Universität
des
Saarlandes
FR Informatik

Kurt Mehlhorn und Corinna Coupette **WiSe 2021/22**

Übungen zu Ideen der Informatik

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter21/ideen/

Blatt 9 Abgabeschluss: 10.01.2022

Aufgabe 1 (*8 Punkte*) Betrachten Sie das Straßennetz in Abbildung 1, in dem 100 Autos von Start nach Ziel fahren wollen. Die Fahrzeiten sind wie angegeben; auf der Straße von Start nach B und von A nach Ziel ist die Fahrzeit z Minuten, wenn sie von z Autos befahren wird.

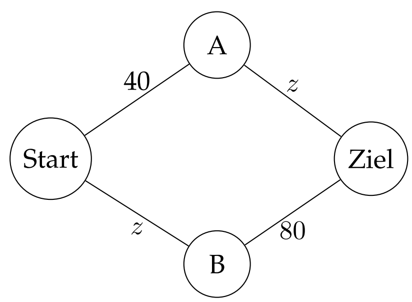


Abbildung 1: Straßennetz zu Aufgabe 1

Geben Sie bei der Beantwortung der folgenden Aufgaben stets Ihren vollständigen Rechenweg an.

a) Nehmen Sie an, dass x Fahrer obenherum fahren (Oben-Fahrer) und y Fahrer untenherum fahren (Unten-Fahrer). Dann ist natürlich $x + y = 100$. Geben Sie die Fahrzeit eines Oben-Fahrers als Funktion von x und die Fahrzeit eines Unten-Fahrers zuächst als Funktion von y und dann als Funktion von x an. (*2 Punkte*)

   Lösung: Oben: $g(x) = x + 40$; unten: $h(y) = y + 80$ und $t(x) = 100 - x + 80 = 180 - x$.

b) Geben Sie die Gesamtfahrzeit aller Fahrer als Funktion von x an. (*1 Punkt*)

   Lösung:

$$\begin{aligned} f(x) &= x(40 + x) + (100 - x)(180 - x) \\ &= x^2 + 40x + 18000 - 100x - 180x + x^2 \\ &= 2x^2 + 40x - 280x + 18000 \\ &= 2x^2 - 240x + 18000 \end{aligned}$$

c) Was ist das globale Optimum, für welchen Wert von x wird die Gesamtfahrzeit aller Fahrer minimiert, und wie viele Fahrer müssen obenherum bzw. untenherum fahren, damit die Gesamtfahrzeit aller Fahrer minimiert wird? (*2 Punkte*)

   Erinnerung: Wenn eine Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 ein Minimum hat, dann ist x_0 eine Nullstelle der Ableitung von f, d.h., $f'(x_0) = 0$. Die Ableitung einer Funktion berechnet man nach folgenden Regeln. Für

$f(x) = g(x) + h(x)$ ist $f'(x) = g'(x) + h'(x)$ und für eine Funktion $f(x) = ax^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ ist $f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$. Die Bedingung "Nullstelle der Ableitung" ist im allgemeinen nur eine notwendige aber keine hinreichende Bedingung für ein Minimum. Da f in unserem Fall eine quadratische Funktion ist, ist die Bedingung auch hinreichend.

Lösung: Das Minimum wird erreicht, wenn $f'(x) = 0$ ist.

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 4x - 240 &\overset{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow 4x &= 240 \\
\Leftrightarrow x &= 60
\end{aligned}
$$

Es muss also 60 Oben-Fahrer und 40 Unten-Fahrer geben. Die Gesamtfahrzeit ist dann

$$60 \cdot (60 + 40) + 40 \cdot (40 + 80) = 6000 + 4800 = 10800$$

Diese Gesamtfahrzeit ist die bestmögliche (das soziale Optimum).

Im Optimum gibt es 60 Oben-Fahrer mit Fahrzeit 100 Minuten und 40 Unten-Fahrer mit Fahrzeit 120 Minuten. Die Lösung ist also *nicht fair*. Die Unten-Fahrer bringen ein Opfer für das Gemeinwohl. Fairness kann man erreichen, indem man jeden Tag eine zufällige Teilmenge von 40 Fahrern unten fahren lässt. Dann fährt man im Mittel 108 Minuten.

Vielleicht streubt sich ihre Intution gegen diese Lösung und glaube, dass die Gesamtfahrzeit sich verbessert, wenn ein Fahrer von unten nach oben wechselt. Der Effekt ist wie folgt.

Anzahl der Fahrer	alte Fahrzeit	neue Fahrzeit	Gesamtänderung
60	100	101	60
1	120	101	- 19
40	120	119	- 39
			+ 2

Die Gesamtfahrzeit steigt um 2 Minuten.

d) Wie viele Fahrer sind Oben-Fahrer und wie viele Fahrer sind Unten-Fahrer, wenn jeder einzelne Fahrer seine Fahrzeit optimiert und sich ein Gleichgewicht eingestellt hat? Welche Fahrzeit hat ein Fahrer in diesem Gleichgewicht? Wie ist die Gesamtfahrzeit im Gleichgewicht? (*2 Punkte*)

Lösung: Im Gleichgewicht, in dem jeder einzelne Fahrer seine Fahrzeit optimiert, ist die Fahrzeit obenherum gleich der Fahrzeit untenherum. Also:

$$40 + x = 180 - x \Leftrightarrow 2x = 140 \Leftrightarrow x = 70$$

Es gibt also 70 Oben-Fahrer und 30 Unten-Fahrer und die Fahrzeit jedes Fahrers ist $70 + 40 = 110 = 30 + 80$.

Die Gesamtfahrzeit ist 11000.

e) Was ist der Preis der Anarchie? (*1 Punkt*)

Lösung:

$$\text{Preis der Anarchie} = \frac{\text{Gesamtkosten im Gleichgewicht}}{\text{Optimale Gesamtkosten}} = \frac{11000}{10800} = \frac{110}{108} \approx 1,019.$$

Aufgabe 2 (*12 Punkte*)

Betrachten Sie nun das Straßennetz in Abbildung 2, in dem wieder 100 Autos von Start nach Ziel fahren wollen. Die Fahrzeiten sind wieder wie angegeben; auf der Straße von Start nach B und von A nach Ziel ist die Fahrzeit z Minuten, wenn sie von z Autos befahren wird. Die Straße zwischen A und B ist neu. Sie kann in beide Richtungen befahren werden und die Fahrzeit ist Null.

Geben Sie bei der Beantwortung der folgenden Aufgaben stets Ihren vollständigen Rechenweg an.

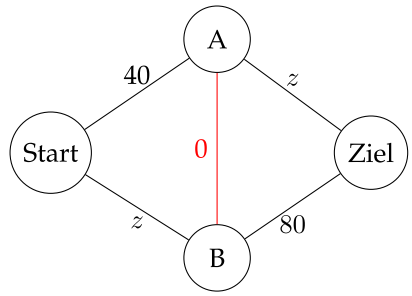


Abbildung 2: Straßennetz zu Aufgabe 2

a) Betrachten Sie nun das globale Optimum in der Situation, nachdem die Strecke A-B gebaut wurde.

(1) Wie viele Autos fahren die Strecke Start-A und wie viele die Strecke Start-B? (*2 Punkte*)

Lösung: Da die Strecke zwischen A und B nichts kostet, können wir die Fahrzeiten für die Teilabschnitte Start-A/B und A/B-Ziel getrennt minimieren. Die Gesamtfahrzeit von Start nach A und von Start nach B, wenn x Fahrer *untenherum* fahren, ist

$$f(x) = x^2 + 40(100 - x) = x^2 - 40x + 4000.$$

Sie ist minimal für $f'(x) = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 40 \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 40 \\ &\Leftrightarrow x = 20. \end{aligned}$$

Es fahren also 20 Autos untenherum und $100 - 20 = 80$ Autos obenherum.

(2) Wie viele Autos fahren die Strecke A-Ziel und wie viele die Strecke B-Ziel? (*2 Punkte*)

Lösung: Die Gesamtfahrzeit von A nach Ziel und von B nach Ziel, wenn x Fahrer *obenherum* fahren, ist

$$f(x) = x^2 + 80(100 - x) = x^2 - 80x + 8000.$$

Sie ist minimal für $f'(x) = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 80 \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 80 \\ &\Leftrightarrow x = 40. \end{aligned}$$

Es fahren also 40 Autos obenherum und $100 - 40 = 60$ Autos untenherum.

(3) Wie viele Autos befahren die Strecke A-B und in welche Richtung? (*0.5 Punkte*)

Lösung: Es fahren 20 Autos untenherum auf dem ersten Streckenabschnitt und 60 Autos untenherum auf dem zweiten Streckenabschnitt. Also müssen 40 Autos die Strecke A-B in der Richtung von A nach B nutzen.

(4) Wie hoch ist die Gesamtfahrzeit aller Fahrer? (*1 Punkt*)

Lösung: Die Strecke A-B kostet nichts, wir müssen also lediglich die Fahrzeiten auf den Strecken Start-A, Start-B, A-Ziel und B-Ziel betrachten und dabei die in den vorigen Aufgabenteilen bestimmten Werte für x einsetzen. Die Gesamtfahrzeit beträgt also:

$$(x^2 - 40x + 4000)|_{x=20} + (x^2 - 80x + 8000)|_{x=40} = 400 - 800 + 4000 + 1600 - 3200 + 8000 = 10000.$$

b) Betrachten Sie schließlich in der Situation, nachdem die Strecke A-B gebaut wurde, das Gleichgewicht, das sich einstellt, wenn jeder Fahrer für sich seine Fahrzeit optimiert.

(1) Wie viele Autos fahren die Strecke Start-A und wie viele die Strecke Start-B? (*2 Punkte*)

Lösung: Sei x die Anzahl der Fahrer, die untenherum fahren. Das Gleichgewicht stellt sich ein, wenn die Fahrzeit von Start nach A der Fahrzeit von Start nach B entspricht, d.h. $x = 40$ ist. Es fahren also 40 Autos untenherum und $100 - 40 = 60$ Autos obenherum.

(2) Wie viele Autos fahren die Strecke A-Ziel und wie viele die Strecke B-Ziel? (*2 Punkte*)

Lösung: Das Gleichgewicht stellt sich ein, wenn die Fahrzeit von A nach Ziel der Fahrzeit von B nach Ziel entspricht, d.h. $x = 80$ ist. Es fahren also 80 Autos untenherum und $100 - 80 = 20$ Autos obenherum.

(3) Wie viele Autos befahren die Strecke A-B und in welche Richtung? (*0.5 Punkte*)

Lösung: Es fahren 60 Autos obenherum auf dem ersten Streckenabschnitt und 80 Autos obenherum auf dem zweiten Streckenabschnitt. Also müssen 20 Autos die Strecke A-B in der Richtung von B nach A nutzen.

(4) Wie hoch ist die Gesamtfahrzeit aller Fahrer? (*1 Punkt*)

Lösung: Die Strecke A-B kostet nichts, wir müssen also wieder lediglich die Fahrzeiten auf den Strecken Start-A, Start-B, A-Ziel und B-Ziel betrachten und dabei die in den vorigen Aufgabenteilen bestimmten Werte für x einsetzen. Für das linke Teilnetzwerk braucht jeder Fahrer 40 und für das rechte Teilnetzwerk 80 Minuten. Die Fahrzeit ist damit 120 Minuten für jeden Fahrer. Die Gesamtfahrzeit ist 12000.

c) Ist das Straßennetz in Abbildung 2 ein Beispiel für das Braess-Paradox? Begründen Sie Ihre Antwort. (*1 Punkt*)

Lösung: Die Fahrzeit im Gleichgewicht, in dem jeder Fahrer seine eigene Fahrzeit optimiert, beträgt 11000 vor dem Bau der Strecke A-B und 12000 danach – durch den Bau der Strecke A-B verschlechtert sich also die Situation für alle Fahrer, obwohl das Befahren der Strecke kostenlos ist. Daher ist das Straßennetz in Abbildung 2 ein Beispiel für das Braess-Paradox.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

a) In der Vorlesung haben Sie Auktionen als Mechanismen zur Verteilung von Gütern kennengelernt, bei denen Geld eingesetzt werden kann. Nennen Sie zwei Situationen (über die im folgenden Aufgabenteil genannte Situation hinaus), in denen Gütern zu verteilen sind, ohne dass Geld eingesetzt werden kann oder aus Ihrer Sicht eingesetzt werden sollte. (*2 Punkte*)

Lösung:

- Vergabe von Sozialwohnungen an Bedürftige
- Zuordnung von Organen zu Patienten
- Vergabe von Studienplätzen im Allgemeinen
- ...

b) Nehmen Sie an, dass Sie an Ihrer Universität für die Vergabe von Auslandsstudienplätzen zuständig sind. Über ein zentrales System sollen die Studierenden angeben können, an welchen Universitäten sie gerne studieren würden. Ebenso sollen die Auslandsuniversitäten angeben können, welche Studierenden sie gerne bei sich aufnehmen würden. Gehen Sie davon aus, dass für x Studenten genau x Auslandsstudienplätze zur Verfügung stehen, jede Universität genau einen Studierenden aufnehmen kann, und x mindestens dreistellig ist. Beantworten Sie zu dieser Situation die folgenden Fragen und begründen Sie jeweils Ihre Antwort:

(a) In welcher Form würden Sie die Studierenden und die Universitäten ihre Präferenzen angeben lassen? (*2 Punkte*)

Lösung: Da x mindestens dreistellig ist, ist es nicht praktikabel, die Präferenzen der Studierenden und der Universitäten komplett in Form eines Rankings abzufragen. Eine Möglichkeit wäre, beide Seiten jeweils ihre Top 10 angeben zu lassen. Eine Alternative oder mögliche Ergänzung wäre, abstrakte Präferenzäußerungen zuzulassen, die eine Teilmenge von Studierenden oder Universitäten identifizieren (z.B. "Alle Studierenden, die im Noten-Ranking ihres Jahrgangs zu den Top 10 % gehören").

(b) Nach welchen Kriterien würden Sie die Studienplatzvergabe durchführen? (*2 Punkte*)

Lösung: Das Problem, das sich hier stellt, nennt sich *bipartites Matching*. Minimale Vergabekriterien:

- Kein Studierender sollte einer Universität zugeordnet werden, die er nicht besuchen will.
- Keine Universität sollte Studierende zugeordnet bekommen, die sie nicht aufnehmen will.

Mögliche weitere Kriterien:

- Möglichst viele Studierende sollen eine Universität zugeordnet bekommen (*maximales* Matching).
- Studierende, die bestimmte Kriterien erfüllen, haben Priorität (z.B. Vergabe nach Noten-Ranking unter Berücksichtigung besonderer Eigenschaften oder Zusatzkenntnisse).
- Es soll kein Paar (Studierender x, Universität y) geben, sodass x y gegenüber der ihm zugeordneten Universität präferiert und y x gegenüber dem ihm zugeordneten Studierenden präferiert (*stabiles* Matching).

(c) Nach welchen Kriterien würden Sie entscheiden, welche von mehreren möglichen Zuordnungen von Studierenden zu Universitäten die beste Zuordnung ist? (*2 Punkte*)

Lösung: Man kann die Zuordnungen, welche die zuvor festgelegten Kriterien erfüllen (also z.B. alle stabilen Matchings) anhand einer globalen Nutzenfunktion vergleichen, in deren Definition die Zufriedenheit der einzelnen Studierenden und Universitäten einfließen sollte. Man könnte z.B. betrachten, auf welchem Platz im Ranking die einer Studierenden (einer Universität) zugeordnete Universität (zugeordnete Studierende) steht, die Summe all dieser Rankingplätze bilden, und unter den in Betracht kommenden Zuordnungen diejenige auswählen, die die geringste Gesamtsumme hat.

c) Wie können Sie das in der vorigen Teilaufgabe beschriebene Zuordnungsproblem als Problem auf einem Graphen modellieren und warum könnte dies zweckmäßig sein? (*2 Punkte*)

Lösung: Man kann einen Graphen mit allen Universitäten und Studierenden als Knoten definieren. Wie man die Kanten definiert, hängt davon ab, welche Zuordnung man finden will. Die Modellierung als Graph ist sinnvoll, weil man dann die Möglichkeit hat, das Zuordnungsproblem mithilfe von Graphalgorithmen zu lösen, die für eine abstrahierte Form des Problems (oder auch für ein ganz anderes Problem) gemacht sind. Beispiele: Wenn man ein maximales Matching sucht, kann man den Algorithmus von Ford und Fulkerson[1] nutzen, der dazu gemacht ist, maximale Flüsse in Graphen zu finden. Wenn man ein stabiles Matching sucht, kann man den Algorithmus von Gale und Shapley[2] einsetzen.

Aufgabe 4 (*Zusatzaufgabe, 10 Punkte*) Ein Zwei-Personen-Spiel: Das Spiel wird auf einem ungerichteten Graphen gespielt. Es gibt zwei Spieler. Die Spieler wählen abwechselnd Knoten und Spieler 1 beginnt. Am Anfang, darf Spieler 1 einen beliebigen Knoten wählen. Später gilt dann: wenn ein Spieler dran ist, muss er einen Knoten wählen, der vorher noch von keinem Spieler gewählt wurde und benachbart ist zu dem Knoten, der gerade von dem anderen Spieler gewählt wurde. Wer als erstes nicht mehr ziehen kann, hat verloren.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Ford%E2%80%93Fulkerson_algorithm
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Gale%E2%80%93Shapley_algorithm

Der Spieler 1 könnte mit dem Knoten B beginnen. Dann kann Spieler 2 entweder A oder C spielen. Nehmen wir an, er spielt C. Es gibt noch einen ungespielten Nachbarn von C, nämlich D. Spieler 1 spielt also D und hat gewonnen. Spieler 2 kann nicht mehr ziehen. Es gibt zwar noch den ungespielten Knoten A, aber dieser ist nicht zu D benachbart.

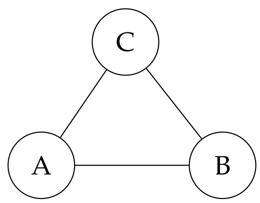
Spieler 2 kann allerdings besser spielen. Nachdem Spieler 1 mit dem Knoten B begonnen hat, spielt Spieler 2 den Knoten A und hat gewonnen. Es gibt zwar noch zwei ungespielte Knoten, nämlich C und D, aber keiner von beiden ist mit A verbunden.

Nehmen wir nun an, dass Spieler 1 mit A beginnnt. Dann spielt 2 den Knoten B, 1 antwortet mit C, und 2 antwortet mit D. Spieler 2 hat gewonnen.

Überzeugen Sie sich, dass Spieler 2 auch gewinnen kann, wenn Spieler 1 mit C oder D gewinnt.

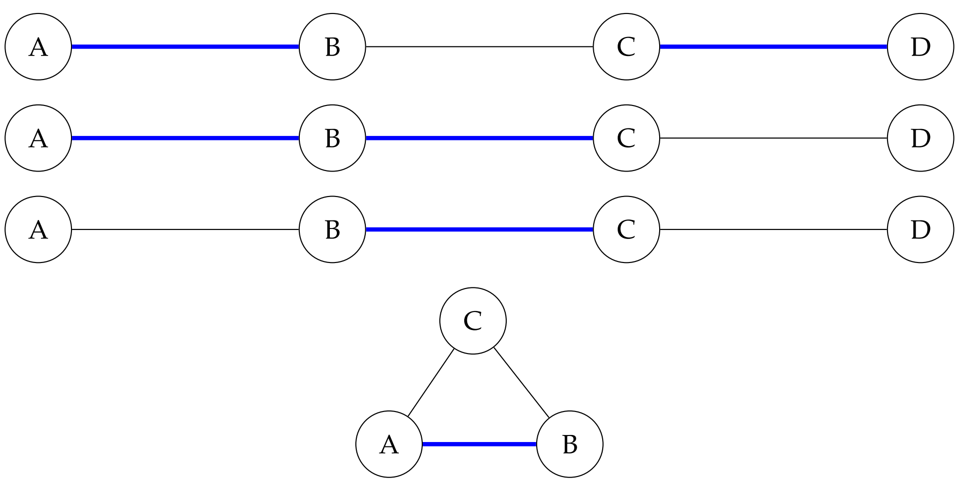
Auf dem obigen Graph hat also Spieler zwei eine Gewinnstrategie, d.h., mit klugem Spiel kann er immer gewinnen.

Auf folgendem Graphen



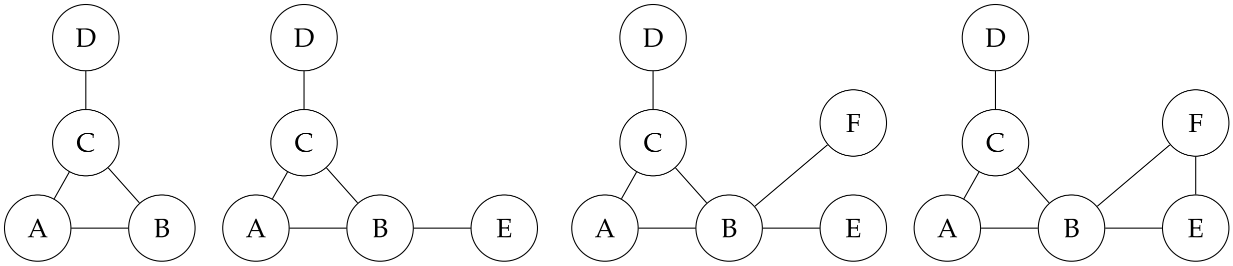
hat Spieler 1 eine Gewinnstrategie. Er spielt den Knoten A, dann kann 2 B oder C spielen, und 1 spielt dann den dritten Knoten und hat gewonnen.

Wir wollen nun bestimmen, für welche Graphen welcher Spieler eine Gewinnstrategie hat. Eine *Paarung* in einem ungerichteten Graphen ist eine Menge von Kanten, die keine Endpunkte gemeinsam haben. Die folgende Abbildung zeigt vier Graphen. Im ersten, dritten und vierten bilden die blauen Kanten eine Paarung; im zweiten bilden die blauen Kanten keine Paarung, da zwei blaue Kanten B als Endpunkt haben.



Sei P eine Paarung. Für eine Kante $\{u, v\} \in P$ sind u und v gepaart; v heißt Partner von u und u heißt Partner von v. Eine Paarung heißt *perfekt*, wenn sie alle Knoten des Graphen paart. Eine Paarung heißt *maximum*, wenn es keine Paarung mit mehr Kanten gibt. Die Paarung ist obersten Graphen ist perfekt und maximum. Die Paarung im dritten Graphen ist nicht maximum, da sie nur aus einer Kante besteht, es aber eine Paarung mit zwei Kanten gibt (nämlich die im ersten Bild gezeigte). Die Paarung im untersten Graphen ist maximum aber nicht perfekt.

Welche der folgenden vier Graphen hat eine perfekte Paarung? Geben Sie entweder eine perfekte Paarung an oder argumentieren Sie, dass es keine gibt (*3 Punkte*).



Lösung: Im ersten Graphen sind die Kanten (A,B) und (C,D) eine perfekte Paarung. Der zweite Graph hat eine ungerade Anzahl von Knoten, also kann es keine perfekte Paarung geben. Im dritten Graphen gibt es keine perfekte Paarung, da sowohl F als auch E nur mit B gepaart werden können. Im vierten Graphen gibt es eine perfekte Paarung, nämlich die Kanten (A,B), (C,D) und (E,F).

Es gilt nun: *Spieler 2 hat eine Gewinnstrategie auf einem Spielgraphen G, genau wenn es in G eine perfekte Paarung gibt. Andernfalls hat Spieler 1 eine Gewinnstrategie.*

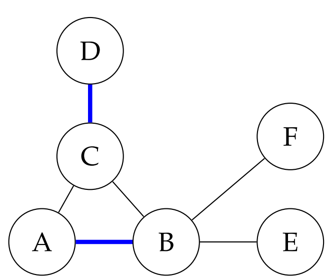
Nehmen wir an, dass der Spielgraph eine perfekte Paarung P hat. Dann spielt 2 nach folgender Strategie. Wenn immer Spieler 1 einen Knoten u wählt, dann wählt Spieler 2 den Partner von u in P. Begründen Sie, dass Spieler 2 mit dieser Strategie immer gewinnt. *(3 Punkte)*

Lösung: Nach einem Zug von Spieler 2 gilt: in einem Paar von P sind entweder kein Knoten oder beide Knoten gespielt. Wenn also Spieler 1 einen Knoten u spielt, dann ist der Partner von u in P noch nicht gespielt. Auch ist der Partner von u in P mit u durch eine Kante verbunden. Also darf Spieler 2 den Partner spielen.

Nehmen wir nun an, dass der Spielgraph keine perfekte Paarung hat. Sei dann P eine Paarung von größter Kardinalität und sei v ein Knoten, der in P nicht gepaart ist. Begründen Sie, dass es einen solchen Knoten geben muss (*1 Punkt*). Spieler 1 spielt v. Danach spielt 1 wie folgt: Wenn immer Spieler 2 einen Knoten u spielt, dann spielt Spieler 1 den Partner von u in P. Begründen Sie, dass Spieler 1 immer ziehen kann (*3 Punkte*).

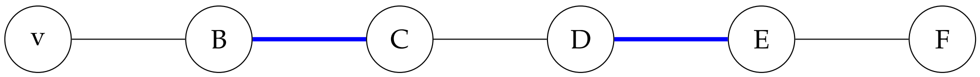
Betrachten wir dazu zunächst Beispiele.

Spieler 1 spielt A, 2 spielt B, 1 spielt C (also den Partner von B), 2 spielt D und 1 hat verloren. Hatte ich nicht behauptet, dass 1 eine Gewinnstrategie hat? Ich habe aber auch gesagt, dass P eine Paarung von größter Kardinalität sein muss. Das ist P aber nicht; wir wissen schon, dass es auch eine Paarung mit zwei Kanten gibt. Der Spielverlauf zeigt dies sogar. Der Pfad A – B – C – D verbindet zwei ungepaarte Knoten und die Kanten in P und nicht in P wechseln sich ab. Wenn wir A – B und C – D zu P hinzunehmen und B – C rausnehmen, erhalten wir eine größere Paarung. Sehen wir uns ein zweites Beispiel an.



1 spielt F (oder E), 2 spielt B, 1 spielt A (1 darf nicht F spielen), 2 spielt C, und 1 spielt D und hat gewonnen. 1 würde verlieren, wenn 2 ihn zwingen könnte F zu spielen. Überzeugen Sie sich, dass 2 das nicht kann. Nun überlegenw wir allgemein.

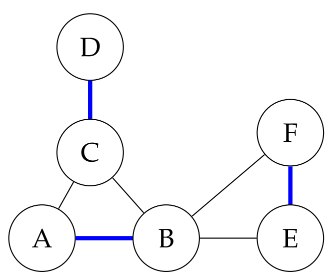
Nehmen Sie dazu die folgende Abbildung zu Hilfe. Die Kanten in P sind blau gezeichnet. Spieler 1 spielt v, dann Spieler 2 den Knoten B (= einen ungespielten Nachbar von v), dann Spieler 1 den Knoten C (= den Partner von B in P), dann Spieler 2 den Knoten D (= einen ungespielten Nachbar von C), dann Spieler 1 den Knoten E (den Partner von D in P), dann Spieler 2 den Knoten F (= einen ungespielten Nachbar von E). Nehmen wir nun an, dass der Spieler 1 nicht weiterspielen kann, weil der Knoten F in P nicht gepaart ist. Die Spieler haben einen Pfad von v nach F konstruiert, v und F sind beide nicht gepaart in P, und der Pfad enthält mehr schwarze als blaue Kanten. Kann dann P eine Paarung größter Kardinalität sein?



Lösung: Den ungepaarten Knoten v muss es geben, da P nicht perfekt ist.

Wie oben argumentiert man, dass nach einem Zug von 1 von einen Paar in P immer entweder beide oder kein Knoten gespielt ist. Wenn also 1 nicht mehr ziehen kann, dann muss zwei als letztes einen Knoten w gespielt haben, der keinen Partner in P hat; $w = F$ in obigem Beispiel. Die beiden Spieler haben nun einen Pfad von v nach w konstruiert. Die Kanten auf diesem Pfad sind abwechselnd nicht in P und in P; die erste und die letzte Kante sind nicht in P und daher enthält der Pfad mehr Kanten nicht in P als in P; die Knoten v und w sind in P nicht gepaart. Wir entfernen nun die blauen Kanten des Pfades aus P und tun die schwarzen Kanten dazu. Damit erhalten wir eine Paarung, die um eine Kante größer ist. Das ist ein Widerspruch, da P eine Paarung von größter Kardinalität ist. Also kann diese Situation nicht eintreten.

Anregung: Spielen Sie das Spiel mit einem Freund/einer Freundin auf einem Graphen, der eine perfekte Paarung besitzt. Sie sollten eine perfekte Paarung P kennen. Als Spieler 2 benutzen Sie die Gewinnstrategie. Als Spieler 1 spielen sie beliebige zulässige Knoten, bis ihr Gegner von der Gewinnstrategie abweicht. Also, nachdem Sie u gespielt haben, spielt ihr Gegner nicht den Partner von u in P sondern einen anderen Knoten. Das wird wahrscheinlich irgendwann passieren, da ihr Gegner P nicht kennt. Nun wechseln Sie zur Gewinnstrategie des zweiten Spielers, d.h. sie spielen immer den Partner des von ihrem Gegner gewählten Knoten. Wenn der Graph nur **eine** perfekte Paarung hat, gewinnen Sie damit sicher. Im folgenden Graphen sind die blauen Kanten eine perfekte Paarung und sie sind auch die einzige perfekte Paarung. Als Spieler 1 spielen Sie B. Wenn ihr Gegner nicht mit A antwortet, können Sie gewinnen.



Ich habe für die Videos, die Nachbereitung und das Übungsblatt etwa ☐ Stunden gebraucht.

(Ann-Sophie fertigt aus diesen Zahlen eine Statistik an. Kurt und Corinna sehen nur diese Statistik. Wir möchten wissen, ob der Schwierigkeitsgrad in etwa richtig ist.)

Auktionen, Gleichgewichte, Nutzenmaximierende Agenten war spannend ☐ okay ☐ langweilig ☐
schwierig ☐ okay ☐ einfach ☐