Universität des Saarlandes

FR Informatik

Kurt Mehlhorn und Corinna Coupette

WiSe 2020/21

Übungen zu Ideen der Informatik

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter20/ideen/

Blatt 2 Abgabeschluss: 16.11.2020

In dieser Übung lernen wir das Innenleben eines Volladdierers kennen. Wir werden sehen, wie man einen Volladierer aus drei einfachen Gattern aufbauen kann, Und-Gattern, Oder-Gattern, und Nicht-Gattern.

Ein Schaltnetz besteht aus Gattern. Wir arbeiten mit drei Arten von Gattern, Und-Gatter, Oder-Gatter, und Nicht-Gatter. Und-Gatter ($\wedge$) und Oder-Gatter ($\vee$) haben je zwei Eingänge und einen Ausgang, Nicht-Gatter ($\neg$) haben einen Eingang und einen Ausgang. Die Gatter operieren auf den booleschen Werten (auch Bits genannt) 0 und 1 gemäß folgenden Regeln.

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\neg x$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

Der Ausgang eines Und-Gatters ist also genau dann 1, wenn beide Eingänge 1 sind, und der Ausgang eines Oder-Gatters ist 1, wenn mindestens ein Eingang 1 ist. Das Nicht-Gatter dreht den Eingang um.

Aufgabe 1 (*4 Punkte*) Mit Hilfer der Gatter können wir kompliziertere Funktionen bilden, z. B. $x \oplus y = (x \vee y) \wedge (\neg(x \wedge y))$. Hier ist die Funktionstafel, schrittweise aufgebaut.

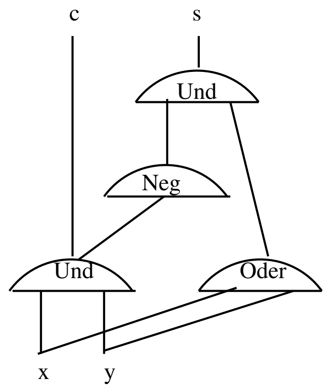
x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\neg(x \wedge y)$	$(x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y)$
0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Die ersten beiden Spalten enthalten die vier möglichen Kombinationen für x und y. Die dritte und vierte Spalten sind dann die Werte von $x \wedge y$ und $x \vee y$. Die fünfte Spalte ist die Negation der dritten Spalte und die letzte Spalte ist das Und der vierten und fünften Spalte.

Gibt es für die Funktion $x \oplus y$ einen gebräuchlichen Namen?

Lösung: Gebräuchliche Namen: Ungleich, Exclusives Oder, Summe modulo 2, Entweder-Oder.

Aufgabe 2 (*9 Punkte*) Betrachte den folgenden Schaltkreis mit zwei Eingängen x und y und zwei Ausgängen c und s. Dabei steht s für Summe (sum) und c für Übertrag (carry). Die Information fließt von unten nach oben.



a) Geben Sie Ausdrücke für c und s an. Für c lautet die Antwort $c = x \wedge y$. Um den Ausdruck für s zu erhalten, schreiben Sie am besten von unten nach oben an jedes Gatter den Ausdruck der berechneten Funktion.

b) Geben Sie die Funktionstabellen für c und s an.

c) Verifizieren Sie, dass der Schaltkreis die Binärdarstellung der Summe der beiden Eingänge berechnet, d.h. wenn x und y null sind, dann $(c, s) = (0, 0)$, wenn genau ein Eingang eins ist, dann $(c, s) = (0, 1)$, und wenn beide Eingänge eins sind, dann $(c, s) = (1, 0)$. In Formeln, $x + y = 2c + s$. Dabei werden Bits als Zahlen interpretiert, d.h., das Bit 0 wird als die Zahl 0 interpretiert und das Bit 1 wird als die Zahl 1 interpretiert.

   Hinweis: Für $x = y = 1$, erhält man $c = 1 \wedge 1 = 1$ und $s = 1 \oplus 1 = 0$, also $x + y = 1 + 1 = 2 \cdot 1 + 0 = 2c + s$. Argumentieren Sie analog für die Fälle $x = y = 0$, $x = 0$, $y = 1$ und $x = 1$, $y = 0$.

Lösung:

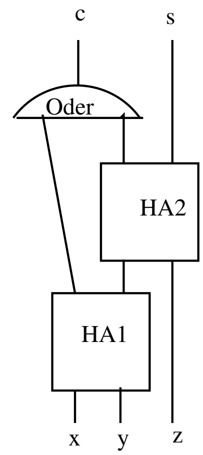
a) Wir haben $c = x \wedge y$ und $s = x \oplus y$. Dabei ist $\oplus$ die Funktion aus der ersten Aufgabe. In der ersten Aufgabe finden Sie auch die Funktionstabellen für beide Funktionen.

b) Der Übertrag c ist 1 genau wenn x und y beide 1 sind. Das Summenbit s ist 1 wenn genau eines von x und y gleich 1 ist.

   Alternativ: Den Funktionstabellen entnimmt man, dass gilt:

   - Für $x = y = 0$ gilt $c = s = 0$, also $x + y = 0 = 2c + s$.
   - Wenn $x = 0$ und $y = 1$ oder $x = 1$ und $y = 0$, dann $c = 0$ und $s = 1$, also $x+y = 1 = 2\cdot 0+1 = 2c+s$.
   - Wenn $x = y = 1$, dann $c = 1$ und $s = 0$, also $x + y = 1 + 1 = 2 \cdot 1 + 0 = 2c + s$.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*) Wir bezeichnen nun den Schaltkreis aus der zweiten Aufgabe durch HA. Das steht für Halbaddierer. HA hat zwei Eingänge und zwei Ausgänge. Betrachte folgenden Schaltkreis mit drei Eingängen x, y und z. Die Ausgänge heißen wieder c und s. Beachten Sie dass das Summenbit des unteren Halbaddierers eine Eingabe für den oberen Halbaddierer ist.



Zeigen Sie, dass der Schaltkreis die Binärdarstellung der Summe $x+y+z$ berechnet, d.h., wenn die Summe 0 ist, dann $(c,s) = (0,0)$, wenn die Summe 1 ist, dann $(c,s) = (0,1)$, wenn die Summe 2 ist, dann $(c,s) = (1,0)$ und wenn die Summe 3 ist, dann $(c,s) = (1,1)$. In Formeln,

$$x + y + z = 2c + s,$$

Dieser Schaltkreis läuft unter dem Namen Volladdierer.

Hinweis: Argumentieren Sie nach folgendem Schema. Nehmen wir an, dass genau zwei Eingaben gleich 1 ist. Falls $x = y = 1$ und $z = 0$, dann ist die Ausgabe den unteren Halbaddierers HA1 gleich $(c_1, s_1) = (1,0)$. Die Eingaben von HA2 sind daher $(0,0)$ und seine Ausgaben $(c_2, s_2) = (0,0)$. Daher $c = c_1 \vee c_2 = 1 \vee 0 = 1$ und $s = s_2 = 0$. Falls $z = 1$ und $x + y = 1$, dann $(c_1, s_1) = (0,1)$, die Eingaben von HA2 sind daher $(1,1)$ und seine Ausgabe $(c_2, s_2) = (1,0)$. Daher $c = c_1 \vee c_2 = 0 \vee 1 = 1$ und $s = s_2 = 0$.

Nun sind Sie dran, die anderen Fälle zu diskutieren.

Lösung: Wir probieren alle Möglichkeiten für die Eingaben durch:

- Alle null: Dann sind die Ausgänge beider Halbaddierer Null und daher beide Ausgänge des Volladdierers Null.
- Genau eine Eins: Wenn z Eins ist und x und y Null, dann sind beide Ausgänge von HA1 Null und bei HA2 ist c Null und s Eins. Also ist der s-Ausgang des Volladdierers Eins und der c-Ausgang Null. Falls z Null ist und entweder x oder y gleich 1, dann ist der c-Ausgang von HA1 gleich Null und der s-Ausgang Eins. Also bekommt HA2 eine Null und eine Eins und liefert eine Eins am s-Ausgang und eine Null am c-Ausgang. Damit ist der s-Ausgang des Volladdierers Eins und der c-Ausgang Null.
- Genau zwei Einsen: Falls z Eins ist und entweder x oder y, dann ist der s-Ausgang von HA1 gleich 1 und der c-Ausgang gleich Null. Damit sind beider Eingänge von HA2 gleich Eins und HA2 liefert eine Null am s-Ausgang und eine Eins am c-Ausgang. Für den Volladdierer gilt daher $(c,s) = (1,0)$. Falls z Null ist und x und y Eins, dann gilt für HA1 $(c,s) = (1,0)$. HA2 bekommt daher zwei Nullen und liefert zwei Nullen. Damit gilt für den Volladdierer $(c,s) = (1,0)$.
- Drei Einsen: Dann liefert HA1 $(c,s) = (1,0)$. Daher bekommt HA2 eine Eins und eine Null und liefert $(c,s) = (0,1)$. Damit gilt für den Volladdierer $(c,s) = (1,1)$.

Alternative Argumentation für mehr mathematisch orientiere Hörer(innen): Seien c_1 und s_1 die Ausgaben des unteren Halbaddierers und c_2 und s_2 die Ausgaben des obigen Halbaddierers. Dann gilt

$$s_2 = s_1 \oplus z = (x \oplus y) \oplus z = (x + y + z) \bmod 2.$$

und

$$c = c_1 \vee c_2 = (x \wedge y) \vee ((x \oplus y) \wedge z) = (x + y + z) \div 2.$$

Beachte dabei $(x \wedge y) \vee ((x \oplus y) \wedge z)$ auf jeden Fall 1 liefert wenn x und y 1 sind und auf jeden Fall 0, wenn x und y 0 sind. Wenn genau eines von x und y 1 ist, dann liefert der Ausdruck 1 falls z gleich 1 ist.

Oder noch anders. Sei (c_1, s_1) die Ausgabe des unteren Halbaddierers und (c_2, s_2) die Ausgabe des oberen Halbaddierers. Dann ist $2c_1 + s_1 = x + y$ und $2c_2 + s_2 = s_1 + z$ und daher

$$x + y + z = 2c_1 + s_1 + z = 2c_1 + 2c_2 + s_2 = 2(c_1 + c_2) + s_2$$

Die Ausgabe des Volladierers ist $(c_1 \vee c_2, s_2)$. Wir beobachten nun noch, dass c_1 und c_2 nie gleichzeitig 1 sind, denn wenn $c_1 = 1$ dann $s_1 = 0$ und daher $c_2 = 0$. Also ist $c_1 + c_2 = c_1 \vee c_2$.

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Betrachte folgendes Programm. Wir nehmen an, dass ich Register R0 eine natürliche Zahl n steht, d.h., eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, ... Im Programm steht der Stern im Zeile 2 für Multiplikation.

```
1  R1 ← 0
2  if R1 * R1 > R0, BZ ← 5
3  R1 ← R1 + 1
4  BZ ← 2
5  drucke R1 - 1
6  STOP
```

- Was druckt das Programm, wenn in R0 steht: 0, 1, 4, 7, 9?

optional Was gibt das Programm aus, wenn in R0 die Zahl n steht?

Lösung:

- Die Ausgaben sind 0, 1, 2, 2, 3. Ich rechne das für die Eingabe 7 genauer vor.
  Der BZ wird auf 1 gesetzt und in R1 wird 0 abgespeichert. Der BZ wird auf 2 erhöht.
  0 * 0 > 7 ist falsch. Daher wir der BZ auf 3 erhöht
  Wir erhöhen R1 auf 1, erhöhen den BZ auf 4. Der Sprungbefehlt in Zeile 4 setzt den BZ auf 2.
  1 * 1 > 7 ist falsch. Daher wir der BZ auf 3 erhöht
  Wir erhöhen R1 auf 2, erhöhen den BZ auf 4. Der Sprungbefehlt in Zeile 4 setzt den BZ auf 2.
  2 * 2 > 7 ist falsch. Daher wir der BZ auf 3 erhöht
  Wir erhöhen R1 auf 3, erhöhen den BZ auf 4. Der Sprungbefehlt in Zeile 4 setzt den BZ auf 2.
  3 * 3 > 7 ist richtig. Daher wir der BZ auf 5 erhöht. Wir drucken 2, erhöhen den BZ auf 6 und halten an.

- Allgemein durchläuft R1 die natürlichen Zahlen. Bei der ersten Ausführung von Zeile 2, ist der Test auf jeden Fall falsch, da R1 den Wert 0 hat und R0 mindestens den Wert 0 hat. Wir springen nach Zeile 5, wenn zum ersten Mal R1 * R1 > R0. Für R1 - 1 war die Ungleichung noch nicht richtig. Also gilt (R1 - 1)*(R1 - 1) $\leq$ R0 < R1 * R1, wenn das Programm anhält. Wenn wir jetzt Wurzeln ziehen, dann gilt $R1 - 1 \leq \sqrt{R0} < R1$. Also drucken wir die größte ganze Zahl kleiner gleich $\sqrt{R0}$.

Aufgabe 5 (*7 Punkte*) In der Vorlesung sahen wir eine Turingmaschine, die zählt. Dabei war die Annahme, dass das Band mit

$$\ldots 0000000BBBBBBB\ldots$$

initialisiert ist und der Kopf der Maschine am Anfang auf der rechtesten Null steht. Modifizieren Sie die Turingmaschine so, dass sie für den Anfangsbandinhalt

$$\ldots BBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBB\ldots$$

funktioniert.

Zur Erinnering: in der Vorlesung nahmen wir an, dass das Band am Anfang mit ....00000BBBBBB..... beschriftet ist, der Kopf auf der rechtesten Null steht und die Maschine im Zustand q1 ist. Das Program war

```
q1 0 q2 1 S
q1 1 q1 0 L
q2 0 q2 0 R
q2 1 q2 1 R
q2 B q1 B L
```

Lösung: Wir geben der Maschine einen neuen Anfangszustand q0. Sie druckt eine 0 und geht in den Zustand q1 über. Danach kann sie fast so arbeiten, wie in der Vorlesung. Wenn wir im Zustand q1 eine 1 lesen, schreiben wir eine 0 und gehen nach links. Sobald wir eine 0 oder ein B (DAS IST NEU) lesen, drucken wir eine 1 und gehen in den Zustand q2 über. Im Zustand q2 gehen wir nach rechts bis wir ein B lesen. Wir gehen eins nach links und wieder in den Zustand q1. Die ganze Tafel ist

q0	B	q1	0	S
q1	1	q1	0	L
q1	0	q2	1	R
q1	B	q2	1	R
q2	0/1	q2	0/1	R
q2	B	q1	B	L

Einer der Hörer hat noch eine elegantere Lösung gefunden. Er braucht keinen neuen Zustand, sondern startet die Maschine wie bisher im Zustand q_1. Es kommt nur eine Zeile dazu. Falls die Maschine im Zustand q_1 ein B liest, druckt sie eine Eins und geht nach rechts und in den Zustand q_2. Also

q1	1	q1	0	L
q1	0	q2	1	R
q1	B	q2	1	R
q2	0/1	q2	0/1	R
q2	B	q1	B	L

Aufgabe 6 (*0 Punkte*) Falls Sie ein Google-Konto haben, sehen Sie sich Ihr Google-Profil (Zusammenfassung der im Google-Konto gespeicherten Daten) an.

a) Öffnen Sie Ihr Google-Konto.

b) Klicken Sie im linken Navigationsbereich auf Daten & Personalisierung.

c) Scrollen Sie bis zum Bereich "Dinge, die Sie erstellen, und Ihre Aktivitäten".

d) Klicken Sie auf Google Dashboard aufrufen.

e) Die von Ihnen verwendeten Google-Dienste sowie eine Zusammenfassung Ihrer Daten werden angezeigt.

Ich habe für die Videos, die Nachbereitung und das Übungsblatt etwa   Stunden gebraucht. Angelina fertigt aus diesen Zahlen eine Statistik an. Kurt und Corinna sehen nur diese Statistik. Wir möchten wissen, ob der Schwierigkeitsgrad in etwa richtig ist. Wir halten einen Gesamtaufwand von 3 - 4 Stunden für angemessen.

Rechner war spannend ☐ okay ☐ langweilig ☐
schwierig ☐ okay ☐ einfach ☐