

Übungen zu Ideen der Informatik

<https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter20/ideen/>

Blatt 2

Abgabeschluss: 16.11.2020

In dieser Übung lernen wir das Innenleben eines Volladdierers kennen. Wir werden sehen, wie man einen Volladdierer aus drei einfachen Gattern aufbauen kann, Und-Gattern, Oder-Gattern, und Nicht-Gattern.

Ein Schaltnetz besteht aus Gattern. Wir arbeiten mit drei Arten von Gattern, Und-Gatter, Oder-Gatter, und Nicht-Gatter. Und-Gatter (\wedge) und Oder-Gatter (\vee) haben je zwei Eingänge und einen Ausgang, Nicht-Gatter (\neg) haben einen Eingang und einen Ausgang. Die Gatter operieren auf den booleschen Werten (auch Bits genannt) 0 und 1 gemäß folgenden Regeln.

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\neg x$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

Der Ausgang eines Und-Gatters ist also genau dann 1, wenn beide Eingänge 1 sind, und der Ausgang eines Oder-Gatters ist 1, wenn mindestens ein Eingang 1 ist. Das Nicht-Gatter dreht den Eingang um.

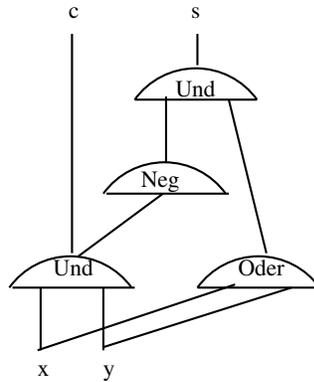
Aufgabe 1 (4 Punkte) Mit Hilfer der Gatter können wir kompliziertere Funktionen bilden, z. B. $x \oplus y = (x \vee y) \wedge (\neg(x \wedge y))$. Hier ist die Funktionstafel, schrittweise aufgebaut.

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\neg(x \wedge y)$	$(x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y)$
0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Die ersten beiden Spalten enthalten die vier möglichen Kombinationen für x und y . Die dritte und vierte Spalten sind dann die Werte von $x \wedge y$ und $x \vee y$. Die fünfte Spalte ist die Negation der dritten Spalte und die letzte Spalte ist das Und der vierten und fünften Spalte.

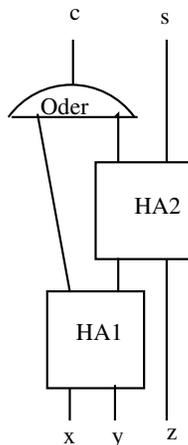
Gibt es für die Funktion $x \oplus y$ einen gebräuchlichen Namen?

Aufgabe 2 (9 Punkte) Betrachte den folgenden Schaltkreis mit zwei Eingängen x und y und zwei Ausgängen c und s . Dabei steht s für Summe (sum) und c für Übertrag (carry). Die Information fließt von unten nach oben.



- a) Geben Sie Ausdrücke für c und s an. Für c lautet die Antwort $c = x \wedge y$. Um den Ausdruck für s zu erhalten, schreiben Sie am besten von unten nach oben an jedes Gatter den Ausdruck der berechneten Funktion.
- b) Geben Sie die Funktionstabellen für c und s an.
- c) Verifizieren Sie, dass der Schaltkreis die Binärdarstellung der Summe der beiden Eingänge berechnet, d.h. wenn x und y null sind, dann $(c, s) = (0, 0)$, wenn genau ein Eingang eins ist, dann $(c, s) = (0, 1)$, und wenn beide Eingänge eins sind, dann $(c, s) = (1, 0)$. In Formeln, $x + y = 2c + s$. Dabei werden Bits als Zahlen interpretiert, d.h., das Bit 0 wird als die Zahl 0 interpretiert und das Bit 1 wird als die Zahl 1 interpretiert.
- Hinweis: Für $x = y = 1$, erhält man $c = 1 \wedge 1 = 1$ und $s = 1 \oplus 1 = 0$, also $x + y = 1 + 1 = 2 \cdot 1 + 0 = 2c + s$. Argumentieren Sie analog für die Fälle $x = y = 0$, $x = 0, y = 1$ und $x = 1, y = 0$.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Wir bezeichnen nun den Schaltkreis aus der zweiten Aufgabe durch HA. Das steht für Halbaddierer. HA hat zwei Eingänge und zwei Ausgänge. Betrachte folgenden Schaltkreis mit drei Eingängen x, y und z . Die Ausgänge heißen wieder c und s . Beachten Sie dass das Summenbit des unteren Halbaddierers eine Eingabe für den oberen Halbaddierer ist.



Zeigen Sie, dass der Schaltkreis die Binärdarstellung der Summe $x + y + z$ berechnet, d.h., wenn die Summe 0 ist, dann $(c, s) = (0, 0)$, wenn die Summe 1 ist, dann $(c, s) = (0, 1)$, wenn die Summe 2 ist, dann $(c, s) = (1, 0)$ und wenn die Summe 3 ist, dann $(c, s) = (1, 1)$. In Formeln,

$$x + y + z = 2c + s,$$

Dieser Schaltkreis läuft unter dem Namen Volladdierer.

Hinweis: Argumentieren Sie nach folgendem Schema. Nehmen wir an, dass genau zwei Eingaben gleich 1 ist. Falls $x = y = 1$ und $z = 0$, dann ist die Ausgabe den unteren Halbaddierers HA1 gleich $(c_1, s_1) = (1, 0)$. Die Eingaben von HA2 sind daher $(0, 0)$ und seine Ausgaben $(c_2, s_2) = (0, 0)$. Daher $c = c_1 \vee c_2 = 1 \vee 0 = 1$ und $s = s_2 = 0$. Falls $z = 1$ und $x + y = 1$, dann $(c_1, s_1) = (0, 1)$, die Eingaben von HA2 sind daher $(1, 1)$ und seine Ausgabe $(c_2, s_2) = (1, 0)$. Daher $c = c_1 \vee c_2 = 0 \vee 1 = 1$ und $s = s_2 = 0$.

Nun sind Sie dran, die anderen Fälle zu diskutieren.

Aufgabe 4 (5 Punkte) Betrachte folgendes Programm. Wir nehmen an, dass ich Register R0 eine natürliche Zahl n steht, d.h., eine der Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots$. Im Programm steht der Stern in Zeile 2 für Multiplikation.

```

1 R1 ← 0
2 if R1 * R1 > R0, BZ ← 5
3 R1 ← R1 + 1
4 BZ ← 2
5 drucke R1 - 1
6 STOP

```

- Was druckt das Programm, wenn in R0 steht: 0, 1, 4, 7, 9?
- (optional) Was gibt das Programm aus, wenn in R0 die Zahl n steht?

Aufgabe 5 (7 Punkte) In der Vorlesung sahen wir eine Turingmaschine, die zählt. Dabei war die Annahme, dass das Band mit

... 0000000BBBBBBB...

initialisiert ist und der Kopf der Maschine am Anfang auf der rechtesten Null steht. Modifizieren Sie die Turingmaschine so, dass sie für den Anfangsbandinhalt

...BBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBB...

funktioniert.

Zur Erinnerung: in der Vorlesung nahmen wir an, dass das Band am Anfang mit00000BBBBBB..... beschriftet ist, der Kopf auf der rechtesten Null steht und die Maschine im Zustand q_1 ist. Das Programm war

```

q1 0 q2 1 S
q1 1 q1 0 L
q2 0 q2 0 R
q2 1 q2 1 R
q2 B q1 B L

```

Aufgabe 6 (0 Punkte) Falls Sie ein Google-Konto haben, sehen Sie sich Ihr Google-Profil (Zusammenfassung der im Google-Konto gespeicherten Daten) an.

- Öffnen Sie Ihr Google-Konto.
- Klicken Sie im linken Navigationsbereich auf Daten & Personalisierung.
- Scrollen Sie bis zum Bereich "Dinge, die Sie erstellen, und Ihre Aktivitäten".
- Klicken Sie auf Google Dashboard aufrufen.

e) Die von Ihnen verwendeten Google-Dienste sowie eine Zusammenfassung Ihrer Daten werden angezeigt.

Ich habe für die Videos, die Nachbereitung und das Übungsblatt etwa Stunden gebraucht. Angelina fertigt aus diesen Zahlen eine Statistik an. Kurt und Corinna sehen nur diese Statistik. Wir möchten wissen, ob der Schwierigkeitsgrad in etwa richtig ist. Wir halten einen Gesamtaufwand von 3 - 4 Stunden für angemessen.

Rechner war spannend okay langweilig
 schwierig okay einfach