

Übungen zu Ideen der Informatik

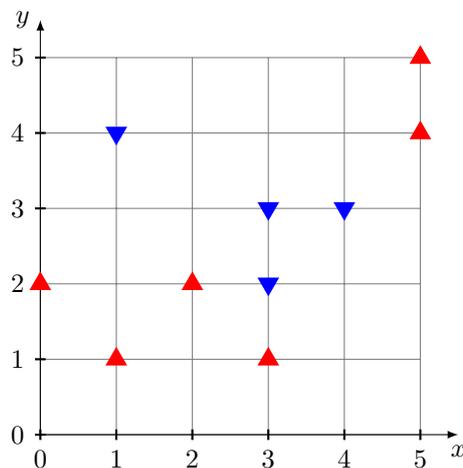
<https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter21/ideen/>

Blatt 11: Künstliche Intelligenz I

Abgabeschluss: 24.01.2022

Aufgabe 1 kNN-Klassifikation (10 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Abbildung, die Daten mit zwei numerischen Attributen als Punkte in zwei Dimensionen darstellt. Die Klassen der Datenpunkte sind Ihnen bekannt: rote Dreiecke mit Spitze nach oben gehören zu Klasse 1, blaue Dreiecke mit Spitze nach unten gehören zu Klasse 2.



Die *Manhattan-Distanz* L_1 zwischen zwei Punkten a und b mit n Dimensionen ist die Summe der absoluten Differenzen zwischen ihren jeweiligen Koordinaten: $L_1 = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$. Für zwei Punkte a und b mit jeweils zwei Dimensionen berechnet sich die Manhattan-Distanz also als $L_1 = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$.

Beantworten Sie nun die folgenden Fragen (jeweils mit Begründung oder Rechenweg):

a) Berechnen Sie die Manhattan-Distanz zwischen den folgenden Punkten. (3 Punkte)

(1) (0,2) und (1,1)

Lösung:
 $1+1=2$

(2) (3,1) und (4,3)

Lösung:
 $1+2=3$

(3) (1,4) und (5,5)

Lösung:
 $4+1=5$

b) Erklären Sie, warum die Manhattan-Distanz *Manhattan Distance*, *Cityblock Distance* oder *Taxi Cab Metric* genannt wird. (1 Punkt)

Lösung:

Die Distanz lässt sich berechnen, indem man vom Startpunkt aus für jede Dimension nacheinander zu ihren jeweiligen Zielkoordinaten läuft – so, wie man (als Fußgänger oder als Taxifahrer) in einer wie Manhattan gebauten Innenstadt sein Ziel erreicht.

- c) Klassifizieren Sie die folgenden *neuen* Punkte mit dem 1NN-Klassifikator auf Basis der Manhattan-Distanz (d.h. jeder Punkt erhält die Klasse seines nächsten Nachbarn). (2 Punkte)

(1) (3,4)

Lösung:

Der Punkt erhält Klasse 2, denn der nächste Punkt mit bekannter Klasse ist (3,3) mit Klasse 2.

(2) (5,0)

Lösung:

Der Punkt erhält Klasse 1, denn der nächste Punkt mit bekannter Klasse ist (3,1) mit Klasse 1.

- d) Welches Problem stellt sich bei der Klassifikation des Punkts (2,3), und nach welcher Regel könnten Sie dieses Problem lösen? (2 Punkte)

Lösung:

Es gibt zwei nächste Nachbarn mit unterschiedlichen Klassen. In diesem Fall könnte man z.B. die globale Klassenwahrscheinlichkeit den Ausschlag geben lassen (d.h. in diesem Fall würde der Punkt in Klasse 1 eingeordnet), man könnte zufällig (d.h. mithilfe eines – fairen oder nach den Klassenwahrscheinlichkeiten gewichteten – Münzwurfs) entscheiden, oder man könnte die Anzahl der betrachteten Nachbarn erhöhen, bis eine eindeutige Entscheidung vorliegt.

- e) Angenommen, Sie erhalten einen neuen Punkt (2,1) mit *bekannter* Klasse 2, den Sie bei der Klassifikation von Punkten mit unbekanntem Klassen mit dem 1NN-Klassifikator auf Basis der Manhattan-Distanz berücksichtigen wollen.

(1) Wie wird der Punkt (2,0) klassifiziert, wenn Sie den Punkt (2,1) nicht berücksichtigen, und wie wird er klassifiziert, wenn Sie den Punkt berücksichtigen? (1 Punkt)

Lösung:

Ohne (2,1) wird (2,0) in Klasse 1 eingeordnet, mit (2,1) in Klasse 2.

(2) Welches Problem illustriert der in der vorigen Teilaufgabe betrachtete Fall und wie ließe sich dieses lösen? (1 Punkt)

Lösung:

Der 1NN-Klassifikator ist nicht sehr robust: Ein einzelner neuer Datenpunkt mit bekannter Klasse kann genügen, um die Klassifikation vieler anderer Datenpunkte zu verändern. Um den Klassifikator robuster zu machen, kann man z.B. die Klassen der k nächsten Nachbarn für $k > 1$ (und idealerweise ungerade) bei der Klassifikation einbeziehen.

Aufgabe 2 Bayessche Regel (10 Punkte)

2 % der Bevölkerung sind mit einem Virus infiziert.

X-Tests dienen dem Nachweis dieses Virus.

5 % der Infizierten haben einen fälschlicherweise negativen Test.

2 % der Nicht-Infizierten haben einen fälschlicherweise positiven Test.

Geben Sie bei der Bearbeitung der folgenden Aufgabenteile jeweils Ihren vollständigen Rechenweg an.

- a) Nehmen Sie an, Sie lassen sich testen und erhalten ein *positives* Testergebnis. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie infiziert sind? (5 Punkte)

Lösung:

Wir arbeiten mit folgenden Variablen (und ihren Verneinungen):

- I : Infiziert

- T : Test positiv

Mit Bayes:

$$P(I | T) = \frac{P(T | I)P(I)}{P(T)} = \frac{P(T | I)P(I)}{P(T | I)P(I) + P(T | \neg I)P(\neg I)}$$

Einsetzen:

$$P(I | T) = \frac{0.95 \cdot 0.02}{0.95 \cdot 0.02 + 0.02 \cdot 0.98} = \frac{0.019}{0.019 + 0.0196} = \frac{0.019}{0.0386} \approx 0.492$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Sie bei einem positiven Test infiziert sind, beträgt also circa 49 %.

- b) Nehmen Sie an, Sie lassen sich testen und erhalten ein *negatives* Testergebnis.
Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie infiziert sind? (5 Punkte)

Lösung:

Mit Bayes und unter Verwendung der Ergebnisse aus dem vorigen Aufgabenteil:

$$P(I) = P(I | T)P(T) + P(I | \neg T)P(\neg T) \Leftrightarrow P(I | \neg T) = \frac{P(I) - P(I | T)P(T)}{1 - P(T)}$$

Einsetzen:

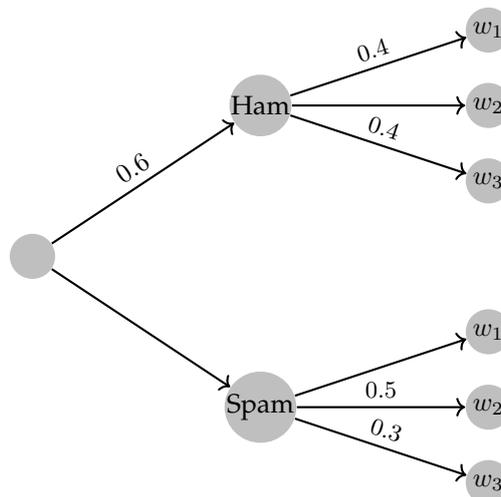
$$P(I | \neg T) = \frac{0.02 - 0.49 \cdot 0.0386}{1 - 0.0386} \approx 0.001$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Sie bei einem negativen Test infiziert sind, beträgt also circa 0.1 %.

Auf dasselbe Ergebnis kommen Sie auch, wenn Sie die Bayessche Formel für $P(I | \neg T)$ aufstellen und wie im vorigen Aufgabenteil einsetzen.

Aufgabe 3 Spam (10 Punkte)

Wir benutzen einen Bayes-Filter zur Klassifikation von Emails. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass Emails immer nur aus einem Wort bestehen und zwar aus einem der drei Worte w_1 , w_2 und w_3 . Das generative Modell ist wie in folgender Abbildung.



Der Filter erklärt eine Email, die aus dem Wort w_i besteht, zu Spam, wenn die Spam-Wahrscheinlichkeit, gegeben w_i , mindestens 0.5 beträgt:

$$p(\text{Spam} | w_i) \geq 0.5.$$

Beantworten Sie zu diesem Szenario die folgenden Fragen und geben Sie dabei stets Ihren vollständigen Rechenweg an.

a) Ergänzen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten im oben angegebenen Modell. (3 Punkte)

Lösung:

Root → Spam: 0.4; Ham → w_2 : 0.2; Spam → w_1 0.2.

b) Geben Sie für w_1 , w_2 und w_3 jeweils an, ob diese zu Spam erklärt werden. (3 Punkte)

Lösung:

Allgemein können wir rechnen:

$$p(\text{Spam} | w_i) = \frac{p(w_i | \text{Spam}) \cdot p(\text{Spam})}{p(w_i)} = \frac{p(w_i | \text{Spam}) \cdot p(\text{Spam})}{p(w_i | \text{Spam})p(\text{Spam}) + p(w_i | \text{Ham})p(\text{Ham})}$$

Durch Einsetzen der im Baum annotierten Zahlen erhalten wir dann:

$$p(\text{Spam} | w_1) = \frac{0.2 \cdot 0.4}{p(w_1)} = \frac{0.2 \cdot 0.4}{0.2 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.6} = \frac{1}{4} \rightarrow \text{Ham}$$

$$p(\text{Spam} | w_2) = \frac{0.5 \cdot 0.4}{p(w_2)} = \frac{0.5 \cdot 0.4}{0.5 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.6} = \frac{0.2}{0.32} = \frac{5}{8} \rightarrow \text{Spam}$$

$$p(\text{Spam} | w_3) = \frac{0.3 \cdot 0.4}{p(w_3)} = \frac{0.3 \cdot 0.4}{0.3 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.6} = \frac{1}{3} \rightarrow \text{Ham}$$

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Ham-Email als Spam klassifiziert?
(2 Punkte)

Lösung:

0.2, da eine Ham-Email, die aus w_2 besteht, als Spam klassifiziert wird.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Spam-Email als Ham klassifiziert?
(2 Punkte)

Lösung:

0.2+0.3, da eine Spam-Email, die entweder aus w_1 oder aus w_3 besteht, als Ham klassifiziert wird.

Ich habe für die Videos, die Nachbereitung und das Übungsblatt etwa Stunden gebraucht.
(Ann-Sophie fertigt aus diesen Zahlen eine Statistik an. Kurt und Corinna sehen nur diese Statistik. Wir möchten wissen, ob der Schwierigkeitsgrad in etwa richtig ist.)

Künstliche Intelligenz I war spannend okay langweilig
schwierig okay einfach