



max planck institut
informatik

Combining Linear Arithmetic & First-Order Logic

Perspektivenvorlesung WS 08/09
Christoph Weidenbach

Mathematik 9. Klasse



max planck institut
informatik

Gerda war vor einem Jahr doppelt so alt wie Herbert.
In zwei Jahren wird sie 1,5-mal so alt sein wie Herbert.
Wie alt sind die beiden heute?



Fourier Motzkin



```
BOOL FM(Menge  $N$  von LA Atomen) {  
  falls  $N = \emptyset$  dann return 1;  
  falls  $N$  keine Variablen mehr enthält return (Wert von  $N$ );  
  sonst {  
    wähle eine Variable  $x$  aus  $N$   
    transformiere alle Atome mit  $x$  nach  $t \lesssim x$  oder  $x \lesssim s$   
    und der Teilmenge  $N'$  von  $N$  die keine Atome mit  $x$  enthält  
    berechne  $N^* = \{t \lesssim s \mid \text{für alle } t \lesssim x \text{ und } x \lesssim s \text{ aus } N\}$   
    wobei  $t \lesssim s$  strikt, sobald  $t \lesssim x$  oder  $x \lesssim s$  strikt  
    return FM( $N' \cup N^*$ );  
  }  
}
```



Lineare Arithmetik

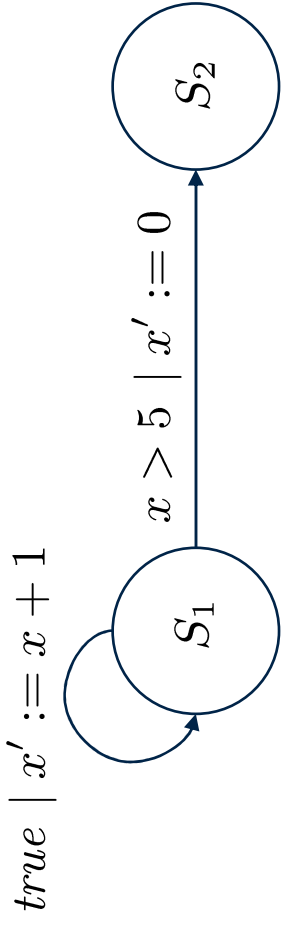
- Terme über ganzen Zahlen, Variablen und $+$, $-$: $5x - 4y + 2$
- Atome über \geq , $>$, \leq , $<$: $5x - 4y + 2 \geq 0$
- Formeln über \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \forall , \exists :

$$\begin{aligned} \exists x, y [& x - 1 \geq 2(y - 1) \\ & \wedge x - 1 \leq 2(y - 1) \\ & \wedge x + 2 \leq 1.5(y + 2) \\ & \wedge x + 2 \geq 1.5(y + 2)] \end{aligned}$$

- Interpretiert über \mathbb{Q}



Transitionssysteme



Eigenschaft des Transitionssystems: $x < 7$

Beweis: $(x < 7 \wedge x \leq 5 \wedge x' = x + 1) \rightarrow x' < 7$

$(x < 7 \wedge x > 5 \wedge x' = 0) \rightarrow x' < 7$



Resultate und Offene Fragen

- Lösbarkeit von Konjunktionen in polynomialer Zeit
- Lösbarkeit von Formeln braucht mindestens exponentielle Zeit
- Optimierung
- „praktisch“ gut funktionierende Algorithmen
- nicht lineare Probleme
- Probleme über \mathbb{Z} : Lösen von Formeln braucht
mindestens doppelt exponentielle Zeit



Lineare Arithmetik vs. Logik erster Stufe

	Lineare Arithmetik	Logik Erster Stufe
Funktionen	$+, -$	beliebige
Prädikate	$\leq, <$	beliebige
Bedeutung	fix	frei
Junktoren	$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \exists, \forall$	$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \exists, \forall$



Bedeutung freier Symbole

$$[S(0) \wedge \forall x [S(x) \rightarrow S(f(x))]] \rightarrow S(f(f(0)))$$



Forwarding

```
C:\WINDOWS\system32\cmd.exe
Microsoft Windows XP [Version 5.1.2600]
(C) Copyright 1985-2001 Microsoft Corp.

C:\Documents and Settings\weidenb>ipconfig

Windows IP Configuration

Ethernet adapter VMware Network Adapter VMnet8:

    Connection-specific DNS Suffix  . : 
    IP Address . . . . . : 192.168.9.1
    Subnet Mask . . . . . : 255.255.255.0
    Default Gateway . . . . . : 

Ethernet adapter VMware Network Adapter VMnet1:

    Connection-specific DNS Suffix  . : 
    IP Address . . . . . : 192.168.30.1
    Subnet Mask . . . . . : 255.255.255.0
    Default Gateway . . . . . : 

Ethernet adapter Local Area Connection 2:

    Media State . . . . . : Media disconnected

Ethernet adapter Wireless Network Connection:

    Connection-specific DNS Suffix  . : 
    IP Address . . . . . : 10.29.29.9
    Subnet Mask . . . . . : 255.255.255.0
    Default Gateway . . . . . : 10.29.29.1

C:\Documents and Settings\weidenb>
```



Forwarding Rule



```
RouteIPPacket(route_ip_packet(x_host,  
    ippacket(x_ip_src, x_ip_dst, x_ip_proto, x_ip_payload ))) ^  
Interface(interface(x_host,x_ip_host,x_netmask,x_mac_src,x_segment)) ^  
RouteEntry(route(x_host,x_route_mask,x_dst_net_addr,local,first_route)) ^  
ipand(x_ip_dst,x_route_mask) = x_dst_net_addr ^  
ipand(x_ip_host,x_netmask) = ipand(x_ip_dst,x_netmask))  
→  
SendIPPacket(send_ip_packet(x_host,  
    x_ip_dst,ippacket(x_ip_src,x_ip_dst,x_ip_proto,x_ip_payload)))
```



Logisches IP And



$$\text{ipand}(\text{ip}(x_0, \dots, x_{31}), \text{ip}(y_0, \dots, y_{31})) = \text{ip}(\text{land}(x_0, y_0), \dots, \text{land}(x_{31}, y_{31})) \wedge$$

$$\text{land}(0, x) = 0 \wedge \text{land}(x, 0) = 0 \wedge$$

$$\text{land}(1, x) = x \wedge \text{land}(x, 1) = x \wedge$$

$$\text{land}(x, y) = 0 \rightarrow x=0 \vee y=0 \wedge$$

$$\text{land}(x, y) = 1 \rightarrow x=1 \wedge y=1$$



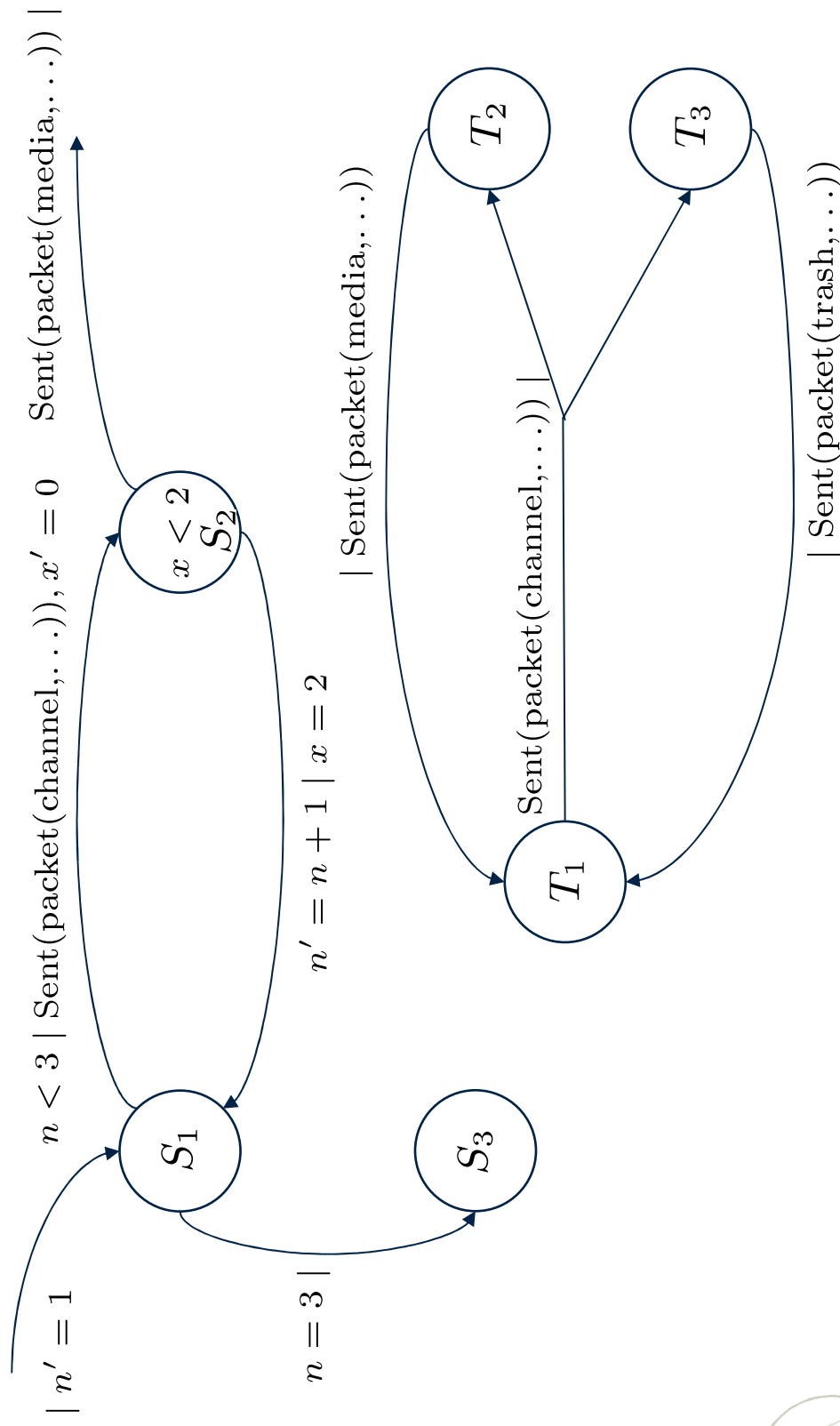
Resultate und Offene Fragen

- Gültigkeit von allquantifizierten Konjunktionen in entscheidbar
- Lösbarkeit von Formeln unentscheidbar
- Probleme über $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ lassen sich nicht immer formulieren

- entscheidbare Teilklassen
- „praktisch“ gut funktionierende Algorithmen
- Kombinationen



Arithmetik & Logik erster Stufe

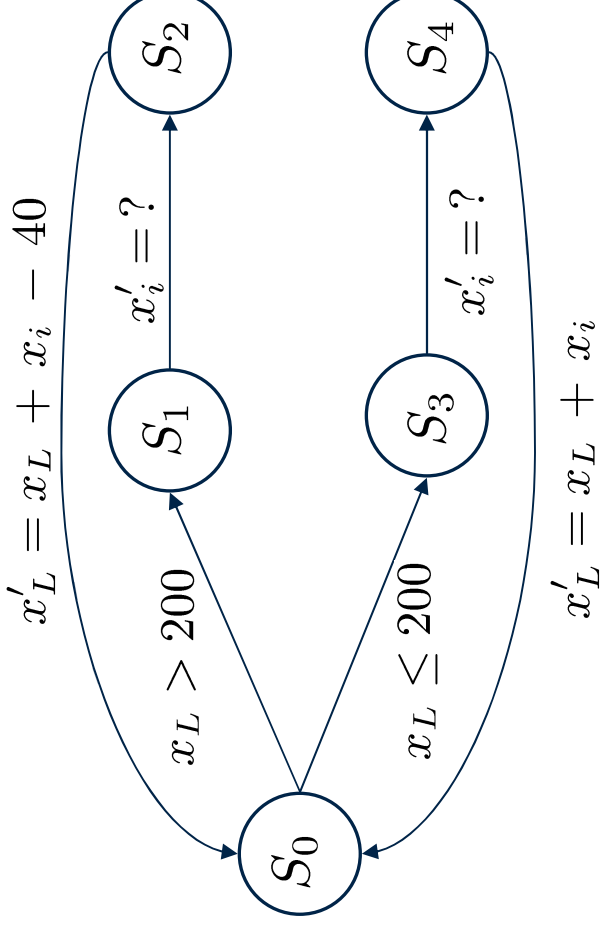


Resultate und Offene Fragen

- Kombination hat im Allgemeinen keine guten Eigenschaften
- entscheidbar unter zusätzlichen Einschränkungen
- sehr mächtige Sprache
- entscheidbare Teilklassen für Kombinationen
- „praktisch“ gut funktionierende Algorithmen
- Kombinationen von Teilsprachen
- probabilistische Erweiterungen



Wassertanksteuerung



$$[x_L > 200 \wedge S_0(x_L, x_i)] \rightarrow S_1(x_L, x_i)$$

$$S_1(x_L, x_i) \rightarrow S_2(x_L, x'_i)$$

$$[x'_L = x_L + x_i - 40 \wedge S_2(x_L, x_i)] \rightarrow S_0(x'_L, x_i)$$



The End

max planck institut
informatik



Danke für Ihre Aufmerksamkeit



Christoph Weidenbach

Perspektivenvorlesung WS08/09