Universität
des
Saarlandes
FR Informatik

Kurt Mehlhorn und Corinna Coupette **WiSe 2021/22**

Übungen zu Ideen der Informatik

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter21/ideen/

Blatt 8 Abgabeschluss: 3. 1. 2021

Aufgabe 1 (*7 Punkte*)

Wir möchten einen Speiseplan für zwei Mahlzeiten zusammenstellen. Insgesamt haben wir vier Essen zur Auswahl. Essen A ist vegetarisch und hat 2000 Kalorien, Essen B ist nicht-vegetarisch und hat 1000 Kalorien, Essen C ist nicht-vegetarisch und hat 1500 Kalorien, und Essen D ist vegetarisch und hat 500 Kalorien. Wir benutzen die Variablen a, b, c, und d für die Häufigkeit der vier Essen. Dann besagt z.B. $a = d = 1$ und $b = c = 0$, dass einmal Essen A und einmal Essen D gegessen wird.

Beantworten Sie die folgenden Fragen und schreiben Sie Ihre Antworten auf in der Form

$$ZahlBuchstabe; ZahlBuchstabe; \ldots$$

1) Was besagt die Gleichung $a + b + c + d = 2$?
   a) Wir brauchen genau drei Essen.
   b) Wir brauchen genau zwei Essen.
2) Was besagt die Ungleichung $a + d \geq 1$?
   a) Mindestens ein Essen muss nicht-vegetarisch sein.
   b) Mindestens ein Essen muss vegetarisch sein.
3) Was besagt die Aussage a, b, c, d sind natürliche Zahlen?
   a) Man kann auch Bruchteile eines Essens, also z.B. halbe Essen benutzen.
   b) Man kann nicht den Bruchteil eines Essens, also nur ganze Essen benutzen.
4) Was besagt die Gleichung $a = 1$?
   a) Das Essen A wird genau einmal gewählt.
   b) Das Essen A wird nie gewählt.
5) Was besagt die Ungleichung $2000a + 1000b + 1500c + 500d \leq 3000$?
   a) Insgesamt wollen wir höchstens 3000 Kalorien zu uns nehmen.
   b) Insgesamt wollen wir mindestens 3000 Kalorien zu uns nehmen.
6) Welche Festlegung erfüllt alle obigen Bedingungen?
   a) $a = c = 1$ und $b = d = 0$
   b) $a = d = 1$ und $b = c = 0$

Lösung: 1b; 2b; 3b; 4a; 5a; 6b

Aufgabe 2 (*5 Punkte*)

Für einen ausgewogenen Lerneffekt muss ein Student sowohl Aufgaben vom Typ M als auch Aufgaben vom Typ A bearbeiten. Ein Student braucht 2 Stunden, um eine Aufgabe vom Typ M zu lösen und 6 Stunden für eine Aufgabe von Typ A. Es gibt drei Tutoren für die Vorlesung.

- Der erste Tutor glaubt, dass man 4 Stunden für Aufgaben vom Typ M und 5 Stunden für Aufgaben vom Typ A braucht und dass Studenten nicht mehr als 15 Stunden am Zettel sitzen dürfen.
- Der zweite Tutor glaubt, M Aufgaben löst man in 3 Stunden und A Aufgaben löst man in 1 Stunde. Er denkt, dass Studenten mindestens 4 Stunden arbeiten sollten.
- Der letzte Tutor findet man braucht 2 Stunden für M Aufgaben und 7 Stunden für A Aufgaben. Er sagt, man muss mindestens 12 Stunden am Zettel arbeiten.

Der findige Student löst gerade so viele Aufgaben vom Typ M und A, dass er mit möglichst wenig Zeitaufwand alle Tutoren zufriedenstellt.

Stellen Sie die oben angegebenen Informationen als Ungleichungssystem dar. Führen Sie dazu zwei Variablen x und y ein für die Anzahlen der M bzw A Aufgaben, die der Student löst. Geben Sie auch die Kostenfunktion an. Die Kostenfunktion gibt den Arbeitsaufwand des Studenten an in Abhängigkeit von der Anzahlen x und y der gelösten Aufgaben.

Nehmen Sie zunächst an, dass man Aufgaben auch teilweise lösen kann. Wenn man eine Aufgabe nur zur Hälfte löst, braucht man auch nur die halbe Zeit (analog für andere Bruchteile). Welche zusätzlichen Anforderungen müssen Sie an die Variablen stellen, wenn man Aufgaben nur ganz oder gar nicht lösen kann?

Lösung: Wir haben die folgenden Gleichungen und Ungleichungen.

- Arbeitsaufwand des Studenten $= 2x + 6y$. Den gilt es zu minimieren.
- Erster Tutor: $4x + 5y \leq 15$.
- Zweiter Tutor: $3x + y \geq 4$.
- Dritter Tutor: $2x + 7y \geq 12$.

Negative Werte für die Variablen geben keinen Sinn. Also kommt noch $0 \leq x$ und $0 \leq y$ dazu.

Wenn man Aufgaben nur ganz oder gar nicht lösen kann, kommen die Bedingungen $x \in \mathbf{N}_0$ und $y \in \mathbf{N}_0$ dazu. Hier ist $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null.

Aufgabe 3 (*12 Punkte*)

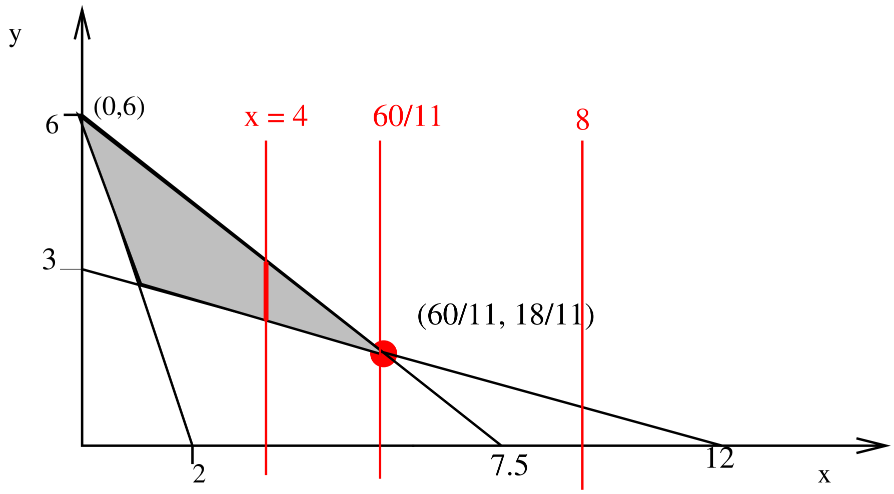
Betrachten sie das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & x \\ \text{wobei} \quad & 4x + 5y \leq 30 \\ & 3x + y \geq 6 \\ & 2x + 8y \geq 24. \end{aligned}$$

a) (*5 Punkte*) Zeichnen Sie die Ungleichungen in dem Bereich $x \in [0; 12]$, $y \in [0; 6]$ und bestimmen Sie die Menge der Punkte, die alle Ungleichungen erfüllt. Man nennt diese Region das zulässige Gebiet.

Hinweis: Machen Sie die Zeichnung am besten auf einem karierten Papier. Das hilft für den Teil b).

b) (*3 Punkte*) Zeichnen Sie die Geraden $x = 4$, $x = 60/11$ und $x = 8$ ein. Geben Sie jeweils den Durchschnitt mit dem zulässigen Gebiet an. Eine der Geraden schneidet das zulässige Gebiet nicht, eine geht durch eine Ecke des Gebiets, eine schneidet das zulässige Gebiet in vielen Punkten. Was bedeutet das?



Lösung:

Die Zeichnung ist *nicht* maßstabsgerecht.

Die Punkte in der dunklen Region erfüllen alle Ungleichungen. Die Region ist ein Dreieck mit den Ecken $(0, 6)$, $(12/11, 30/11)$ und $(60/11, 18.11)$. Die Geraden $x = 4(60/11, 8)$ sind in rot eingezeichnet.

Die Gerade $x = 8$ schneidet das zulässige Gebiet nicht. Also gibt es keine zulässige Kombination von x und y mit $x = 8$.

Die Gerade $x = 4$ schneidet das zulässige Gebiet in einem Geradensegment (dicker roter Strich). Jeder Punkt auf diesem Geradensegment ist zulässig und hat den Zielfunktionswert 4.

Die Gerade $x = 60/11$ geht durch eine Ecke des zulässigen Gebiets (roter Punkt). Es gibt also einen zulässigen Punkt mit dem Wert $60/11$. Alle anderen zulässigen Punkte liegen links der Geraden $x = 60/11$ und haben daher einen kleineren Zielfunktionswert. Also ist die Ecke $(60/11, 18/11)$ die optimale Lösung.

c) (*4 Punkte*) Nutzen Sie Ihre Zeichnung, um die optimale Lösung zu finden. Wir interessieren uns für zwei Arten von Lösungen.

(a) x und y sind beliebige Dezimalzahlen.

(b) x und y müssen ganzzahlig sein. Bestimmen Sie dazu zunächst alle zulässigen Punkte, bei denen x und y-Koordinate ganzzahlig sind.

Lösung: Wenn x und y beliebig sein dürfen, dann ist die optimale Lösung eine Ecke. Die Ecken haben die Koordinaten $(0, 6)$ mit Zielfunktionswert 0, $(12/11, 30/11)$ mit Wert $12/11$ und $(60/11, 18/11)$ mit Wert $60/11$. Also ist letztere Ecke optimal.

Warum ist das Optimum in einer Ecke? Betrachten Sie die Geradenschar $x = c$ für verschiedene Werte von c. Wenn die Gerade $x = c$ für einen bestimmten Wert von c das zulässige Gebiet schneidet, dann gibt es eine Lösung mit dem Arbeitsaufwand c. Wir müssen also das größte c finden, für das die Gerade das zulässige Gebiet noch schneidet. Für dieses c wird die Gerade das Gebiet nur noch in einer Ecke des Gebiets schneiden.

Eine Hörerin hat anschaulicher argumentiert. Sei (x, y) ein zulässiger Punkt. Wir lassen den Punkt nach rechts wandern, bis wir auf eine Kante stoßen. Dabei wird die Zielfunktion größer und wir stoßen an die Gerade $4x + 5y = 30$. Wir bewegen uns auf der Kante weiter nach rechts (und dabei gleichzeitig nach unten) bis wir die Ecke $(60/11, 18/11)$ erreichen.

Die ganzzahligen zulässigen Punkte (= Punkte im zulässigen Gebiet mit ganzzahligen Koordinaten) sind $(0, 6)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, und $(5, 2)$. Also ist $x = 5$ das Optimum.

Aufgabe 4 (*5 Punkte*)

Benutzen Sie das Fourier-Motzkin-Verfahren, um zu entscheiden, ob es für die Aufgabe 3 eine Lösung gibt, bei dem der Wert der zur minimierenden Funktion größer gleich 4 ist. Im Übungsblatt stand Aufgabe 2 statt Aufgabe 3. KM hat die Lösung dafür in der Übung vorgerechnet. Leider braucht es für die Lösung ziemlich viel Rechnerei. Aufgabe 3 ist einfacher.

Hier sind nochmals die Ungleichungen: $4x + 5y \le 30$, $3x + y \ge 6$, $2x + 8y \ge 24$.

Lösung: Wir fragen uns, ob das Ungleichungssystem $4x + 5y \le 30$, $3x + y \ge 6$, $2x + 8y \ge 24$, $x \ge 4$ eine Lösung hat.

Wir lösen die Ungleichungen nach y auf und erhalten $y \le 6 - 4x/5$, $y \ge 6 - 3x$, $y \ge 3 - x/4$, $x \ge 4$. Durch kombinieren erhalten wir drei Ungleichungen für x:

$$6 - 3x \le 6 - 4x/5 \quad 3 - x/4 \le 6 - 4x/5 \quad x \ge 4.$$

Vereinfachen ergibt

$$x \ge 0 \quad 4x/5 - x/4 \le 3 \quad x \ge 4,$$

und dann weiter

$$x \ge 0 \quad 11/20x \le 3 \quad x \ge 4.$$

Das ist erfüllt für jedes x mit $4 \le x \le 60/11$. Nehmen wir etwa $x = 4$. Dann erhalten wir für y die Ungleichungen

$$y \le 14/5 \quad y \ge -6 \quad y \ge 2.$$

Wir können jeden Wert für y wählen mit $2 \le y \le 14/5$.

Aufgabe 5 (*10 Punkte*)

Stabile Paarungen

Wir betrachten folgendes Szenario. Es gibt n Firmen f_1 bis f_n und n Arbeiter m_1 bis m_n. Jede Firma hat eine Präferenzordnung der potentiellen Mitarbeiter und jeder Arbeiter eine Präferenzordnung der Firmen. In folgendem Beispiel ist $n = 3$ und die Firma f_1 hat die Arbeiter in der Reihenfolge m_1, m_3, m_2 geordnet.

$$\begin{array}{cccc}
f_1: & m_1 & m_3 & m_2 \\
f_2: & m_1 & m_2 & m_3 \\
f_3: & m_2 & m_3 & m_1 \\
m_1: & f_2 & f_3 & f_1 \\
m_2: & f_3 & f_2 & f_1 \\
m_3: & f_2 & f_1 & f_3
\end{array}$$

Wir wollen die Firmen und die Arbeiter paaren, d.h., n Paare aus je einem Arbeiter und einer Firma bilden, so dass keine Firma und kein Arbeiter in zwei Paaren vorkommt. Wir könnten in unserem Beispiel etwa die Firma f_1 mit dem Arbeiter m_1, die Firma f_2 mit dem Arbeiter m_2 und die Firma f_3 mit dem Arbeiter m_3 paaren. Wir benutzen den Buchstaben M, um Paarungen (engl: matching) zu bezeichnen.

Ein Paar (f, m) heißt *destabilisierend* bezüglich einer Paarung M, wenn es **nicht** zu M gehört und f den Arbeiter m seinem Mitarbeiter in M vorzieht und m die Firma f seinem Arbeitgeber in M vorzieht. In unserem Beispiel ist das Paar (f_2, m_1) destabilisierend, denn f_2 ist in M mit m_2 gepaart aber zieht m_1 vor, und m_1 ist in M mit f_1 gepaart aber zieht f_2 vor. Eine Paarung heißt *stabil*, wenn es kein destabilisierendes Paar bezüglich der Paarung gibt. Die Paarung im Beispiel ist nicht stabil.

a) Ist die Paarung (f_2, m_1), (f_1, m_2), (f_3, m_3) stabil?

b) Geben Sie eine stabile Paarung an.

c) Kann es eine stabile Paarung geben, in der f_1 und m_2 gepaart sind? Hinweis: Nehmen Sie an, dass es eine solche Paarung gibt. Dann ist m_3 entweder mit f_2 oder mit f_3 gepaart. Geben Sie jeweils ein destabilisierendes Paar an.

d) Der folgende Algorithmus bestimmt eine stabile Paarung. Er arbeitet in Runden. Wir starten mit der leeren Paarung. Zu Beginn einer Runde haben wir eine gewisse Paarung M.

   1) Jeder Arbeiter, der in M keine Firma hat, bewirbt sich bei der obersten Firma auf seiner Liste, von der er nicht schon in der Vergangenheit abgewiesen wurde.
   2) Jede Firma, wählt unter den neuen Bewerbern und dem eventuellen Mitarbeiter in M den besten aus. Alle anderen weist sie zurück. Die resultierende Paarung ist das neue M.

   Der Algorithmus endet, sobald alle Teilnehmer gepaart sind oder ein Mitarbeiter seine Liste ganz abgearbeitet hat und immer noch keine Anstellung hat. Das letztere kann nicht passieren, wie wir weiter unten zeigen werden.

   Führen sie den Algorithmus an unserem Beispiel aus.

e) Zeigen Sie: Falls eine Firma in einer Runde eine Bewerbung bekommt, dann hat sie in allen weiteren Runden einen Mitarbeiter. Ferner werden die Mitarbeiter nach Meinung der Firma immer besser.

f) Zeigen Sie: Der Status von Arbeitern kann zwischen angestellt und nicht-angestellt hin- und herwechseln. Die Firmen werden in der Meinung der Arbeiter immer schlechter.

g) Zeigen Sie: Der Algorithmus endet mit einer vollständigen Paarung. Hinweis: Falls das nicht so ist, dann muss es am Schluss eine Firma f und einen Arbeiter m geben, so dass f keinen Mitarbeiter hat und m keine Arbeit. Dann hat m bei allen Firmen nachgefragt, also auch bei f, und ist immer letztendlich abgewiesen worden. Nun benutzen Sie e).

h) Versuchen Sie zu argumentieren, dass der Algorithmus eine stabile Paarung findet.

Der Algorithmus hat eine weitere interessante Eigenschaft. Es gibt in der Regel viele stabile Paarungen. Der Algorithmus bestimmt die Paarung M, die für alle Arbeiter optimal ist in folgendem sehr starken Sinn. Es gibt keine stabile Paarung M', in der irgendein Arbeiter eine bessere Firma hat als in M.

Lösung:

a) Nein. Das Paar (f_3, m_2) ist destabilisierend. f_3 bevorzugt m_2 über m_3 und m_2 bevorzugt f_3 über f_1.

b) (f_1, m_3), (f_2, m_1), (f_3, m_2) ist eine stabile Paarung.

c) Es gibt keine stabile Paarung, in der f_1 und m_2 gepaart sind. Nehmen wir an, es gäbe eine solche Paarung. Betrachte f_2. Wenn f_2 mit m_3 gepaart ist, dann ist (f_2, m_2) ein destabilisierendes Paar. Also muss f_2 mit m_1 gepaart sein. Dann ist das dritte Paar (f_3, m_3). Aber dann ist (f_1, m_3) destabilisierend.

d) Hier sind nochmals die Listen der Präferenzen.

$$\begin{array}{llll} f_1: & m_1 & m_3 & m_2 \\ f_2: & m_1 & m_2 & m_3 \\ f_3: & m_2 & m_3 & m_1 \\ m_1: & f_2 & f_3 & f_1 \\ m_2: & f_3 & f_2 & f_1 \\ m_3: & f_2 & f_1 & f_3 \end{array}$$

   In Runde 1 bekommt f_2 Bewerbungen von m_1 und m_3 und f_3 bekommt eine Bewerbung von m_2. f_2 behält m_1 und weist m_3 ab. Damit sind m_1 und m_2 gepaart und m_3 ist nicht beschäftigt. In der zweiten Runde bewirbt sich m_3 bei f_1. f_1 akzeptiert mangels Alternativen. Der Algorithmus hält mit der Paarung (f_1, m_3), (f_2, m_1) und (f_3, m_2).

e) Eine Firma weist eine Bewerbung nur dann zurück, wenn Sie eine bessere Alternative hat.

f) Ein Mitarbeiter kann von seiner augenblicklichen Firma wieder gelöst werden, wenn die Firma eine bessere Bewerbung bekommt. Wenn ein Mitarbeiter zurückgewiesen wird, dann wendet er sich auf die nächste Firma auf seiner Liste. Nach seiner Meinung werden die potentiellen Firmen also immer schlechter.

g) Falls die Paarung am Schluss unvollständig ist, dann muss es eine Firma f geben, die noch keine Mitarbeiter hat und daher nie ein Angebot bekommen hat, und es muss einen Mitarbeiter m geben, der nicht beschäftigt ist und seine Liste erschöpft hat; f steht aber auch auf der Liste von m und daher hat m ein Angebot an f gemacht. Widerspruch.

h) Nehmen wir an der Algorithmus endet mit einer Paarung M und (f, m) ein Paar, das nicht zu M gehört. Sei m' der Mitarbeiter von f in M und sei f' die Firma von m in M. Wenn m die Firma f' der Firma f vorzieht, ist das Paar nicht stabilisierend. Nehmen wir also an, dass m die Firma f vorzieht. Da er in M mit f gepaart ist und f' vorzieht, hat er sich irgendwann bei f beworben und wurde dann entweder sofort oder später von f für einen besseren Mitarbeiter zurückgewiesen. Da für Firmen die Partner im Laufe des Algorithmus immer besser werden, zieht f den Arbeiter m' dem Arbeiter m vor. Das Paar ist also nicht destabilisierend.

Ich habe für die Videos, die Nachbereitung und das Übungsblatt etwa ☐ Stunden gebraucht.

(Ann-Sophie fertigt aus diesen Zahlen eine Statistik an. Kurt und Corinna sehen nur diese Statistik. Wir möchten wissen, ob der Schwierigkeitsgrad in etwa richtig ist.)

Optimierung war spannend ☐ okay ☐ langweilig ☐
schwierig ☐ okay ☐ einfach ☐