Universität des Saarlandes
FR Informatik

Kurt Mehlhorn und Corinna Coupette **WiSe 2020/21**

Übungen zu Ideen der Informatik

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter20/ideen/

Blatt 2 Abgabeschluss: 16.11.2020

In dieser Übung lernen wir das Innenleben eines Volladdierers kennen. Wir werden sehen, wie man einen Volladierer aus drei einfachen Gattern aufbauen kann, Und-Gattern, Oder-Gattern, und Nicht-Gattern.

Ein Schaltnetz besteht aus Gattern. Wir arbeiten mit drei Arten von Gattern, Und-Gatter, Oder-Gatter, und Nicht-Gatter. Und-Gatter ($\wedge$) und Oder-Gatter ($\vee$) haben je zwei Eingänge und einen Ausgang, Nicht-Gatter ($\neg$) haben einen Eingang und einen Ausgang. Die Gatter operieren auf den booleschen Werten (auch Bits genannt) 0 und 1 gemäß folgenden Regeln.

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\neg x$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

Der Ausgang eines Und-Gatters ist also genau dann 1, wenn beide Eingänge 1 sind, und der Ausgang eines Oder-Gatters ist 1, wenn mindestens ein Eingang 1 ist. Das Nicht-Gatter dreht den Eingang um.

Aufgabe 1 (*4 Punkte*) Mit Hilfer der Gatter können wir kompliziertere Funktionen bilden, z. B. $x \oplus y = (x \vee y) \wedge (\neg(x \wedge y))$. Hier ist die Funktionstafel, schrittweise aufgebaut.

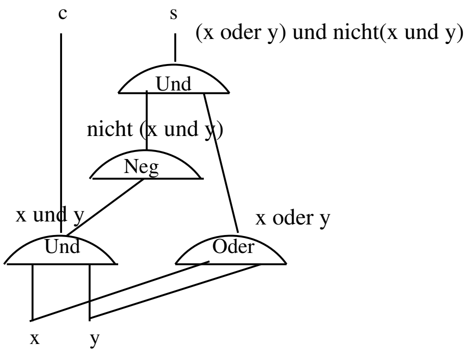
x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\neg(x \wedge y)$	$(x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y)$
0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Die ersten beiden Spalten enthalten die vier möglichen Kombinationen für x und y. Die dritte und vierte Spalten sind dann die Werte von $x \wedge y$ und $x \vee y$. Die fünfte Spalte ist die Negation der dritten Spalte und die letzte Spalte ist das Und der vierten und fünften Spalte.

Gibt es für die Funktion $x \oplus y$ einen gebräuchlichen Namen?

Lösung: Gebräuchliche Namen: Ungleich, Exclusives Oder, Summe modulo 2, Entweder-Oder.

Aufgabe 2 (*9 Punkte*) Betrachte den folgenden Schaltkreis mit zwei Eingängen x und y und zwei Ausgängen c und s. Dabei steht s für Summe (sum) und c für Übertrag (carry). Die Information fließt von unten nach oben.



a) Geben Sie Ausdrücke für c und s an. Für c lautet die Antwort $c = x \wedge y$. Um den Ausdruck für s zu erhalten, schreiben Sie am besten von unten nach oben an jedes Gatter den Ausdruck der berechneten Funktion.

b) Geben Sie die Funktionstabellen für c und s an.

c) Verifizieren Sie, dass der Schaltkreis die Binärdarstellung der Summe der beiden Eingänge berechnet, d.h. wenn x und y null sind, dann $(c, s) = (0, 0)$, wenn genau ein Eingang eins ist, dann $(c, s) = (0, 1)$, und wenn beide Eingänge eins sind, dann $(c, s) = (1, 0)$. In Formeln, $x + y = 2c + s$. Dabei werden Bits als Zahlen interpretiert, d.h., das Bit 0 wird als die Zahl 0 interpretiert und das Bit 1 wird als die Zahl 1 interpretiert.

   Hinweis: Für $x = y = 1$, erhält man $c = 1 \wedge 1 = 1$ und $s = 1 \oplus 1 = 0$, also $x + y = 1 + 1 = 2 \cdot 1 + 0 = 2c + s$. Argumentieren Sie analog für die Fälle $x = y = 0$, $x = 0$, $y = 1$ und $x = 1$, $y = 0$.

Lösung:

a) Das Bild des Schaltkreises ist nun beschriftet. Damit erhalten wir $c = x \wedge y$ und $s = (x \vee y) \wedge \not(x \wedge y)$. Das ist für s genau der Ausdruck aus Aufgabe 1. Also ist $s = x \oplus y$, wo $\oplus$ die Funktion aus der ersten Aufgabe ist.

b) In der ersten Aufgabe finden Sie auch die Funktionstabellen für beide Funktionen.

c) Der Übertrag c ist 1 genau wenn x und y beide 1 sind. Das Summenbit s ist 1 wenn genau eines von x und y gleich 1 ist.

   Alternativ: Den Funktionstabellen entnimmt man, dass gilt:

   - Für $x = y = 0$ gilt $c = s = 0$, also $x + y = 0 = 2c + s$.
   - Wenn $x = 0$ und $y = 1$ oder $x = 1$ und $y = 0$, dann $c = 0$ und $s = 1$, also $x + y = 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 2c + s$.
   - Wenn $x = y = 1$, dann $c = 1$ und $s = 0$, also $x + y = 1 + 1 = 2 \cdot 1 + 0 = 2c + s$.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*) Wir bezeichnen nun den Schaltkreis aus der zweiten Aufgabe durch HA. Das steht für Halbaddierer. HA hat zwei Eingänge und zwei Ausgänge. Betrachte folgenden Schaltkreis mit drei Eingängen x, y und z. Die Ausgänge heißen wieder c und s. Beachten Sie dass das Summenbit des unteren Halbaddierers eine Eingabe für den oberen Halbaddierer ist.