Universität
des
Saarlandes
FR Informatik

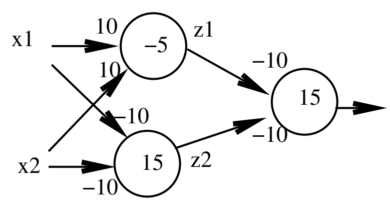
Kurt Mehlhorn und Corinna Coupette **WiSe 2020/21**

Übungen zu Ideen der Informatik

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter20/ideen/

Blatt 12 Abgabeschluss: 1. 2. 2021

Aufgabe 1 (*8 Punkte*) Vervollständigen Sie die Tabelle. Geben Sie an, welche logische Funktion das abgebildete Netzwerk berechnet.



x_1	x_2	$z_1 =$	$z_1 \approx$	$z_2 =$	$z_2 \approx$	$o =$	$o \approx$
0	0	$g(-5)$	0				
0	1						
1	0						
1	1						

Lösung:

x_1	x_2	$z_1 =$	$z_1 \approx$	$z_2 =$	$z_2 \approx$	$o =$	$o \approx$
0	0	$g(-5)$	0	$g(15)$	1	$g(5)$	1
0	1	$g(5)$	1	$g(5)$	1	$g(-5)$	0
1	0	$g(5)$	1	$g(5)$	1	$g(-5)$	0
1	1	$g(15)$	1	$g(-5)$	0	$g(5)$	1

Das Netz berechnet die Funktion $x_1 \equiv x_2$. (Die Antworten $x_1 = x_2$ oder x_1 gleich x_2 sind auch OK.)

Aufgabe 2 (*15 Punkte*) Wir haben zwei Gruppen A und B von je 10.000 Personen. Bei der Gruppe A trifft das Merkmal Y in 50% der Fälle zu, bei der Gruppe B nur in 10% der Fälle. Wir haben eine Vorhersagemethode, die für beide Populationen die folgenden Fehlerraten hat: falsch-positiv-Rate = 10%, falsch-negativ-Rate = 0%.

a) Ersetzen Sie in den folgenden Tabellen die Platzhalter TN, FP, FN, TP, #(H = 0) und #(H = 1) durch die entsprechenden Zahlen.

		Vorhersage		
		H = 0	H = 1	
Wahrheit	Y = 0	TN	FP	5000
	Y = 1	FN	TP	5000
		#(H = 0)	#(H = 1)	10000

Population A

		Vorhersage		
		H = 0	H = 1	
Wahrheit	Y = 0	TN	FP	9000
	Y = 1	FN	TP	1000
		#(H = 0)	#(H = 1)	10000

Population B

Lösung:

		Vorhersage		
		H = 0	H = 1	
Wahrheit	Y = 0	4500	500	5000
	Y = 1	0	5000	5000
		4500	5500	10000

Population A

		Vorhersage		
		H = 0	H = 1	
Wahrheit	Y = 0	8100	900	9000
	Y = 1	0	1000	1000
		8100	1900	10000

Population B

Erinnern Sie sich: $\mathrm{FPR} = \frac{\mathrm{FP}}{\#(Y=0)}$ und daher $\mathrm{FP} = \mathrm{FPR} \cdot \#(Y = 0)$. Für die erste Tabelle ergibt sich $\mathrm{FP} = 10\% \cdot 5000 = 500$, für die zweite Tabelle $\mathrm{FP} = 10\% \cdot 9000 = 900$.

Analog $\mathrm{FNR} = \frac{\mathrm{FN}}{\#(Y=1)}$ und daher $\mathrm{FN} = \mathrm{FNR} \cdot \#(Y = 1)$. Da $\mathrm{FNR} = 0\%$, erhält man in beiden Fällen den Wert 0.

b) Was ist die positive Vorhersagequalität der Methode bei beiden Populationen?

$$\text{positive Vorhersagequalität} \frac{TP}{\#(H = 1)}.$$

Lösung: Bei Population A ist die positive Vorhersagequalität gleich $5000/5500 = 10/11 \approx 0.91$. Bei Population B is die positive Vorhersagequalität gleich $1000/1900 = 10/19 \approx 0.526$.

c) Die folgenden Aussagen widersprechen sich. Argumentieren sie trotzdem, dass es gute Gründe für beide Aussagen gibt.

- Das Verfahren hat eine vorherragende Qualität und diskriminiert keine der Populationen.
- Das Verfahren hat eine miserable Qualität und diskriminiert die Population B.

Lösung:

- Die Qualität des Verfahrens ist hoch, weil die Fehlerraten gering sind. Es diskriminiert nicht, weil die Fehlerraten für beide Populationen die gleiche sind.
- Die Qualität des Verfahrens ist miserabel, weil die positive Vorhersagequalität bei der Population B nur wenig besser ist als Raten. Es diskriminiert, weil die positive Vorhersagequalität bei der Population A gut ist, aber bei B miserabel.

d) Nehmen Sie nun an, dass wir eine wesentlich bessere Vorhersagemethode haben mit den Fehlerraten: falsch-positiv-Rate = 1%, falsch-negativ-Rate = 0%. Welche Einträge ändern sich? Was ist nun die positive Vorhersagequalität? Welche der Aussagen aus der Teilaufgabe c) würden Sie aufgeben?

Lösung:

		Vorhersage		
		H = 0	H = 1	
Wahrheit	Y = 0	4950	50	5000
	Y = 1	0	5000	5000
		4950	5050	10000

Population A

		Vorhersage		
		H = 0	H = 1	
Wahrheit	Y = 0	8910	90	9000
	Y = 1	0	1000	1000
		8910	1090	10000

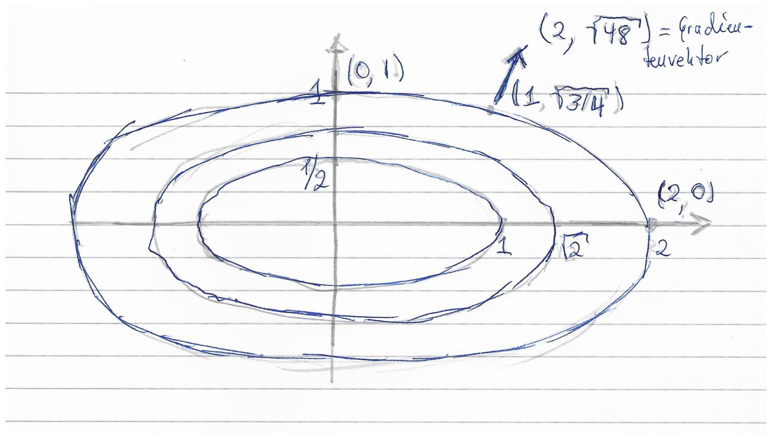
Population B

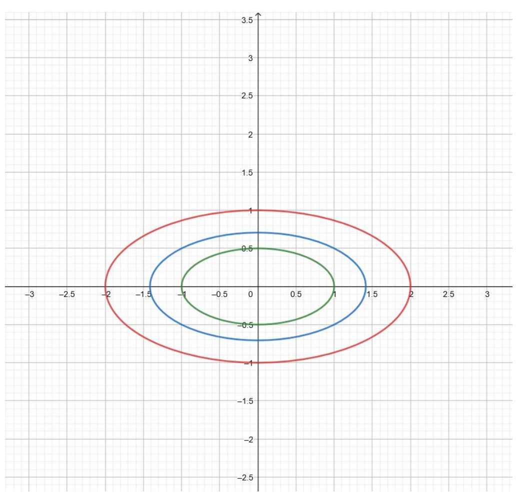
Die positive Vorhersagequalität ist nun $5000/5050 = 100/101 \approx 0.99$ bei der Population A und $1000/1090 = 100/109 \approx 0.9$ bei der Population B. Ich würde die zweite Aussage zurückziehen und die erste Aussage verschärfen. Die Qualität des Verfahrens ist hoch, weil die Fehlerraten gering und die Vorhersagequalität im positiven und im negativen Fall für beide Populationen sehr gut sind. Es diskriminiert nicht, weil die Fehlerraten für beide Populationen gleich sind. Auch die Vorhersagequalität ist ähnlich.

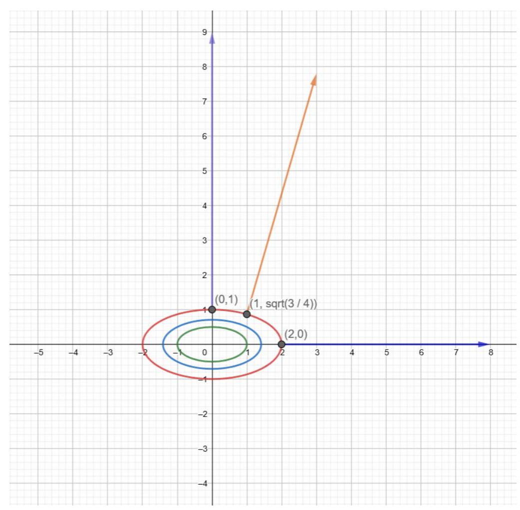
Aufgabe 3 (*7 Punkte*) Betrachten Sie die Funktion $z = z(x, y) = x^2 + 4y^2$.

a) Zeichnen Sie die Höhenlinien $z = 1$, $z = 2$ und $z = 4$ in ein Koordinatensystem ein. Auf welcher Höhenlinie liegen die Punkte $(x, y) = (2, 0)$, $(x, y) = (0, 1)$, und $(x, y) = (1, \sqrt{3/4})$?

Lösung:







b) Die Ableitungen von z nach x und y sind $\partial z/\partial x = 2x$ and $\partial z/\partial y = 8y$. Der Gradient ∇z von z ist der Vektor bestehend aus den beiden Ableitungen. Daher $\nabla z = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}$. Zeichnen Sie die Gradienten an den drei Punkten des ersten Unterpunktes. Was ist der geometrische Zusammenhang zwischen Höhenlinien und Gradient? (Antwort: der Gradient steht   auf der Höhenlinie).

Lösung: Die Höhenlinie $z = c$ ist eine Ellipse mit dem Halbachsen $\sqrt{c}$ und $\sqrt{c}/2$. Der Gradient steht senkrecht auf der Höhenlinie.

c) Gradientenabstieg: Wir beginnen mit einem Punkt (x_0, y_0) und definieren dann eine Folge (x_i, y_i), $i \geq 1$, durch $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i, y_i) - h\nabla z(x_i, y_i) = (x_i - 2hx_i, y_i - 8hy_i)$. Dabei ist h die Schrittweite.

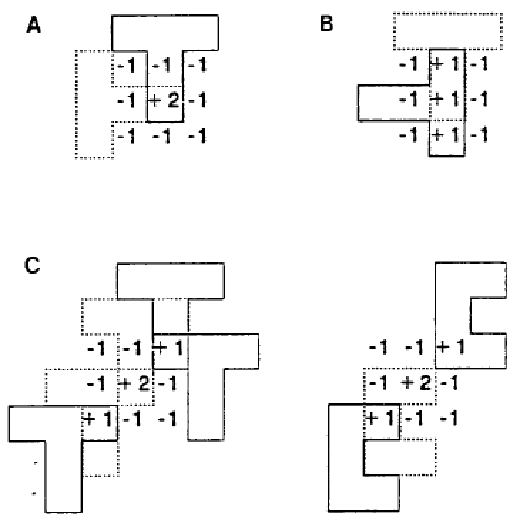
Starten sie mit $(x_0, y_0) = (2, 3)$ und bestimmen sie die ersten vier Schritte bei Verwendung der Schrittweite $h = 1/8$. Das Minimum ist der Punkt $(0, 0)$. Wie nahe kommen sie ihm in 10 Schritten?

Lösung: We have $x_{i+1} = (1 - 2h)x_i = 3/4x_i$. Also $x_0 = 2$, $x_1 = 3/2$, $x_2 = 9/8$, $x_3 = 27/32$. Allgemein $x_i = 2 \cdot (3/4)^i$. Also $x_{10} = 2 \cdot (3/4)^{10}$. Für y erhalten wir: $y_1 = (1-8h)y_0 = 0$ und dann $y_3 = y_2 = y_1 = 0$.

d) Was passiert, wenn sie die Schrittweite $h = 1$ wählen?

Lösung: $x_{i+1} = (1 - 2h)x_i = -x_i$ und $y_{i+1} = (1 - 8h)y_i = -7y_i$. Also alterniert der x-Wert zwischen $+2$ und -2. Der y-Wert explodiert.

Aufgabe 4 (*Zum Knobeln: Zehn Extrapunkte Punkte*) In der Vorlesung haben wir das Netz gesehen, das C und T unterscheiden kann. Ich habe in der Vorlesung erklärt, wie die Filter A und D funktionieren. Erklären Sie, wie die Filter B und C funktionieren.



a) Welche Werte können die Filter B und C liefern bei Eingabe C bzw. T.

b) Was muss das Ausgabeneuron leisten?

Lösung:

Filter B: Beim T liefert mindestens ein Neuron der Eingabeschicht einen Wert ≥ 2. Bei Eingabe C ist der Wert immer ≤ 1.

Wenn das T normal oder auf dem Kopf steht, die mittlere Spalte mit 2 Kästchen überlappt, und der Balken außerhalb des Filters liegt, bekommt man den Wert 2. Wenn das T liegt und der Balken des T mit der mittleren Spalte übereinstimmt, bekommt man den Wert 2.

Wenn das C die mittlere Spalte nicht oder nur in einem Quadrat überlappt, dann ist der Gesamtwert sicher ≤ 1. Wenn das C die mittlere Spalte in genau 2 Quadraten überlappt, dann muss es auch eines der Felder mit Wert -1 überlappen. Also ist der Gesammtwert ≤ 1. Wenn das C die mittlere Spalte in 3 Quadraten überlappt, dann steht es aufrecht und überlappt auch zwei Felder mit Wert -1. Also ist der Gesamtwert ≤ 1.

Das Ausgabeneuron sagt T, wenn mindestens ein Neuron der ersten Schicht den Wert 2 liefert.

Filter C: Beim C liefert mindestens ein Filter den Wert -3. Beim T sind die Werte immer ≥ -2.

Wenn das C normal steht und mit dem linken Rand des Filters aligniert ist, dann ist der Wert -3. Analog für die drei anderen Lagen des C.

Nehmen wir an, das T steht normal. Wenn es drei Kästchen -1 überlappt, dann muss es muss sowohl der Stamm als auch der Balken des T den Filter überlappen. Also liegt der Stamm entweder in der linken Spalte des Filters (dann Gesamtwert -2) oder in der mittleren Spalte (dann Gesamtwert 0) oder in der rechten Spalte (Gesamtwert -2). Analog argumentiert bei den anderen Lagen des T.

Das Ausgabeneuron muss also nur entscheiden, ob es ein Eingabeneuron gibt mit Wert -3 gibt.

Ich habe für die Videos, die Nachbereitung und das Übungsblatt etwa ☐ Stunden gebraucht.

(Angelina fertigt aus diesen Zahlen eine Statistik an. Kurt und Corinna sehen nur diese Statistik. Wir möchten wissen, ob der Schwierigkeitsgrad in etwa richtig ist.)

Maschinelles Lernen war spannend ☐ okay ☐ langweilig ☐
schwierig ☐ okay ☐ einfach ☐