Universität des Saarlandes
FR Informatik

Kurt Mehlhorn und Antonios Antoniadis **WiSe 2019/20**

Übungen zu Ideen der Informatik

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter19/ideen/

Blatt 8 Abgabeschluss: 9.12.2019

Aufgabe 1 (*15 Punkte*) Editierdistanz: Wie schwer ist es ein Wort in ein anderes zu überführen. Wir dürfen dabei Buchstaben streichen, Buchstaben einfügen und einen Buchstaben durch einen anderen Buchstaben ersetzen. Jede Operation hat dabei kosten 1.
Man kann etwa MOTTE in LOTTE überführen, in dem man das M durch ein L ersetzt. Die Kosten sind 1. Man kann OTTO in TOTO mit Kosten zwei überführen: durch Ersetzen der ersten beiden Buchstaben oder durch Einfügen eines Ts am Anfang und durch Streichen eines der beiden Ts.

$$\begin{array}{cccc} \text{O} & \text{T} & \text{T} & \text{O} \\ \text{T} & \text{O} & \text{T} & \text{O} \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ccccc} & \text{O} & \text{T} & \text{T} & \text{O} \\ \text{T} & \text{O} & & \text{T} & \text{O} \end{array}$$

a) Sie haben sicher schon gelesen, dass die Genome von Menschen und Menschenaffen zu 99,4% übereinstimmen. Was könnte der Zusammenhang zwischen dieser Aussage und dieser Übung sein?

Seien unsere beiden Worte nun $x = x_1x_2\dots x_n$ und $y = y_1y_2\dots y_m$. Dabei steht jedes x_i und y_j für einen Buchstaben. Für das Wort MOTTE ist $n = 5$ und $x_1 = M$, $x_2 = O$, $x_3 = T$, $x_4 = T$ und $x_5 = E$. Mit $x_1\dots x_i$ bezeichnen wir den Präfix (das Anfangswort) von x der Länge i. In unserem Beispiel ist $x_1x_2x_3 = MOT$. Etwas ungewohnt sprechen wir auch vom leeren Präfix. Das ist der Präfix aus null Buchstaben.
Wir füllen nun eine rechteckige Tabelle T mit $n+1$ Zeilen und $m+1$ Spalten aus. An der Stelle $T[i,j]$ (Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte) wollen wir niedrigsten Kosten für die Überführung von $x_1\dots x_i$ in $y_1\dots y_j$ eintragen. Dabei läuft i von 0 bis n und j von 0 bis m. In $T[n,m]$ stehen dann die Kosten für die Überführung von x in y.
Ich erkläre jetzt, wie wir die nullte Zeile und Spalte einfüllen. Wir initialisieren $T[0,0] = 0$, $T[0,j] = j$ für $1 \le j \le m$ und $T[i,0] = i$ für $1 \le i \le n$. In $T[0,0]$ steht eine Null, da das gerade die Kosten der Überführung des leeren Präfixes von x (bestehend aus null Buchstaben) in den leeren Präfix von y sind. In $T[0,j]$ steht j weil das die Kosten der Überführung von $y_1\dots y_j$ in den leeren Präfix von x (der Präfix aus null Buchstaben) sind. Man muss alle j Buchstaben streichen um das leere Worte zu bekommen.
Für $i \ge 1$ und $j \ge 1$ berechnen wir

$$T[i,j] = \begin{cases} \min(1 + T[i-1,j], 1 + T[i,j-1], T[i-1,j-1]) & \text{if } x_i = y_j \\ \min(1 + T[i-1,j], 1 + T[i,j-1], 1 + T[i-1,j-1]) & \text{if } x_i \ne y_j \end{cases}$$

Für OTTO und TOTO erhalten wir folgende Tabelle mit 5 Spalten und Zeilen.

		O	T	T	O
	0	1	2	3	4
T	1	1	1	2	3
O	2	1	2	2	2
T	3	2	2	2	3
O	4	3	3	3	2

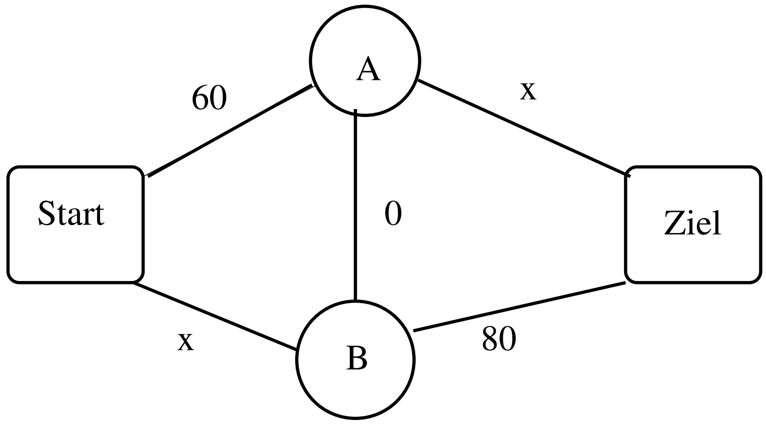
a) Verifizieren sie die obige Tabelle und geben sie für jedes Kästchen $T[i,j]$ mit $i \ge 1$ und $j \ge 1$ durch einen Pfeil an, durch welches andere Kästchen sein Wert bestimmt wurde. Wenn es mehrere Möglichkeiten gibt, zeichnen sie alle Möglichkeiten ein.

b) Stellen sie die Tabelle für LOTTA und MOTTE auf.

c) Wir kann man aus den Tabellen ablesen, wie man das eine Wort möglichst günstig in das andere Wort überführen kann.

d) Geben sie eine Begründung für die Definition von $T[i, j]$ an. Etwa so. Ich kann $x_1 \dots x_i$ in $y_1 \dots y_j$ überführen, indem ich $x_1 \dots x_{i-1}$ in $y_1 \dots y_j$ überführe und x_i streiche oder UND NUN FAHREN SIE FORT.

Aufgabe 2 (*15 Punkte*)



100 Autos wollen von Start nach Ziel fahren. Die Fahrzeiten sind wie angegeben. Auf der Straße von Start nach B und von A nach Ziel ist die Fahrzeit x Minuten, wenn sie von x Autos befahren wird. Nehmen Sie zuächst an, dass die Straße zwischen A und B NICHT existiert.

a) Was ist das globale Optimum (Globales Optimum = minimale Gesamtfahrzeit)? Wie viele Autos fahren oben rum und wieviele Fahren unten rum? Was sind die Fahrzeiten für die einzelnen Fahrer. Stellt sich dieses Optimum auch ein, wenn jeder einzelne Fahrer seine Fahrzeit optimiert?

b) Wir nehmen nun die Straße zwischen A und B hinzu. Was ist nun das globale Optimum? Welches Gleichgewicht stellt sich ein, wenn jeder Fahrer seine Fahrzeit optimiert? Wie sind die Fahrzeiten für die einzelnen Fahrer im sozialen Optimum.

Auktionen, Gleichgewichte, Nutzenmaximierende Agenten war spannend ☐ okay ☐ langweilig ☐
schwierig ☐ okay ☐ einfach ☐