Universität des Saarlandes
FR Informatik

Kurt Mehlhorn und Antonios Antoniadis **WiSe 2019/20**

Übungen zu Ideen der Informatik

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter19/ideen/

Blatt 11 Abgabeschluss: 16.12.2019

Aufgabe 1 (*10 Punkte*)
Geben sie Lösungsvorschläge für die folgenden Probleme an und zeigen sie, wie man überprüfen kann, ob sie tatsächlich eine Lösung sind. Einen Lösungsvorschlag, der die Püfung übersteht, nennt man Zertifikat.

a) Gibt es einen Weg[1] der Länge *höchstens* k zwischen zwei Knoten u und v in einem Graphen?

   Ich hätte gern folgende Antwort: Der Lösungsvorschlag ist eine Folge von Knoten. Man überprüft, dass die Folge mit u beginnt und mit v aufhört, dass je zwei aufeinanderfolgende Knoten durch eine Kante verbunden sind, und dass die Folge aus höchstens $k + 1$ Knoten besteht.

b) Gibt es einen einfachen Weg der Länge *mindestens* k zwischen zwei Knoten u und v in einem Graphen? Ein Weg heißt einfach, wenn kein Knoten darin zweimal vorkommt.

c) Gegeben einen Graphen G, kann man G auf ein Blatt Papier zeichnen, ohne dass sich Kanten kreuzen?

d) Gegeben ein Graph G und eine Zahl k, gibt es eine Teilmenge S der Knoten der Größe k, so dass alle Knoten in S paarweise durch eine Kante verbunden sind? Man nennt eine solche Teilmenge eine *Clique*.

e) Gegeben ein Graph G und eine Zahl k, gibt es eine Teilmenge S der Knoten der Größe k, so dass jeder Knoten, der nicht in S liegt, mit einem Knoten in S verbunden ist.

Lösung:

a) Der Lösungsvorschlag ist eine Folge $v_o, v_1, \ldots, v_\ell$ von Knoten mit $\ell \leq k$. Man überprüft

   (a) $v_0 = u$ und $v_\ell = v$.
   (b) (v_i, v_{i+1}) ist eine Kante in G für $0 \leq i < \ell$.
   (c) $v_i \neq v_j$ für $1 \leq i < j \leq \ell$.

   Alle drei Tests lassen sich effizient durchführen.

   Das Zertifikat lässt sich mit Dijktras Algorithmus effizient finden. Alle Kantenlängen sind 1.

b) Das Zertifikat ist wie in (a). Wir ersetzen die Vorgabe $\ell \leq k$ durch die Vorgabe $\ell \geq k$.

   Es ist kein Verfahren bekannt, wie man einen solchen Weg effizient finden kann. Betrachten sie den Fall $k = n$. Dann fragen wir, ob es einen Weg u nach v gibt, in dem *jeder* Knoten genau einmal besucht wird. Nehmen sie an, dass dieses Problem effizient lösbar ist. Dann könnten sie das Hamiltonsche Kreis Problem effizient lösen. Für jede Kante (u, v) des Graphen fragen sie nach einem Weg der Länge n von u nach v. Falls es einen solchen Weg gibt, dann ist der Weg zusammen mit der Kante ein Hamiltonscher Kreis. In der Vorlesung wurde aber festgehalten, dass das Hamiltonsche Kreisproblem NP-vollständig ist.

   Im Wesentlichen ist das effizienteste bekannte Verfahren eine Lösung zu finden, das Durchprobieren aller Kandidatenfolgen $v_0, \ldots, v_\ell$ von $\ell \geq k$ Knoten. Das sind $n^k + \ldots + n^n$ Möglichkeiten. Es ist kein Verfahren bekannt, dessen Aufwand nicht exponentiell ist.

[1] Ein Weg der Länge k ist eine Folge von Knoten $x_0, \ldots, x_k$, so dass sich keine zwei Knoten wiederholen und stets eine Kante zwischen aufeinanderfolgenden Knoten ist.

c) Das Zertifikat besteht aus einer solchen Zeichnung, d.h., man gibt für jeden Knoten seinen Ort in der Ebene an und für jede Kante ihren Verlauf als Kurve in der Ebene. Die Überprüfung besteht darin zu testen, dass sich je zwei der Kurven tatsächlich nicht schneiden.

   Den gerade beschriebenen Test kann man mit dem Auge leicht durchführen. Wie man ihn mit einen Computer macht, ist nicht so klar. Daür muss man sich überlegen, dass es Zeichnungen mit speziellen Eigenschaften gibt. Etwa: Der Graph wird auf kariertem Papier gezeichnet, jeder Knoten liegt auf einem Gitterpunkt, und das Gitter ist nicht sehr groß.

   Das ist in der Tat der Fall. Wenn man einen Graphen mit n Knoten planar zeichnen kann, dann gibt es auch eine Zeichnung der folgenden Form: man bildet die Knoten auf Gitterpunkte eines $2n \times 2n$ regulären Gitters ab und zeichnet die Kanten als Geradensegmente.

   Es sind Verfahren bekannt, wie man eine solche Zeichnung effizient finden kann.

d) Das Zertifikat ist eine Menge S von k Knoten. Man überprüft, ob es für jedes Paar u und v von Knoten in S die Kante (u, v) gibt.

   Diese Problem ist als Cliquenproblem bekannt. Es wurde in der Vorlesung als eines der NP-vollständigen Probleme genannt.

   Eine Möglichkeit zum Finden einer Lösung ist das Durchprobieren aller Mengen S von k Knoten. Bei einem Graphen mit n Knoten sind das $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten. Wegen $\binom{n}{k} \geq (n/(e \cdot k))^k$ wächst der Aufwand dieses Verfahrens exponentiell in k; hier ist e die Eulersche Zahl. Es ist kein Verfahren bekannt, dessen Aufwand nicht exponentiell in k wächst.

e) Das Zertifikat ist eine Menge S von k Knoten. Man überprüft, ob es jeder Knoten, der nicht in S liegt, einen Nachbarn in S hat.

   Eine Möglichkeit zum Finden einer Lösung ist das Durchprobieren aller Mengen S von k Knoten. Bei einem Graphen mit n Knoten sind das $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten. Wegen $\binom{n}{k} \geq (n/(e \cdot k))^k$ wächst der Aufwand dieses Verfahrens exponentiell in k; hier ist e die Eulersche Zahl. Es ist kein Verfahren bekannt, dessen Aufwand nicht exponentiell in k wächst.

Aufgabe 2 (*10 Punkte*) Wir lernen einen *Approximationsalgorithmus* kennen. Ein solcher Algorithmus findet eine Lösung mit garantierter Qualität; in unserem Fall liegen die Kosten der approximativen Lösung um höchstens 100% über den Kosten der optimalen Lösung.

Sie sind der Manager für zwei identische Arbeiter X und Y. Ihre Firma bekommt im Laufe des Tages nach und nach Aufträge, die sie an X und Y verteilen müssen. Natürlich wissen Sie nichts von den Aufträgen, bevor sie eingehen. Der Auftrag A_i geht zur Zeit t_i ein und braucht Zeit w_i um bearbeitet zu werden und muss sofort zugeteilt werden. Ein Auftrag, der einmal zugeteilt wurde, kann dem Arbeiter nicht mehr weggenommen werden. Es ist Feierabend, wenn der letzte Arbeiter seinen letzten Auftrag fertig gestellt hat.
Eine einfache Strategie zum Verteilen der Aufträge ist es, den Auftrag immer dem Arbeiter zu geben, der augenblicklich weniger unerledigte Arbeit hat, also als erster fertig würde, kämen keine neuen Aufträge mehr rein. Eine solche einfache Strategie nennt man auch *Heuristik*.

a) Wie ordnet die einfache Strategie die Aufträge mit Arbeitsaufwand $w_1 = 10, w_2 = 20, w_3 = 10, w_4 = 30, w_5 = 40, w_6 = 20$ und Eingangszeit $t_i = i$ den Arbeitern zu?

b) Geben Sie ein Beispiel an, in dem ein hellseherischer Manager, der Aufträge optimal zuteilen kann, die Aufträge mindestens 1.49 mal schneller abarbeiten lässt, als ihre einfache Strategie.

c) Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass der erste Auftrag zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ kommt und dass die Auftragslage so gut ist, dass bei der einfachen Strategie beide Arbeiter stets zu tun haben. Nur am Schluss muss einer der beiden Arbeiter warten, bis auch der andere fertig ist. Sei $w_{\max} = \max_i w_i$ die längste Bearbeitungszeit eines Auftrags und sei $W = \sum_i w_i$ die Gesamtlänge der Aufträge.

   (a) Argumentieren sie, dass bei der einfachen Strategie spätestens um $W/2 + w_{\max}$ Feierabend ist. Hinweis: betrachten sie den Zeitpunkt, zu dem einem der beiden Arbeiter die Arbeit ausgeht. Wie lange muss dann der andere höchstens noch arbeiten? Wann geht einem der beiden spätestens die Arbeit aus?

(b) Argumentieren sie, dass beim hellseherischer Manager frühestens um $\max(W/2, w_{\max})$ Feierabend ist.

(c) Das Verhältnis der beiden Aufwände ist also höchstens

$$(W/2 + w_{\max})/\max(W/2, w_{\max}).$$

Argumentieren Sie, dass dieses Verhältnis höchstens 2 ist.

Lösung:

a) Die Aufgabe w_1 wird entweder dem ersten oder zweiten Arbeiter zugeordnet, sagen wir dem ersten. Er ist nur bis zum Zeitpunkt 10 beschäftigt. Die Arbeit w_2 wird dem zweiten Arbeiter zugeordnet. Er ist nun einschließlich 21 beschäftigt. Die Arbeit w_3 wird dem ersten Arbeiter zugeordnet. Er ist nun einschließlich 20 beschäftigt. Die w_4 wird auch dem ersten zugeordnet. Er ist nur einschließlich 50 beschäftigt. Zum Zeitpunkt 5 kommen zwei Aufträge an. Wir weisen zunächst $w_5 = 40$ an den zweiten Arbeiter zu; er ist nur einschließlich 61 beschäftigt und dann $w_5 = 20$ an den ersten zu; er ist nun einschließlich 70 beschäftigt.

b) Zum Zeitpunkt 0 kommen zwei Aufträge von je 1 Tag Länge an. Zum Zeitpunkt 1 Sekunde kommt ein Auftrag der Länge 2 Tage an.

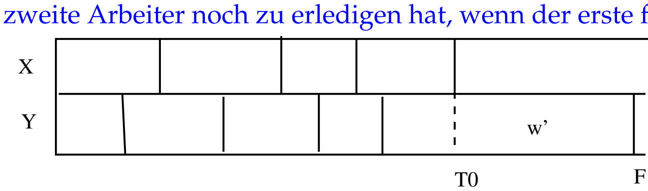
Der Algorithmus weist zunächst jedem Arbeiter einen Auftrag der Länge 1 Tag zu und dann einem der beiden den Auftrag von 2 Tagen. Also ist nach 3 Tagen Feierabend.

Der hellseherische Manager, weist beide Aufträge der Länge 1 Tag dem gleichen Arbeiter zu und dann den letzten Auftrag an den anderen Arbeiter. Feiertag ist nach 2 Tagen und 1 Sekunde.

c)
- Spätestens zum Zeitpunkt $W/2$ geht einem der beiden die Arbeit aus, da nach Annahme beide Arbeiter bis dahin beschäftigt sind. Dem anderen Arbeiter kann nach diesem Zeitpunkt keine Arbeit mehr zugeordnet werden. Also ist der andere spätestens um $W/2 + w_{\max}$ fertig.
- Einer der beiden Arbeiter muss die Aufgabe der Länge $w_{\max}$ erledigen. Also ist frühestens um $w_{\max}$ Feierabend. Einer der beiden Arbeiten muss mindestens $W/2$ Arbeit erledigen. Also ist frühestens um $W/2$ Feierabend.
- Der Verhältnis der Fertigstellung beim einfachen Alg und beim hellseherischen Manager ist also höchstens

$$\frac{W/2 + w_{\max}}{\max(W/2, w_{\max})} = \begin{cases} \frac{W/2+w_{\max}}{w_{\max}} & \text{für } W \leq 2w_{\max} \\ \frac{W/2+w_{\max}}{W/2} & \text{für } W \geq 2w_{\max} \end{cases}.$$

  Das Maximum wird für $W = 2w_{\max}$ angenommen (die Funktion im ersten Fall ist steigend in W, die Funktion im zweiten Fall ist fallend in W. Also ist der Bruch immer ≤ 2. Unter b) haben wir gesehen, dass er beliebig nahe an $3/2$ dran sein kann.
- Eine von ihnen hat noch sorgfältiger argumentiert. Sei T_o der Zeitpunkt, an dem der erste Arbeiter fertig wird und F der Zeitpunkt zu dem der zweite fertig wird. Sei ferner $w' = F - T_0$ die Menge Arbeit, die der zweite Arbeiter noch zu erledigen hat, wenn der erste fertig ist.



  Dann gilt
  - $w' \leq w_{\max}$, da dem zweiten Arbeiter nach dem Zeitpunkt T_0 keine Arbeit mehr zugewiesen wird. Ein solcher Auftrag würde ja dem ersten Arbeiter zugewiesen.
  - $T_0 = (W - w')/2$, da bis zum Zeitpunkt T_0 beide voll beschäftigt sind und bis dahin Arbeit $W - w'$ erledigt wird.

Also gilt $F = T_0 + w' = (W - w')/2 + w' = W/2 + w'/2 \leq W/2 + w_{\max}/2$. Der Verhältnis der Fertigstellung beim einfachen Alg und beim hellseherischen Manager ist also höchstens

$$\frac{(W + w_{\max})/2}{\max(W/2, w_{\max})} = \begin{cases} \frac{W+w_{\max}}{2w_{\max}} & \text{für } W \leq 2w_{\max} \\ \frac{W+w_{\max}}{W} & \text{für } W \geq 2w_{\max} \end{cases}.$$

Das Maximum wird für $W = 2w_{\max}$ angenommen (die Funktion im ersten Fall ist steigend in W, die Funktion im zweiten Fall ist fallend in W. Also ist der Bruch immer $\leq 3/2$. Unter b) haben wir gesehen, dass er beliebig nahe an $3/2$ dran sein kann.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)
Sie möchten alle ihre Freunde zu einer Party einladen. Da ihr Freundeskreis recht groß ist, verstehen sich nicht alle ihrer Freunde untereinander. Sie organisieren daher mehrere Partys. Um die Partys angenehm zu gestalten, wollen Sie nie zwei Personen zur gleichen Party einladen, die sich nicht mögen. Sie möchten rausfinden, ob es eine Lösung mit k Partys gibt.
Wir nehmen an, dass Sie wissen, welche Ihrer Freunde sich gegenseitig nicht mögen, und das „mögen“ eine symmetrische Relation ist: A mag B genau dann wenn B auch A mag.

a) Formulieren Sie das Party-Problem als ein Problem auf Graphen und skizzieren Sie einen kleinen Beispielgraphen an, der Ihre Übersetzung erläutert.

b) Argumentieren Sie, dass dieses Problem in NP ist.

c) Nehmen Sie an, Sie können Graphen effizient mit der minimalen Zahl von Farben färben. Färben bedeutet, dass benachbarte Knoten verschiedene Farbe haben. Geben Sie ein Verfahren an, das das Party-Problem effizient löst.

Lösung:

a) Wir haben für jede Person im Freundeskreis einen Knoten und verbinden zwei Knoten, wenn sich die Freunde *nicht* leiden können. Eine Menge S der Knoten ist eine mögliche Party, wenn keine zwei Knoten in S mit einer Kante verbunden sind (unabhängige Knotenmenge). Es geht mit k Partys, wenn es eine Partition der Knoten in k Mengen gibt, von denen jede unabhängig ist.

b) Ein Lösungskandidat sind Mengen S_1 bis S_k von Knoten. Wir überprüfen, dass jeder Knoten in mindestens einer der Mengen ist und dass für jede Menge es keine Kanten zwischen den Knoten der Menge gibt.

c) Bei einer Färbung sind die Knoten der gleichen Farbe unabhängig. Eine Färbung mit einer minimalen Anzahl von Farben entspricht daher der kleinsten Anzahl von Partys.

Komplexität war	spannend ☐ okay ☐ langweilig ☐
	schwierig ☐ okay ☐ einfach ☐