Universität des Saarlandes
FR Informatik

Kurt Mehlhorn und Corinna Coupette **WiSe 2020/21**

Übungen zu Ideen der Informatik

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter20/ideen/

Blatt 9 Abgabeschluss: 11.01.2021

Aufgabe 1 (*7 Punkte*)

Betrachten Sie das Straßennetz in Abbildung 1, in dem 100 Autos von Start nach Ziel fahren wollen. Die Fahrzeiten sind wie angegeben; auf der Straße von Start nach B und von A nach Ziel ist die Fahrzeit x Minuten, wenn sie von x Autos befahren wird.

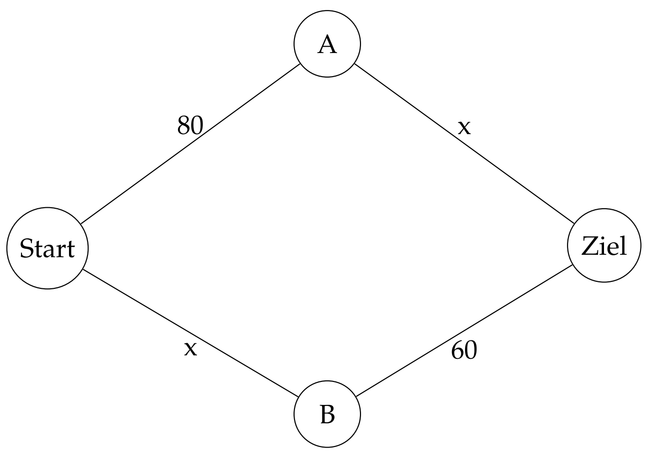

Abbildung 1: Straßennetz zu Aufgabe 1

Geben Sie bei der Beantwortung der folgenden Aufgaben stets Ihren vollständigen Rechenweg an.

a) Nehmen Sie an, dass x Fahrer obenherum fahren (Oben-Fahrer) und $100 - x$ Fahrer untenherum fahren (Unten-Fahrer). Geben Sie die Fahrzeit eines Oben-Fahrers und die Fahrzeit eines Unten-Fahrers als Funktion von x an. (*2 Punkte*)

Lösung: Oben: $g(x) = 80 + x$; unten: $h(x) = (100 - x) + 60$

b) Geben Sie die Gesamtfahrzeit aller Fahrer als Funktion von x an. (*1 Punkt*)

Lösung:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x(80 + x) + (100 - x)[(100 - x) + 60] \\
&= x^2 + 80x + (100 - x)(160 - x) \\
&= x^2 + 80x + 16000 - 100x - 160x + x^2 \\
&= 2x^2 + 80x - 260x + 16000 \\
&= 2x^2 - 180x + 16000
\end{aligned}$$

c) Was ist das globale Optimum, für welchen Wert von x wird die Gesamtfahrzeit aller Fahrer minimiert, und wie viele Fahrer müssen obenherum bzw. untenherum fahren, damit die Gesamtfahrzeit aller Fahrer minimiert wird? (*2 Punkte*)

Erinnerung: Für eine Funktion $f(x) = g(x)+h(x)$ ist $f'(x) = g'(x)+h'(x)$ und für eine Funktion $f(x) = ax^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ ist $f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$.

Lösung: Das Minimum wird erreicht, wenn $f'(x) = 0$ ist.

$$\begin{aligned} f'(x) = 4x - 180 &\overset{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow 4x &= 180 \\ \Leftrightarrow x &= 45 \end{aligned}$$

Es muss also 45 Oben-Fahrer und 55 Unten-Fahrer geben. Das globale Optimum, also die Gesamtfahrzeit, ist dann

$$45 \cdot 80 + 45 \cdot 45 + 55 \cdot 55 + 60 \cdot 55 = 11950.$$

d) Wie viele Fahrer sind Oben-Fahrer und wie viele Fahrer sind Unten-Fahrer, wenn jeder einzelne Fahrer seine Fahrzeit optimiert und sich ein Gleichgewicht eingestellt hat? Welche Fahrzeit hat ein Fahrer in diesem Gleichgewicht? (*2 Punkte*)

Lösung: Im Gleichgewicht, in dem jeder einzelne Fahrer seine Fahrzeit optimiert, muss die Fahrzeit obenherum gleich der Fahrzeit untenherum sein. Also:

$$80 + x = (100 - x) + 60 \Leftrightarrow 2x = 80 \Leftrightarrow x = 40$$

Es gibt also 40 Oben-Fahrer und 60 Unten-Fahrer und die Fahrzeit jedes Fahrers ist $80 + 40 = 120 = 100 - 40 + 60$.

Aufgabe 2 (*13 Punkte*)

Betrachten Sie nun das Straßennetz in Abbildung 2, in dem wieder 100 Autos von Start nach Ziel fahren wollen. Die Fahrzeiten sind wieder wie angegeben; auf der Straße von Start nach B und von A nach Ziel ist die Fahrzeit x Minuten, wenn sie von x Autos befahren wird.

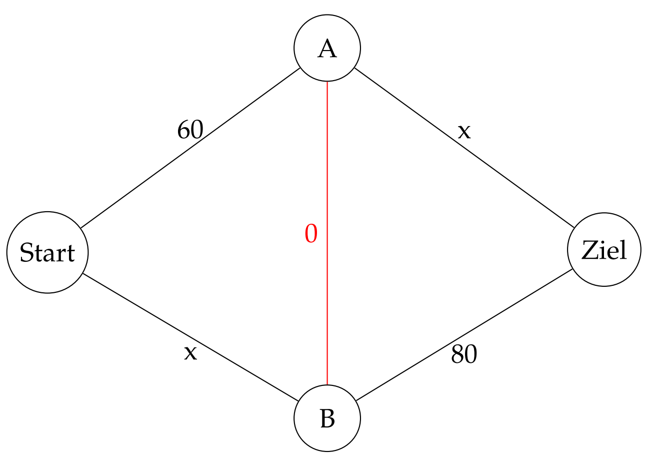

Abbildung 2: Straßennetz zu Aufgabe 2

Geben Sie bei der Beantwortung der folgenden Aufgaben stets Ihren vollständigen Rechenweg an.

a) Bevor die rote Straße gebaut wurde, gab es im Gleichgewicht, in dem jeder Fahrer seine Fahrzeit optimiert, 60 Oben-Fahrer und 40 Unten-Fahrer. Wie hoch war die Gesamtfahrzeit aller Fahrer? (*1 Punkt*)

Lösung: Jeder Fahrer hatte in diesem Gleichgewicht eine Fahrtzeit von 120. Die Gesamtfahrzeit war daher $100 \cdot 120 = 12000$.

b) Betrachten Sie nun das globale Optimum in der Situation, nachdem die Strecke A-B gebaut wurde.

(1) Wie viele Autos fahren die Strecke Start-A und wie viele die Strecke Start-B? (*2 Punkte*)

Lösung: Da die Strecke zwischen A und B nichts kostet, können wir die Fahrzeiten für die Teilabschnitte Start-A/B und A/B-Ziel getrennt minimieren. Die Gesamtfahrzeit von Start nach A und von Start nach B, wenn x Fahrer *untenherum* fahren, ist

$$f(x) = x^2 + 60(100 - x) = x^2 - 60x + 6000.$$

Sie ist minimal für $f'(x) = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 60 \overset{!}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 60 \\ &\Leftrightarrow x = 30. \end{aligned}$$

Es fahren also 30 Autos untenherum und $100 - 30 = 70$ Autos obenherum.

(2) Wie viele Autos fahren die Strecke A-Ziel und wie viele die Strecke B-Ziel? (*2 Punkte*)

Lösung: Die Gesamtfahrzeit von A nach Ziel und von B nach Ziel, wenn x Fahrer *obenherum* fahren, ist

$$f(x) = x^2 + 80(100 - x) = x^2 - 80x + 8000.$$

Sie ist minimal für $f'(x) = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 80 \overset{!}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 80 \\ &\Leftrightarrow x = 40. \end{aligned}$$

Es fahren also 40 Autos obenherum und $100 - 40 = 60$ Autos untenherum.

(3) Wie viele Autos befahren die Strecke A-B und in welche Richtung? (*0.5 Punkte*)

Lösung: Es fahren 30 Autos untenherum auf dem ersten Streckenabschnitt und 60 Autos untenherum auf dem zweiten Streckenabschnitt. Also müssen 30 Autos die Strecke A-B in der Richtung von A nach B nutzen.

(4) Wie hoch ist die Gesamtfahrzeit aller Fahrer? (*1 Punkt*)

Lösung: Die Strecke A-B kostet nichts, wir müssen also lediglich die Fahrzeiten auf den Strecken Start-A, Start-B, A-Ziel und B-Ziel betrachten und dabei die in den vorigen Aufgabenteilen bestimmten Werte für x einsetzen. Die Gesamtfahrzeit beträgt also:

$$70 \cdot 60 + 40 \cdot 40 + 30 \cdot 30 + 60 \cdot 80 = 4200 + 1600 + 900 + 4800 = 5800 + 5700 = 11500.$$

c) Betrachten Sie schließlich in der Situation, nachdem die Strecke A-B gebaut wurde, das Gleichgewicht, das sich einstellt, wenn jeder Fahrer für sich seine Fahrzeit optimiert.

(1) Wie viele Autos fahren die Strecke Start-A und wie viele die Strecke Start-B? (*2 Punkte*)

Lösung: Das Gleichgewicht stellt sich ein, wenn die Fahrzeit von Start nach A der Fahrzeit von Start nach B entspricht, d.h. $x = 60$ ist. Es fahren also 60 Autos untenherum und $100 - 60 = 40$ Autos obenherum.

(2) Wie viele Autos fahren die Strecke A-Ziel und wie viele die Strecke B-Ziel? (*2 Punkte*)

Lösung: Das Gleichgewicht stellt sich ein, wenn die Fahrzeit von A nach Ziel der Fahrzeit von B nach Ziel entspricht, d.h. $x = 80$ ist. Es fahren also 80 Autos obenherum und $100 - 80 = 20$ Autos obenherum.

(3) Wie viele Autos befahren die Strecke A-B und in welche Richtung? (*0.5 Punkte*)

Lösung: Es fahren 40 Autos obenherum auf dem ersten Streckenabschnitt und 80 Autos obenherum auf dem zweiten Streckenabschnitt. Also müssen 40 Autos die Strecke A-B in der Richtung von B nach A nutzen.

(4) Wie hoch ist die Gesamtfahrzeit aller Fahrer? (*1 Punkt*)

Lösung: Die Strecke A-B kostet nichts, wir müssen also wieder lediglich die Fahrzeiten auf den Strecken Start-A, Start-B, A-Ziel und B-Ziel betrachten und dabei die in den vorigen Aufgabenteilen bestimmten Werte für x einsetzen. Die Gesamtfahrzeit beträgt also:

$$40 \cdot 60 + 80 \cdot 80 + 60 \cdot 60 + 20 \cdot 80 = 2400 + 6400 + 3600 + 1600 = 4000 + 10000 = 14000.$$

d) Ist das Straßennetz in Abbildung 2 ein Beispiel für das Braess-Paradox? Begründen Sie Ihre Antwort. (*1 Punkt*)

Lösung: Die Fahrzeit im Gleichgewicht, in dem jeder Fahrer seine eigene Fahrzeit optimiert, beträgt 12000 vor dem Bau der Strecke A-B und 14000 danach – durch den Bau der Strecke A-B verschlechtert sich also die Situation für alle Fahrer, obwohl das Befahren der Strecke kostenlos ist. Daher ist das Straßennetz in Abbildung 2 ein Beispiel für das Braess-Paradox.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

a) In der Vorlesung haben Sie Auktionen als Mechanismen zur Verteilung von Gütern kennengelernt, bei denen Geld eingesetzt werden kann. Nennen Sie zwei Situationen (über die im folgenden Aufgabenteil genannte Situation hinaus), in denen Gütern zu verteilen sind, ohne dass Geld eingesetzt werden kann oder aus Ihrer Sicht eingesetzt werden sollte. (*2 Punkte*)

Lösung:

- Vergabe von Sozialwohnungen an Bedürftige
- Zuordnung von Organen zu Patienten
- Vergabe von Studienplätzen im Allgemeinen
- ...

b) Nehmen Sie an, dass Sie an Ihrer Universität für die Vergabe von Auslandsstudienplätzen zuständig sind. Über ein zentrales System sollen die Studierenden angeben können, an welchen Universitäten sie gerne studieren würden. Ebenso sollen die Auslandsuniversitäten angeben können, welche Studierenden sie gerne bei sich aufnehmen würden. Gehen Sie davon aus, dass für x Studenten genau x Auslandsstudienplätze zur Verfügung stehen, jede Universität genau einen Studierenden aufnehmen kann, und x mindestens dreistellig ist. Beantworten Sie zu dieser Situation die folgenden Fragen und begründen Sie jeweils Ihre Antwort:

(a) In welcher Form würden Sie die Studierenden und die Universitäten ihre Präferenzen angeben lassen? (*2 Punkte*)

Lösung: Da x mindestens dreistellig ist, ist es nicht praktikabel, die Präferenzen der Studierenden und der Universitäten komplett in Form eines Rankings abzufragen. Eine Möglichkeit wäre, beide Seiten jeweils ihre Top 10 angeben zu lassen. Eine Alternative oder mögliche Ergänzung wäre, abstrakte Präferenzäußerungen zuzulassen, die eine Teilmenge von Studierenden oder Universitäten identifizieren (z.B. "Alle Studierenden, die im Noten-Ranking ihres Jahrgangs zu den Top 10 % gehören").

(b) Nach welchen Kriterien würden Sie die Studienplatzvergabe durchführen? (*2 Punkte*)

Lösung: Das Problem, das sich hier stellt, nennt sich *bipartites Matching*. Minimale Vergabekriterien:

- Kein Studierender sollte einer Universität zugeordnet werden, die er nicht besuchen will
- Keine Universität sollte Studierende zugeordnet bekommen, die sie nicht aufnehmen will

Mögliche weitere Kriterien:

- Möglichst viele Studierende sollen eine Universität zugeordnet bekommen (*maximales* Matching)
- Studierende, die bestimmte Kriterien erfüllen, haben Priorität (z.B. Vergabe nach Noten-Ranking unter Berücksichtigung besonderer Eigenschaften oder Zusatzkenntnisse)
- Es soll kein Paar (Studierender x, Universität y) geben, sodass x y gegenüber der ihm zugeordneten Universität präferiert und y x gegenüber dem ihm zugeordneten Studierenden präferiert (*stabiles* Matching)

(c) Nach welchen Kriterien würden Sie entscheiden, welche von mehreren möglichen Zuordnungen von Studierenden zu Universitäten die beste Zuordnung ist? (*2 Punkte*)

Lösung: Man kann die Zuordnungen, welche die zuvor festgelegten Kriterien erfüllen (also z.B. alle stabilen Matchings) anhand einer globalen Nutzenfunktion vergleichen, in deren Definition die Zufriedenheit der einzelnen Studierenden und Universitäten einfließen sollte. Man könnte z.B. betrachten, auf welchem Platz im Ranking die einer Studierenden (einer Universität) zugeordnete Universität (zugeordnete Studierende) steht, die Summe all dieser Rankingplätze bilden, und unter den in Betracht kommenden Zuordnungen diejenige auswählen, die die geringste Gesamtsumme hat.

c) Wie können Sie das in der vorigen Teilaufgabe beschriebene Zuordnungsproblem als Problem auf einem Graphen modellieren und warum könnte dies zweckmäßig sein? (*2 Punkte*)

Lösung: Man kann einen Graphen mit allen Universitäten und Studierenden als Knoten definieren. Wie man die Kanten definiert, hängt davon ab, welche Zuordnung man finden will. Die Modellierung als Graph ist sinnvoll, weil man dann die Möglichkeit hat, das Zuordnungsproblem mithilfe von Graphalgorithmen zu lösen, die für eine abstrahierte Form des Problems (oder auch für ein ganz anderes Problem) gemacht sind. Beispiele: Wenn man ein maximales Matching sucht, kann man den Algorithmus von Ford und Fulkerson[1] nutzen, der dazu gemacht ist, maximale Flüsse in Graphen zu finden. Wenn man ein stabiles Matching sucht, kann man den Algorithmus von Gale und Shapley[2] einsetzen.

Ich habe für die Videos, die Nachbereitung und das Übungsblatt etwa ☐ Stunden gebraucht.

(Angelina fertigt aus diesen Zahlen eine Statistik an. Kurt und Corinna sehen nur diese Statistik. Wir möchten wissen, ob der Schwierigkeitsgrad in etwa richtig ist.)

Auktionen, Gleichgewichte, Nutzenmaximierende Agenten war spannend ☐ okay ☐ langweilig ☐
schwierig ☐ okay ☐ einfach ☐

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Ford%E2%80%93Fulkerson_algorithm`
[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Gale%E2%80%93Shapley_algorithm`