Kurt Mehlhorn und Corinna Coupette **WiSe 2020/21**

Übungen zu Ideen der Informatik

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter20/ideen/

Blatt 8 Abgabeschluss: 4.1.2021

Aufgabe 1 (*5 Punkte*)

Für einen ausgewogenen Lerneffekt muss ein Student sowohl Aufgaben vom Typ M als auch Aufgaben vom Typ A bearbeiten. Ein Student braucht 2 Stunden, um eine Aufgabe vom Typ M zu lösen und 8 Stunden für eine Aufgabe von Typ A. Es gibt drei Tutoren für die Vorlesung.

- Der erste Tutor glaubt, dass man 4 Stunden für Aufgaben vom Typ M und 5 Stunden für Aufgaben vom Typ A braucht und dass Studenten nicht mehr als 15 Stunden am Zettel sitzen dürfen.
- Der zweite Tutor glaubt, M Aufgaben löst man in 3 Stunden und A Aufgaben löst man in 1 Stunde. Er denkt, dass Studenten mindestens 3 Stunden arbeiten sollten.
- Der letzte Tutor findet man braucht 2 Stunden für M Aufgaben und 7 Stunden für A Aufgaben. Er sagt, man muss mindestens 12 Stunden am Zettel arbeiten.

Der findige Student löst gerade so viele Aufgaben vom Typ M und A, dass er mit möglichst wenig Zeitaufwand alle Tutoren zufriedenstellt.

Stellen Sie die oben angegebenen Informationen als Ungleichungssystem dar. Führen Sie dazu zwei Variablen x und y ein für die Anzahlen der M bzw A Aufgaben, die der Student löst. Geben Sie auch die Kostenfunktion an. Die Kostenfunktion gibt den Arbeitsaufwand des Studenten an in Abhängigkeit von der Anzahlen x und y der gelösten Aufgaben.

Lösung: Wir haben die folgenden Gleichungen und Ungleichungen.

- Arbeitsaufwand des Studenten $= 2x + 8y$. Den gilt es zu minimieren.
- Erster Tutor: $4x + 5y \leq 15$.
- Zweiter Tutor: $3x + y \geq 3$.
- Dritter Tutor: $2x + 7y \geq 12$.

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

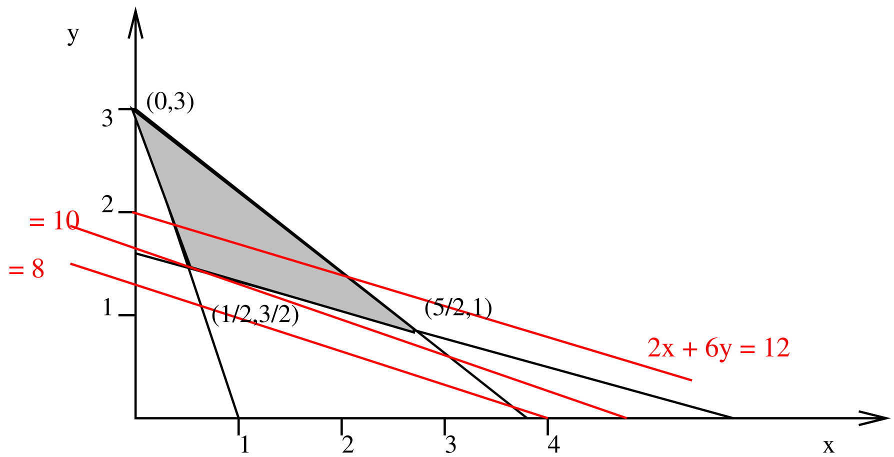
Betrachten sie das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & 2x + 6y \\ \text{wobei} \quad & 4x + 5y \leq 15 \\ & 3x + y \geq 3 \\ & 2x + 8y \geq 13. \end{aligned}$$

a) (*5 Punkte*) Zeichnen Sie die Ungleichungen in dem Bereich $x \in [0;5]$, $y \in [0;4]$ und bestimmen Sie die Menge der Punkte, die alle Ungleichungen erfüllt. Man nennt diese Region das zulässige Gebiet.

Zeichnen Sie die Geraden $2x + 6y = 12$, $2x + 6y = 10$ und $2x + 6y = 8$ ein. Geben Sie jeweils den Durchschnitt mit dem zulässigen Gebiet an. Eine der Geraden schneidet das zulässige Gebiet nicht, eine geht durch eine Ecke des Gebiets, eine schneidet das zulässige Gebiet in vielen Punkten. Was bedeutet das?

Hinweis: Die Ungleichungen sind ähnlich zu den Ungleichungen aus der ersten Aufgabe, sie sind aber nicht die gleichen. Machen Sie die Zeichnung am besten auf einem karierten Papier. Das hilft für den Teil b).



Lösung:

Die Punkte in der dunklen Region erfüllen alle Ungleichungen. Die Region ist ein Dreieck mit den Ecken $(0,3)$, $(1/2,3/2)$ und $(5/2,1)$. Die Geraden $2x + 6y = 8$ $(10,\ 12)$ sind in rot eingezeichnet.

Die Gerade $2x + 6y = 8$ schneidet das zulässige Gebiet nicht. Also gibt es keine zulässige Kombination von x und y mit $2x + 6y = 8$.

Die Gerade $2x + 6y = 12$ schneidet das zulässige Gebiet in einem Geradensegment (dicker roter Strich). Jeder Punkt auf diesem Geradensegment ist zulässig und hat den Zielfunktionswert 12.

Die Gerade $2x + 6y = 10$ geht durch eine Ecke des zulässigen Gebiets (roter Punkt). Es gibt also einen zulässigen Punkt mit dem Wert 10. Alle anderen zulässigen Punkte liegen über der Geraden $2x + 6y = 10$ und haben daher einen Zielfunktionswert größer als 10. Also ist die Ecke $(1/2, 3/2)$ die optimale Lösung.

b) (*5 Punkte*) Nutzen Sie Ihre Zeichnung, um die optimale Lösung zu finden. Wir interessieren uns für zwei Arten von Lösungen.

(a) x und y sind beliebige Dezimalzahlen.

(b) x und y müssen ganzzahlig sein. Bestimmen Sie dazu zunächst alle zulässigen Punkte, bei denen x und y-Koordinate ganzzahlig sind.

Lösung: Wenn x und y beliebig sein dürfen, dann ist die optimale Lösung eine Ecke. Die Ecken haben die Koordinaten $(0,3)$ mit Zielfunktionswert 18, $(1/2, 3/2)$ mit Wert $2 \cdot 1/2 + 6 \cdot 3/2 = 10$ und $(5/2, 1)$ mit Wert $5/2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 11$. Also ist die Ecke $(1/2, 3/2)$ optimal.

Warum ist das Optimum in einer Ecke? Betrachte die Geradenschar $2x + 6y = c$ für verschiedene Werte von c. Wenn die Gerade $2x + 6y = c$ für einen bestimmten Wert von c das zulässige Gebiet schneidet, dann gibt es eine Lösung mit dem Arbeitsaufwand c. Wir müssen also das kleinste c finden, für das die Gerade das zulässige Gebiet noch schneidet. Für das kleinste c, wird die Gerade das Gebiet nur noch in einer Ecke des Gebiets schneiden.

Wir können diese Antwort leicht überprüfen. Die Gerade $2x + 6y = 10$ schneidet das zulässige Gebiet in der Ecke $(1/2, 3/2)$. Alle anderen zulässigen Punkte liegen über dieser Geraden und haben daher höheren Wert.

Die ganzzahligen zulässigen Punkte (= Punkte im zulässigen Gebiet mit ganzzahligen Koordinaten) sind $(0,3)$ und $(1,2)$. $(0,3)$ hat Kosten 18 und $(1,2)$ hat Kosten 14. Also ist $(1,2)$ optimal.

Eine Hörerin hat anschaulicher argumentiert. Sei (x,y) ein zulässiger Punkt. Wir lassen den Punkt nach unten wandern, bis wir auf eine Kante stoßen. Dabei wird die Zielfunktion kleiner. Wenn wir auf einer Kante sind, bewegen wir uns zum besseren Endpunkt hin. Auf diese Weise kommen wir in der Ecke $(1/2, 3/2)$ an.

Aufgabe 3 (*5 Punkte*)

Benutzen Sie das Fourier-Motzkin-Verfahren, um zu entscheiden, ob es für die Aufgabe 2 eine Lösung gibt, bei dem der Wert der zur minimierenden Funktion kleiner gleich 7 ist.

Lösung: Wir fragen uns, ob das Ungleichungssystem $2x+6y \le 7$, $4x+5y \le 15$, $3x+y \ge 3$, $2x+8y \ge 13$ eine Lösung hat. Wir lösen die Ungleichungen nach y auf und erhalten

$$y \le 7/6 - x/3 \quad y \le 3 - 4x/5 \quad y \ge 3 - 3x \quad y \ge 13/8 - x/4.$$

Durch Kombinieren erhalten wir 4 Ungleichungen für x, nämlich,

$$3 - 3x \le 7/6 - x/3 \quad 3 - 3x \le 3 - 4x/5 \quad 13/8 - x/4 \le 7/6 - x/3 \quad 13/8 - x/4 \le 3 - 4x/5.$$

Vereinfachen ergibt

$$\frac{8x}{3} \ge \frac{11}{6} \quad \frac{11x}{5} \ge 0 \quad \frac{x}{12} \le -\frac{11}{24} \quad \frac{11x}{20} \le \frac{11}{8},$$

und nach weiterer Vereinfachung

$$x \ge \frac{11}{12} \quad x \ge 0 \quad x \le -\frac{11}{2} \quad x \le \frac{5}{2}.$$

Die ersten beiden Ungleichungen widersprechen der dritten. Also gibt es keine Lösung mit Kosten kleiner gleich 7.

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

Optimierungsverfahren können benutzt werden, um optimale Entscheidungen unter einer Vielzahl von Einschränkungen zu treffen. Beispielsweise kann die Entscheidung, ob Ihre Bank Ihnen einen Kredit gewährt, von einem Algorithmus getroffen werden. In die Berechnung könnten persönliche Informationen wie Ihr Wohnort, Ihr Bildungsstand, Details aus Ihrer Versicherungshistorie, Kontobewegungen oder Ähnliches einfließen.

a) Nennen Sie eine geeignete Zielfunktion, die einem Algorithmus, der über die Kreditgewährung zu entscheiden hat, zugrunde liegen könnte, und geben Sie an, ob der Algorithmus diese minimieren oder maximieren müsste. (*1 Punkt*)

   Lösung: Der Algorithmus könnte versuchen, den erwarteten Profit der Bank zu maximieren. Dieser würde maßgeblich von der erwarteten Kreditausfallwahrscheinlichkeit, der Kreditlaufzeit und der Verzinsung abhängen. Die ihm zur Verfügung stehenden persönlichen Informationen würde der Algorithmus vor allem in die Berechnung der Kreditausfallwahrscheinlichkeit einfließen lassen.

b) Nennen Sie jeweils einen Vorteil und einen Nachteil der Kreditvergabe durch einen Algorithmus, der regelbasiert und damit ähnlich wie ein Bankberater entscheidet, im Vergleich zur Kreditvergabe durch einen Algorithmus, der auf Grundlage einer Datenbank vergangener Kreditvergabeentscheidungen und Zahlungsverläufe zu einer Entscheidung gelangt. (*4 Punkte*)

   Hinweis: Stellen Sie sich die Einarbeitung eines neuen Kreditbearbeiters vor: Er könnte ein Regelheft bekommen, nach dem er zu entscheiden hat. Alternativ könnte er Einsicht in die Entscheidungen des letzten Monats bekommen. Übertragen Sie die beiden Vorgehensweisen in die digitale Welt.

Lösung: Man muss hier unterscheiden, wie der Algorithmus formuliert ist. Algorithmen für solche Aufgaben werden entweder explizit formuliert oder aus Beispielen gelernt (siehe Vorlesung Maschinelles Lernen).

Explizit formuliert heißt, dass Regeln explizit formuliert werden. Etwa: Wenn Alter höchstens 40 und Kredithöhe höchstens 20% des jährlichen Einkommens, dann vergib den Kredit.

Vorteil der expliziten Verfahren: transparent und fair (vorausgesetzt, die Regeln sind nicht diskriminierend), Nachteil: unflexibel.

Die Alternative ist, dass der Algorithmus aus vorhandenen Beispielen gelernt wird. Dann gibt es keine expliziten Regeln.

Vorteil: bequeme Entwicklung, flexibel, Abdecken vieler Kriterien, Nachteil: intransparent, nicht besser als die Beispiele.

c) Nennen Sie drei andere Bereiche, in denen im Alltag Entscheidungen mithilfe von Optimierungsalgorithmen getroffen werden könnten, und nennen Sie jeweils eine geeignete Zielfunktion und Optimierungsrichtung (Minimierung oder Maximierung). (*3 Punkte*)

Lösung:

- Fahrplangestaltung der Bahn; mögliches Ziel: Minimierung der erwarteten Gesamtfahrzeit (aber: Konflikt mit Resilienz der geplanten Fahrten der Passagiere gegenüber Verspätungen)
- Einsatz energieintensiver Geräte im Smart Home; mögliches Ziel: Minimierung der Stromkosten (z.B. wird die Waschmaschine dann angeworfen, wenn die Strompreise gerade unten sind)
- Gestaltung der Auslagen von Supermärkten; mögliches Ziel: Maximierung des Gewinns (daher: teure Produkte komfortabel erreichbar, günstige Produkte nach unten; Gemüse und Obst an den Anfang; "Quengelzone" vor der Kasse, ...)
- ...

d) Gibt es Bereiche, in denen Entscheidungen Ihrer Ansicht nach auf keinen Fall mithilfe von Optimierungsalgorithmen getroffen werden sollten – und falls ja, welche? Begründen Sie Ihre Auffassung knapp. (*2 Punkte*)

Lösung:

Mögliches Beispiel mit aktueller Relevanz:

Triage (Priorisierung medizinischer Hilfeleistung z.B. anhand der Überlebenswahrscheinlichkeit) – insbesondere dann, wenn bereits begonnene Behandlung zugunsten von Patienten mit höherer Überlebenswahrscheinlichkeit abgebrochen werden können.

Weitere Beispiele: klassische Trolley-Probleme (Fahrtrichtung ändern, um einen alten Menschen statt drei junge Menschen zu überfahren?)

Begründung: keine Abwägung von Leben gegen Leben (Menschenwürde, Art. 1 Abs. 1 GG)

Ich habe für die Videos, die Nachbereitung und das Übungsblatt etwa ☐ Stunden gebraucht.

(Angelina fertigt aus diesen Zahlen eine Statistik an. Kurt und Corinna sehen nur diese Statistik. Wir möchten wissen, ob der Schwierigkeitsgrad in etwa richtig ist.)

Optimierung war	spannend ☐	okay ☐	langweilig ☐
	schwierig ☐	okay ☐	einfach ☐