graphen ungefärbt. Wenn wir einen Knoten zum ersten Mal betreten, färben wir ihn rot. Am Anfang ist der Startknoten rot und alle anderen Knoten ungefärbt. Auch sind alle Kanten ungefärbt.
Die allgemeine Situation ist nun so: wir sind in einem Knoten u. Wenn u nicht der Startknoten ist, dann ist genau eine der Kanten mit Endpunkt u gefärbt. Dies ist die Kante, über die wir u zum ersten Mal betreten haben.
Wir betrachten die Kanten mit Endpunkt u. Wenn es eine Kante (u, v) gibt, die zu einem Knoten v führt, den wir noch nie besucht haben, dann folgen wir einer solchen Kante. Wie merken uns, dass wir v über diese Kante betreten haben, färben v rot, und sind nun im Knoten v.
Wenn alle Kanten aus u heraus zu Knoten führen, die wir schon besucht haben, dann gehen wir über die Kante zurück, über die wir u zum ersten Mal erreicht haben. Wir werden den Knoten u in der Zukunft nie mehr betreten.
Das Verfahren endet, wenn wir den Schatz gefunden haben. Wenn es keinen Schatz gibt, möchten wir irgendwann vom Startknoten über die Kante zurückgehen, über die er zum ersten Mal erreicht wurde. Eine solche Kante gibt es nicht und wir halten an.
Warum erreichen wir alle Knoten? Betrachte einen Weg von Start zu Ziel und auf diesem Weg den ersten Knoten, der nicht besucht wird. Der Vorgänger auf dem Weg wird besucht. Wenn wir aus dem Vorgänger über die Kante zurückgehen, über die er erreicht wurde, gibt es noch einen unbesuchten Nachbarn. Wir verhalten uns also nicht nach den Regeln.
Man kann auch ohne das Färben von Kanten auskommen, wenn man zusätzlich einen Faden hat. Ein Ende befestigt man am Gürtel und das andere Ende am Startknoten.

Einer der Hörer hatte einen interessanten Vorschlag, den ich in dieser Form noch nie gehört habe. Man zählt für jeden Knoten des Graphen mit, wie oft man ihn schon besucht hat (Man schreibt die Zahl mit der Kreise auf den Boden). Am Anfang stehen alle Zähler auf Null (Wenn man einen Knoten zum ersten Mal besucht, steht noch keine Zahl am Boden. Das interpretiert man als, da steht die Zahl Null). Wenn man in einem Knoten ist, geht man zu einem Nachbarn mit dem niedrigsten Zählerstand. Falls es mehrere gibt, zu einem davon.

Warum funktioniert das? Nimm an, es gibt ein Ziel, aber wir würden das Ziel nie erreichen. Dann irren wir für immer in dem Labyrinth. Betrachte die Menge der Knoten, die wir unendlich oft besuchen. Davon gibt es mindestens einen. Es gibt aber auch einen Knoten, den wir nie besuchen, nämlich das Ziel. Also gibt es eine Kante, so dass wir einen Endpunkt unendlich oft besuchen, den anderen Endpunkt aber nur endlich oft. Dort treffen wir Entscheidungen, die nicht mit der Strategie übereinstimmen.

Formal argumentiert man wie folgt. Sei u ein Knoten, der unendlich oft besucht wird. Dann gibt es einen Weg von u zum Ziel, da es einen Weg von Start zu u und einen Weg vom Start zum Ziel gibt. Sei v der letzte Knoten auf diesem Weg, der unendlich oft besucht wird und sei w sein Nachfolger. Sei $m < \infty$ die Anzahl der Besuche von w. Nach jedem Besuch von v müssen wir v auf einer ausgehenden Kante verlassen. Keine dieser Kanten können wir öfter als $m + 1$ benutzen, da danach der andere Endpunkt mindestens $m + 1$ Mal besucht wurde. Also wird v höchstens $n(m + 1)$ Mal besucht. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass u unendlich oft besucht wird.

Kürzeste Wege war spannend ☐ okay ☐ langweilig ☐
schwierig ☐ okay ☐ einfach ☐