

Übungen zu Ideen der Informatik

<https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter20/ideen/>

Blatt 6

Abgabeschluss: 14.12.2020

Aufgabe 1 (10 Punkte)

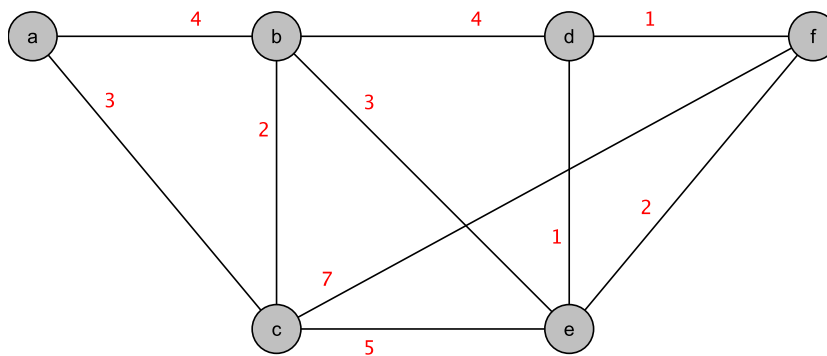


Abbildung 1: Beispielgraph für Aufgabe 1

Betrachten Sie den Graphen in Abbildung 1 mit in Rot annotierten Kantenlängen (auch Kantengewichte genannt). Alle Kanten können in beide Richtungen durchlaufen werden.

- Finden Sie mithilfe von Dijkstras Algorithmus die kürzesten Wege von Knoten a zu allen anderen Knoten und geben Sie dabei alle Zwischenschritte an. Bei Gleichstand bearbeiten Sie die Knoten in alphabetischer Reihenfolge. (7 Punkte)
- Betrachten Sie noch einmal den Pseudocode von Dijkstras Algorithmus, der in der Vorlesung eingeführt wurde. Der Algorithmus berechnet aktuell die Distanz eines ausgewählten Knotens zu allen anderen Knoten, ohne dass sich die kürzesten Wege selbst unmittelbar aus dem Ergebnis erschließen ließen. Wie und wo müssten Sie den Algorithmus ergänzen, um am Ende in weniger als n Schritten (für einen Graphen mit n Knoten) den kürzesten Pfad zwischen dem ausgewählten Startknoten und einem ausgewählten Zielknoten ermitteln zu können, wenn Sie nicht genug Platz haben, um alle kürzesten Pfade direkt zu speichern? (3 Punkte)

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Wir nehmen nun an, dass es auch negative Kantengewichte geben darf (die nächste Aufgabe gibt ein Beispiel für die Sinnhaftigkeit von negativen Kantengewichten). Ein Weg mit Kanten der Länge 5, -5 , 1 hat Gesamtlänge $5 + (-5) + 1 = 1$. Im folgenden Beispielgraphen kann man die Kanten in der oberen Reihe nur in Pfeilrichtung und die anderen Kanten in beide Richtungen benutzen.

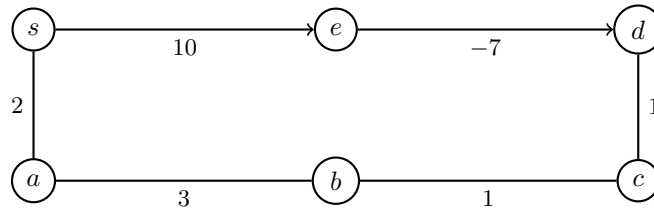


Abbildung 2: Beispielgraph für Aufgabe 2

- Geben Sie die Entfernungen von s zu allen Knoten (einschließlich s) an. (3 Punkte)
- Führen Sie (nach denselben Bedingungen wie in Aufgabe 1) Dijkstras Algorithmus auf dem Beispielgraphen aus und geben Sie das Ergebnis an (diesmal müssen Sie die Zwischenschritte nicht aufführen). (3 Punkte)
- Was schließen Sie hinsichtlich der Korrektheit von Dijkstras Algorithmus auf diesem Graphen und was könnte die Ursache für das beobachtete Verhalten sein? (2 Punkt)
- Funktioniert der erste in der Vorlesung vorgestellte Algorithmus (angepasst so, dass er auf Graphen mit Kanten, die in beide Richtungen durchlaufen werden können und nicht-negative Kantengewichte haben, grundsätzlich funktioniert) auf diesem Graphen? Warum bzw. warum nicht? (2 Punkte)

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sie betreiben ein Regionalverkehrsunternehmen in einem Schienennetz. Bei dem Betrieb entstehen Ihnen für jeden Streckenabschnitt zwischen zwei Stationen x und y bestimmte Kosten c_{xy} ; außerdem erhalten Sie für das Bedienen eines Streckenabschnitts ein bestimmtes, von Ihren Kosten unabhängig festgelegtes Entgelt r_{xy} . Die Situation ist in Abbildung 3 dargestellt: Jeder Knoten ist eine Station, jede Kante ist ein Streckenabschnitt und mit Ihren Kosten (Ihrem Entgelt) in Rot (Blau) beschriftet.

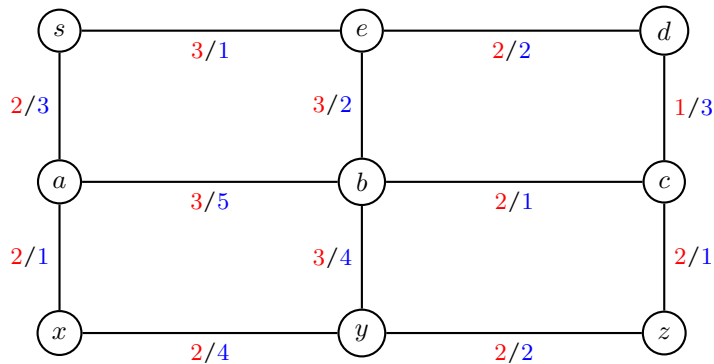


Abbildung 3: Beispielgraph für Aufgabe 3

Ihr Unternehmen ist aktuell in Knoten s beheimatet und kann vorerst nur einen Zug betreiben, der eine Rundtour fährt: eine Tour, die in Ihrem Heimatknoten beginnt und wieder endet und jeden Streckenabschnitt maximal einmal überquert.

- Sie wollen wissen, ob es eine Rundtour gibt, auf der das Unternehmen Geld verdient. Welche Voraussetzung in Bezug auf die Kosten und Entgelte der Kanten muss erfüllt sein, damit dies der Fall ist? Unter welcher Voraussetzung ist eine Tour ein Verlustgeschäft – und wann ist die Tour wirtschaftlich neutral? (3 Punkte)
- Geben Sie eine Rundtour von s aus an, die profitabel ist, und belegen Sie die Profitabilität. (2 Punkte)

- c) Um die Profitabilität Ihres Unternehmens zu erhöhen, erwägen Sie, Ihren Unternehmenssitz von s weg zu einem anderen Knoten hin zu verlegen. Angenommen, dass Sie weiterhin nur eine Rundtour bedienen können: Welches Kriterium muss Ihr neuer Standort erfüllen, wenn Sie Ihre Profitabilität maximieren wollen? (2 Punkte)
- d) Geben Sie einen geeigneten neuen Standort an und begründen Sie Ihre Wahl. (3 Punkte)

Zusatzaufgabe (10 Punkte)

Die Punkte, die Sie mit dieser Aufgabe erlangen können, sind Zusatzpunkte. Sie beeinflussen nicht die Mindestpunktzahl, die Sie benötigen, um zur Klausur zugelassen zu werden. Die von Ihnen erreichten Punkte werden aber mit Ihren anderen Punkten zusammengerechnet, um festzustellen, ob Sie die notwendige Mindestpunktzahl erreicht haben. Zusatzaufgaben erfordern in der Regel mehr eigenständiges Denken als normale Aufgaben. Auch wenn Sie keine Zusatzpunkte benötigen, um zur Klausur zugelassen zu werden, kann sich die Bearbeitung der Zusatzaufgabe daher für Sie (intellektuell) lohnen.

Nehmen Sie an, ein Ganove hat Ihre Festplatte verschlüsselt und den Code zur Entschlüsselung irgendwo in den Straßen oder an einer Straßenecke Ihrer Heimatstadt eindeutig erkennbar auf den Boden geschrieben. Der Ganove gibt Ihnen einen Tag Zeit, um ohne fremde Hilfe den Code zu finden und die Festplatte wieder zu entschlüsseln – scheitern Sie, wird er all Ihre Daten löschen.¹ Ihre Heimatstadt hat moderate Größe, sodass Sie alle Straßenabschnitte zweimal ganz ablaufen könnten, bevor der Tag endet. Sie ist aber zu kompliziert strukturiert, als dass Sie ihr gesamtes Straßennetz im Kopf behalten könnten. In Ihrer Tasche befindet sich eine ausreichend große Menge roter und blauer Kreide, mit der Sie in Straßen und an Straßenecken Markierungen anbringen können.

- a) Überlegen Sie sich ein Verfahren, mit dem Sie mit Sicherheit den Code finden, bevor Ihre Daten gelöscht werden (Sie können dafür das Straßennetz als einen Graphen mit den Straßenecken als Knoten und den Straßenabschnitten als Kanten auffassen). (4 Punkte)
- b) Erproben Sie Ihr Verfahren an dem Graphen von Aufgabe 3 (ignorieren Sie dafür die Kantenbeschriftungen) und geben Sie dabei alle Einzelschritte an. Sie starten im Knoten s . Der Code findet sich auf dem Straßenabschnitt zwischen y und z . (2 Punkte)
- c) Begründen Sie, warum Ihr Verfahren im Allgemeinen funktioniert und Sie alle Straßenabschnitte nicht mehr als zweimal komplett ablaufen. (4 Punkte)

Ich habe für die Videos, die Nachbereitung und das Übungsblatt etwa Stunden gebraucht.

(Angelina fertigt aus diesen Zahlen eine Statistik an. Kurt und Corinna sehen nur diese Statistik. Wir möchten wissen, ob der Schwierigkeitsgrad in etwa richtig ist.)

Kürzeste Wege war spannend okay langweilig
 schwierig okay einfach

¹Eigentlich kein Problem, denn Sie haben ja ein aktuelles Backup – oder?